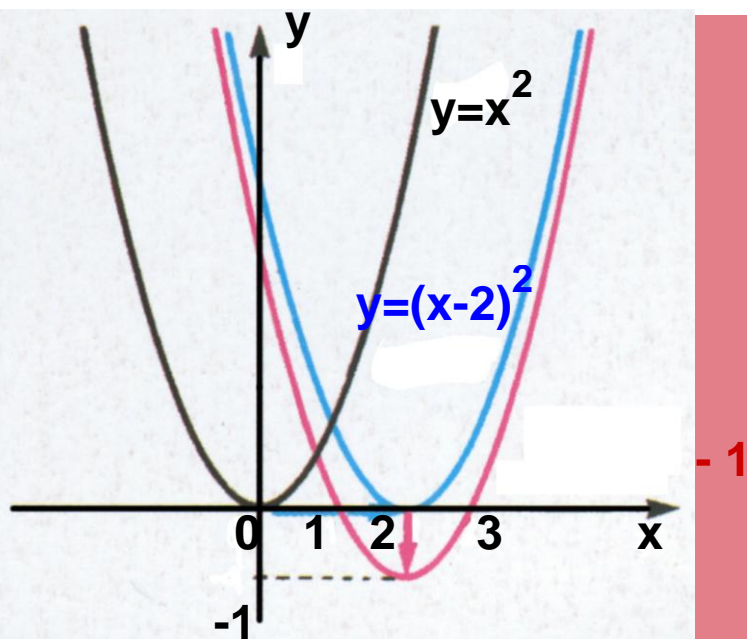


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ,  
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ  
ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

# Άλγεβρα και στοιχεία Πιθανοτήτων

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



Τόμος 2ος



# Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

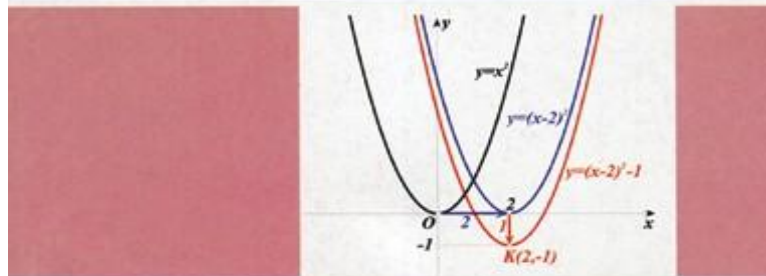
Τόμος 2<sup>ος</sup>



Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ  
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ  
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ  
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ  
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

# ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ • ΑΘΗΝΑ

## ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός,  
Κατσαργύρης Βασίλειος,  
Παπασταυρίδης Σταύρος,  
Πολύζος Γεώργιος,  
Σβέρκος Ανδρέας

## **ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ**

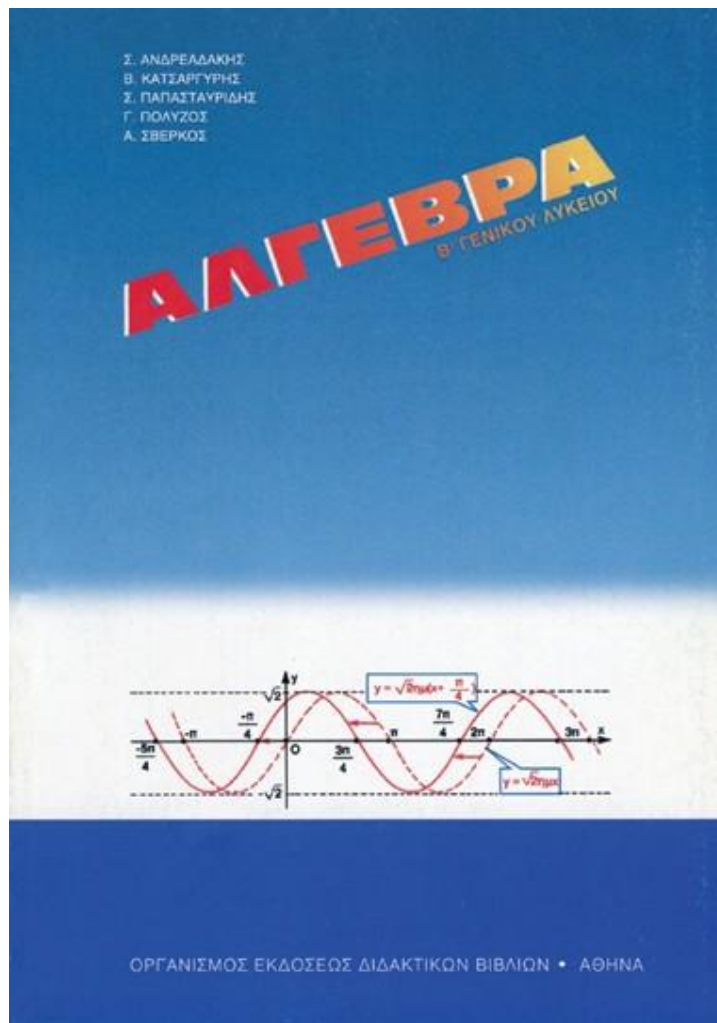
Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Ομοτ. Καθηγητής  
Πανεπιστημίου Αθηνών  
Κατσαργύρης Βασίλειος, Καθηγητής Βαρβακείου,  
Πειραματικού Λυκείου Παπασταυρίδης Σταύρος,  
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών  
Πολύζος Γεώργιος, Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.  
Σβέρκος Ανδρέας, Καθηγητής 2<sup>ου</sup> Πειραματικού  
Λυκείου Αθηνών

## **ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ Π. Ι.**

Σκούρας Αθανάσιος,  
Σύμβουλος του Π. Ι.  
Πολύζος Γεώργιος,  
Μόνιμος Πάρεδρος του Π. Ι.

## **ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ**

Ελευθερόπουλος Ιωάννης Καθηγητής  
Μαθηματικών, Αποσπασμένος στο Π. Ι.  
Ζώτος Ιωάννης Καθηγητής  
Μαθηματικών, Αποσπασμένος στο Π. Ι.  
Καλλιπολίτου Ευρυδίκη Καθηγήτρια  
Μαθηματικών, Αποσπασμένη στο Π. Ι.



## ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Ομοτ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών  
Κατσαργύρης Βασίλειος, Καθηγητής Βαρβακείου  
Πειραματικού Λυκείου

Παπασταυρίδης Σταύρος, Καθηγητής Πανεπιστημίου  
Πάτρας

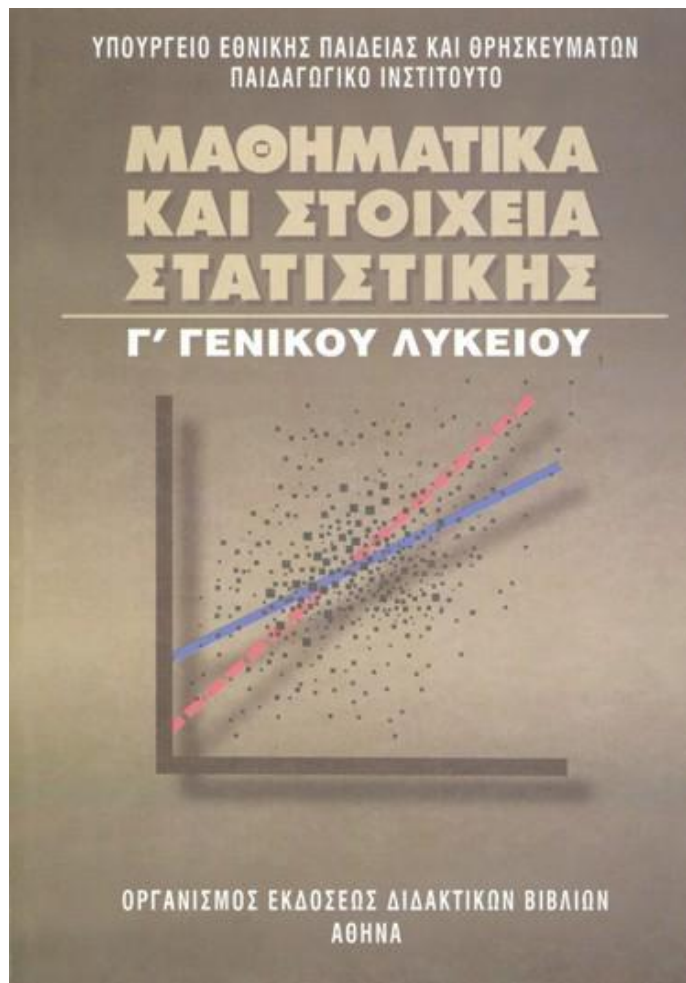
Πολύζος Γεώργιος, Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.

Σβέρκος Ανδρέας, Καθηγητής 2<sup>ου</sup> Πειραματικού Λυκείου  
Αθηνών

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ: 1991

ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ: 1992, 1993, 1994, 1995,  
1996, 1997, 1998

Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα  
έγινε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.



## **ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ**

**Αδαμόπουλος Λεωνίδα,  
Επ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου  
Δαμιανού Χαράλαμπος,  
Αναπλ. Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών  
Σβέρκος Ανδρέας,  
Σχολικός Σύμβουλος**

## **ΚΡΙΤΕΣ:**

**Κουνιάς Στρατής,  
Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών Μακρής  
Κωνσταντίνος, Σχολικός Σύμβουλος  
Τσικαλουδάκης Γεώργιος, Καθηγητής Β/θμιας  
Εκπαίδευσης**



**ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:**

**Μπουσούνη Λία**  
**Εκπαίδευσης**

**Καθηγήτρια Β/θμιας**

**ΔΑΚΤΥΛΟΓΡΑΦΗΣΗ:**

**Μπολιώτη Πόπη**

**ΣΧΗΜΑΤΑ:**

**Μπούτσικας Μιχάλης**

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ  
ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

**Ομάδα εργασίας για το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής  
Πολιτικής**

**Προσαρμογή: Αϊδινόπουλος Βασίλειος, Εκπαιδευτικός**  
**Επιμέλεια: Τερζούδη Κορτέσα, Εκπαιδευτικός**

**Επιστημονικός υπεύθυνος: Βασίλης Κουρμπέτης,**  
**Σύμβουλος Α΄ του Υ.ΠΟ.ΠΑΙ.Θ**

**Υπεύθυνη του έργου: Μαρία Γελαστοπούλου,**  
**M.Ed. Ειδικής Αγωγής**

**Τεχνική υποστήριξη – Επιμέλεια σχημάτων:**  
**Κωνσταντίνος Γκυρτής, Δρ. Πληροφορικής**



# 3

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

### 3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

#### Η Εξίσωση $ax + \beta = 0$

Στο Γυμνάσιο μάθαμε τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων της μορφής  $ax + \beta = 0$  για συγκεκριμένους αριθμούς  $a, \beta$ , με  $a \neq 0$ . Γενικότερα τώρα, θα δούμε πώς με την βοήθεια των ιδιοτήτων των πράξεων, επιλύουμε την παραπάνω εξίσωση, οποιοδήποτε και αν είναι οι αριθμοί  $a, \beta$ .

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} ax + \beta = 0 &\Leftrightarrow ax + \beta - \beta = -\beta \\ &\Leftrightarrow ax = -\beta \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Αν  $a \neq 0$  τότε:

$$ax = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{a}$$

Επομένως, αν  $a \neq 0$  η εξίσωση έχει ακριβώς μία

λύση, την  $x = -\frac{\beta}{a}$ .

- Αν  $a = 0$ , τότε η εξίσωση  $ax = -\beta$  γίνεται  $0x = -\beta$ , η οποία:
  - i) αν είναι  $\beta \neq 0$  δεν έχει λύση και για αυτό λέμε ότι είναι αδύνατη, ενώ
  - ii) αν είναι  $\beta = 0$  έχει τη μορφή  $0x = 0$  και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  δηλαδή είναι ταυτότητα.  
Η λύση της εξίσωσης  $ax + \beta = 0$  και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και ρίζα αυτής.

Για παράδειγμα

✓ Για την εξίσωση  $4(x - 5) = x - 5$  έχουμε:

$$4(x - 5) = x - 5 \Leftrightarrow 4x - 20 = x - 5$$

$$\Leftrightarrow 4x - x = 20 - 5$$

$$\Leftrightarrow 3x = 15$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{15}{3} = 5.$$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την  $x = 5$ .

✓ Για την εξίσωση  $3x - x - 3 = 2x$  Έχουμε

$$3x - x - 3 = 2x \Leftrightarrow 3x - x - 2x = 3 \Leftrightarrow 0x = 3$$

που είναι αδύνατη.

✓ Για τη εξίσωση  $4(x - 5) - x = 3x - 20$  έχουμε

$$4x - 20 - x = 3x - 20 \Leftrightarrow 4x - x - 3x = 20 - 20 \Leftrightarrow 0x = 0$$

που είναι ταυτότητα.

## ΣΧΟΛΙΟ

Όπως βλέπουμε στα παραπάνω παραδείγματα, κάθε φορά καταλήγουμε σε εξίσωση της μορφής  $ax + \beta = 0$ , της οποίας οι συντελεστές  $a$  και  $\beta$  είναι συγκεκριμένοι αριθμοί και μπορούμε αμέσως να δούμε ποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις ισχύει. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο, αν οι συντελεστές  $a$  και  $\beta$  της εξίσωσης  $ax + \beta = 0$  εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα γράμματα αυτά λέγονται **παράμετροι**, η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται **διερεύνηση**.

Για παράδειγμα η εξίσωση

$$(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

έχει παράμετρο το  $\lambda$  και γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0 &\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \\ &\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)x = \lambda - 1\end{aligned}$$

Επομένως

✓ Αν  $\lambda \neq -1$  και  $\lambda \neq 1$ , η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την

$$x = \frac{\lambda - 1}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \frac{1}{\lambda + 1}$$

✓ Αν  $\lambda = -1$ , η εξίσωση γίνεται  $0x = -2$  και είναι αδύνατη.

✓ Αν  $\lambda = 1$ , η εξίσωση γίνεται  $0x = 0$  και είναι ταυτότητα.

---

---

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένας ποδηλάτης πήγε από μια πόλη Α σε μία πόλη Β και επέστρεψε από τον ίδιο δρόμο. Στην μετάβαση οδηγούσε με μέση ταχύτητα 25km/h και ξεκουράστηκε ενδιάμεσα 1 ώρα. Στην επιστροφή οδηγούσε με μέση ταχύτητα 20 km/h και δεν έκανε καμία στάση. Αν ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν 10 ώρες, να υπολογιστεί το μήκος της διαδρομής ΑΒ.

## ΛΥΣΗ

Αν  $x$  km είναι η απόσταση ΑΒ, τότε ο ποδηλάτης

χρειάστηκε  $\frac{x}{25}$  ώρες για να πάει από το Α στο Β και  $\frac{x}{20}$

ώρες για να επιστρέψει. Αφού ξεκουράστηκε και 1 ώρα,

ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν  $\frac{x}{25} + \frac{x}{20} + 1$

Επειδή ο χρόνος αυτός είναι 10 ώρες έχουμε την

$$\text{εξίσωση: } \frac{x}{25} + \frac{x}{20} + 1 = 10$$

Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε:

$$\frac{x}{25} + \frac{x}{20} + 1 = 10 \Leftrightarrow 4x + 5x + 100 = 1000$$

$$\Leftrightarrow 9x = 900$$

$$\Leftrightarrow x = 100$$

Άρα το μήκος της διαδρομής είναι 100 km.

### Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

Στην συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν εξισώσεις 1ου βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί η εξίσωση  $\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$

#### ΛΥΣΗ

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε  $x \neq 1$ . Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1) \frac{x^2}{x-1} - (x-1) = (x-1) \frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \quad \text{αφού } x \neq 1.$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την  $x = 0$ .

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η εξίσωση  $|2x - 1| = |x + 3|$

#### ΛΥΣΗ

Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε:

$$|2x - 1| = |x + 3| \Leftrightarrow 2x - 1 = x + 3 \quad \text{ή} \quad 2x - 1 = -(x + 3)$$

Όμως:

$$\checkmark 2x - 1 = x + 3 \Leftrightarrow 2x - x = 4 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\checkmark 2x - 1 = -(x + 3) \Leftrightarrow 2x + x = -3 + 1 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Επομένως η εξίσωση έχει δυο λύσεις, τους αριθμούς 4 και  $-\frac{2}{3}$

#### ΣΧΟΛΙΟ

Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε κάθε εξίσωση της μορφής  $|f(x)| = |g(x)|$ .

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$|2x - 3| = 3x - 2$$

#### ΛΥΣΗ

Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση αυτή πρέπει και το δεύτερο μέλος της να είναι μη αρνητικό. Δηλαδή, πρέπει:

$$3x - 2 > 0 \quad (1)$$

Με αυτόν τον περιορισμό, λόγω των ιδιοτήτων των απόλυτων τιμών, έχουμε:

$$\begin{aligned} |2x - 3| = 3x - 2 &\Leftrightarrow 2x - 3 = 3x - 2 && \text{ή} && 2x - 3 = 2 - 3x \\ &\Leftrightarrow 2x - 3x = -2 + 3 && \text{ή} && 2x + 3x = 2 + 3 \\ &\Leftrightarrow -x = 1 && \text{ή} && 5x = 5 \\ &\Leftrightarrow x = -1 && \text{ή} && x = 1 \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η  $x = 1$ , διότι μόνο αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό (1).

### ΣΧΟΛΙΟ

Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε εξισώσεις της μορφής  $|f(x)| = g(x)$ .

---

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

---

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad 4x - 3(2x - 1) &= 7x - 42 && \text{ii)} \quad \frac{1 - 4x}{5} - \frac{x - 1}{4} &= \frac{x - 4}{20} + \frac{5}{4} \\ \text{iii)} \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} &= \frac{x}{4} - \frac{x}{5} - \frac{49}{60} && \text{iv)} \quad 1,2(x + 1) - 2,5 + 1,5x &= 8,6 \end{aligned}$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i)} \quad 2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4 \quad \text{ii)} \quad 2x - \frac{5 - x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3}$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad (\lambda - 1)x &= \lambda - 1 && \text{ii)} \quad (\lambda - 2)x &= \lambda \\ \text{iii)} \quad \lambda(\lambda - 1)x &= \lambda - 1 && \text{iv)} \quad \lambda(\lambda - 1)x &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

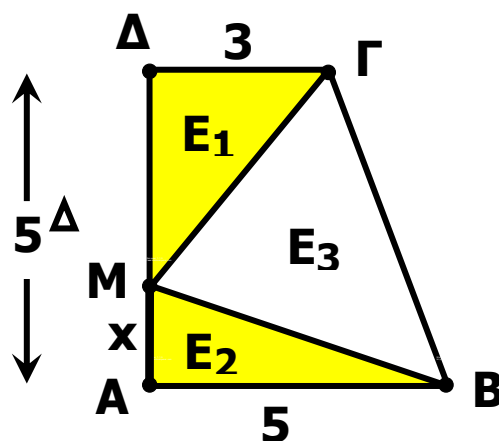


4. Στο παρακάτω ορθογώνιο τραπέζιο να βρεθεί η θέση του σημείου M στην AΔ ώστε για τα εμβαδά

$$E_1 = (M\hat{\Delta}\Gamma), \quad E_2 = (M\hat{A}B) \text{ και}$$

$$E_3 = (M\hat{B}\Gamma) \text{ να ισχύει:}$$

$$\text{i) } E_1 + E_2 = E_3 \quad \text{ii) } E_1 = E_2$$



5. Από κεφάλαιο 4000 € ένα μέρος του κατατέθηκε σε μια τράπεζα προς 5% και το υπόλοιπο σε μια άλλη τράπεζα προς 3%. Ύστερα από 1 χρόνο εισπράχθηκαν συνολικά 175€ τόκοι. Ποιο ποσό τοκίστηκε προς 5% και ποιο προς 3%;

6. Να επιλυθούν οι παρακάτω τύποι ως προς την αναφερόμενη μεταβλητή:

$$\text{i) } v = v_0 + at, \quad a \neq 0 \text{ (ως προς το } t)$$

$$\text{ii) } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ (ως προς το } R_1).$$

**7. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + (x - 4) = 0.$

ii)  $(x - 2)^2 - (2 - x)(4 + x) = 0.$

**8. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $x(x^2 - 1) - x^3 + x^2 = 0$     ii)  $(x + 1) + x^2 - 1 = 0$

**9. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $x(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$     ii)  $(x^2 - 4)(x - 1) = (x^2 - 1)(x - 2).$

**10. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$     ii)  $x^3 - 2x^2 - (2x - 1)(x - 2) = 0.$

**11. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $\frac{x}{x - 1} = \frac{1}{x^2 - x}$     ii)  $\frac{x + 1}{x^2 - 1} + \frac{2}{x^2 - 2x + 1} = 0.$

**12. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} = \frac{2}{x^2 - 1}$     ii)  $\frac{3}{x + 2} - \frac{2}{x} = \frac{x - 4}{x^2 + 2x}$

iii)  $\frac{1}{x + 2} = \frac{x}{x^2 - 4}$     iv)  $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x + 1}$

**13. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους τέτοιους ώστε το άθροισμα τους να ισούται με το γινόμενο τους.**

**14. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $|2x - 3| = 5$     ii)  $|2x - 4| = |x - 1|$

iii)  $|x - 2| = 2x - 1$     iv)  $|2x - 1| = x - 2.$

**15. Να λύσετε τις εξισώσεις**

$$\text{i) } \frac{|x| + 4}{3} - \frac{|x| + 4}{5} = \frac{2}{3} \quad \text{ii) } \frac{2|x| + 1}{3} - \frac{|x| - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

**16. Να λύσετε τις εξισώσεις**

$$\text{i) } \left| \frac{3 - x}{3 + x} \right| = 4$$
$$\text{ii) } |x - 1| |x - 2| = |x - 1|$$

### **B' ΟΜΑΔΑΣ**

**1. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:**

$$\text{i) } (x + \alpha)^2 - (x - \beta)^2 = 2\alpha(\alpha + \beta) \quad \text{ii) } \frac{x - \alpha}{\beta} = \frac{x - \beta}{\alpha}$$

έχουν πάντα λύση, οποιοδήποτε και αν είναι οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$ .

**2. Ποιοί περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε να έχει λύση η εξίσωση  $\frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\beta} = 1$  ;**

**3. Πόσο καθαρό οινόπνευμα πρέπει να προσθέσει ένας φαρμακοποιός σε 200ml διάλυμα οινοπνεύματος περιεκτικότητας 15%, για να πάρει διάλυμα οινοπνεύματος περιεκτικότητας 32%;**

**4. Ένα αυτοκίνητο A κινείται με 100km/h. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο B που κινείται με 120km/h προσπερνάει το A. Σε πόσα λεπτά τα δυο αυτοκίνητα θα απέχουν 1km;**

**5. Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x + \alpha}{x - \alpha} = \frac{x^2}{x^2 - \alpha^2}$  για όλες τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .**

**6. Να λύσετε την εξίσωση**

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 4$$

**7. Να λύσετε την εξίσωση  $|2|x|-1| = 3$ .**

**8. Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = |3x - 5|$**

## 3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^v = a$

- Έστω η εξίσωση  $x^3 = 8$ . Όπως αναφέραμε στον ορισμό της  $v$ -οστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού, η εξίσωση  $x^3 = 8$  έχει ακριβώς μια θετική λύση, την  $\sqrt[3]{8} = 2$ .

Η εξίσωση αυτή δεν έχει μη αρνητικές λύσεις, γιατί, για κάθε  $x \leq 0$  ισχύει  $x^3 \leq 0$ .

Επομένως η εξίσωση  $x^3 = 8$  έχει ακριβώς μια λύση, την  $\sqrt[3]{8}$ .

Γενικότερα:

Η εξίσωση  $x^v = a$ , με  $a > 0$  και  $v$  περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την  $\sqrt[v]{a}$ .

- Έστω η εξίσωση  $x^4 = 16$ . Όπως και προηγουμένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια θετική λύση την  $\sqrt[4]{16} = 2$ . Η εξίσωση αυτή όμως έχει ως λύση και την  $-\sqrt[4]{16} = -2$ , αφού  $(-\sqrt[4]{16})^4 = (\sqrt[4]{16})^4 = 16$ . Επομένως η εξίσωση  $x^4 = 16$  έχει ακριβώς δύο λύσεις, την  $\sqrt[4]{16} = 2$  και την  $-\sqrt[4]{16} = -2$

Γενικότερα:

Η εξίσωση  $x^v = a$ , με  $a > 0$  και  $v$  άρτιο φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις την  $\sqrt[v]{a}$  και  $-\sqrt[v]{a}$ .

- Έστω η εξίσωση  $x^3 = -8$ . Έχουμε διαδοχικά:

$$x^3 = -8 \Leftrightarrow -x^3 = 8 \Leftrightarrow (-x)^3 = 8 \Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$$

Επομένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια λύση, την  $-\sqrt[3]{8} = -2$ .

Γενικότερα:

Η εξίσωση  $x^v = a$ , με  $a < 0$  και  $v$  περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την  $-\sqrt[v]{|a|}$ .

- Έστω η εξίσωση  $x^4 = -4$ . Επειδή για κάθε  $x$  ισχύει  $x^4 \geq 0$ , η εξίσωση είναι αδύνατη.

Γενικότερα:

Η εξίσωση  $x^v = a$ , με  $a < 0$  και  $v$  άρτιο φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.

Από τα παραπάνω συμπεράσματα και από το γεγονός ότι η εξίσωση  $x^v = a^v$ , με  $v \in \mathbb{N}^*$ , έχει προφανή λύση την  $x = a$ , προκύπτει ότι:

- Αν ο  $v$  περιττός τότε η εξίσωση  $x^v = a^v$  έχει μοναδική λύση, την  $x = a$ .
- Αν ο  $v$  άρτιος τότε η εξίσωση  $x^v = a^v$  έχει δύο λύσεις, τις  $x_1 = a$  και  $x_2 = -a$ .

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η εξίσωση  $x^4 + 8x = 0$ .

## ΛΥΣΗ

$$x^4 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x^3 = -8$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i) } x^3 - 125 = 0 \quad \text{ii) } x^5 - 243 = 0 \quad \text{iii) } x^7 - 1 = 0$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i) } x^3 + 125 \quad \text{ii) } x^5 + 243 = 0 \quad \text{iii) } x^7 + 1 = 0$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i) } x^2 - 64 \quad \text{ii) } x^4 - 81 = 0 \quad \text{iii) } x^6 - 64 = 0$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i) } x^5 - 8x^2 = 0 \quad \text{ii) } x^4 + x = 0 \quad \text{iii) } x^5 + 16x = 0$$

5. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο  $81\text{m}^3$  και διαστάσεις  $x$ ,  $x$  και  $3x$ . Να βρείτε τις διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου.

**6. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $(x + 1)^3 = 64$     ii)  $1 + 125x^3 = 0$

iii)  $(x - 1)^4 - 27(x - 1) = 0.$



---

### 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

---

#### Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$

Η λύση πολλών προβλημάτων της Γεωμετρίας, της Φυσικής καθώς και άλλων επιστημών ανάγεται στην επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής:

$$ax^2 + bx + \gamma = 0, \text{ με } a \neq 0 \quad (1)$$

η οποία λέγεται εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Για παράδειγμα, έστω ο τύπος  $S = v_0t + \frac{1}{2}\gamma t^2$  όπου  $S$  το διάστημα που διανύει κινητό σε χρόνο  $t$ , με αρχική ταχύτητα  $v_0$  και επιτάχυνση  $\gamma$ . Αν θεωρήσουμε ως άγνωστο τον χρόνο  $t$ , τότε προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0t - S = 0$$

η οποία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Στη συνέχεια θα επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή με τη μέθοδο της «συμπλήρωσης του τετραγώνου».

Έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \quad [\text{αφού } \alpha \neq 0]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = -\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν θέσουμε  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ , τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \quad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

• Αν  $\Delta > 0$ , τότε έχουμε:

$$x + \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

δηλαδή

$$x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επομένως η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει δύο λύσεις άνισες τις:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Για συντομία οι λύσεις αυτές γράφονται

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

• Αν  $\Delta = 0$ , τότε η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει **διπλή**

**ρίζα** την  $-\frac{\beta}{2\alpha}$ .

• Αν  $\Delta < 0$ , τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι **αδύνατη** στο  $\mathbb{R}$ .

Η αλγεβρική παράσταση  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ , από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$ , ονομάζεται **διακρίνουσα** αυτής.

Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο R.

Για παράδειγμα

✓ Η εξίσωση  $2x^2 - 3x + 1 = 0$  έχει

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$ , οπότε έχει δυο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

✓ Η εξίσωση  $x^2 - 4x + 4 = 0$  έχει  $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$ ,

οπότε έχει μια διπλή ρίζα την  $x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$ .

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται σύντομα ως εξής:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (διπλή ρίζα).}$$

✓ Η εξίσωση  $2x^2 - 3x + 4 = 0$  έχει

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -23 < 0$ , οπότε δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Στην περίπτωση που η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$  έχει πραγματικές ρίζες  $x_1, x_2$ , έχουμε:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 \cdot x_2 &= \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} \\
 &= \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}
 \end{aligned}$$

Αν με  $S$  συμβολίσουμε το άθροισμα  $x_1 + x_2$  και με  $P$  το γινόμενο  $x_1 \cdot x_2$ , τότε έχουμε τους τύπους:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

που είναι γνωστοί ως τύποι Vieta.

Η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , με την βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  μας δίνει τη δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

Για παράδειγμα η εξίσωση με άθροισμα ριζών 3 και γινόμενο  $\sqrt{2}$  είναι η  $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$ .

---

---

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1η** Να λυθεί η εξίσωση:  $x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + 4\sqrt{3} = 0$

### ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = 4(\sqrt{3} + 1)^2 - 4 \cdot 4\sqrt{3} = 4 \left[ (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 \right] = 4(\sqrt{3} - 1)^2$$

Επομένως η εξίσωση έχει δυο ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{2(\sqrt{3} + 1) \pm \sqrt{4(\sqrt{3} - 1)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2 \pm 2(\sqrt{3} - 1)}{2} = \begin{cases} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{cases}$$

**2η** Ένας βράχος βρίσκεται στην κορυφή της χαράδρας ενός ποταμού, η οποία έχει βάθος 300m. Πόσος χρόνος απαιτείται μέχρι τη στιγμή, που ο βράχος θα αγγίξει το νερό του ποταμού, αν ο βράχος

- πέσει από την κορυφή;
- εκσφενδονιστεί κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα 50 m/sec; Δίδεται ότι  $g \approx 10 \text{ m/sec}^2$ .

### ΛΥΣΗ

i) Είναι γνωστό από την Φυσική ότι το διάστημα  $S$  που διανύει ένα σώμα στην ελεύθερη πτώση σε χρόνο  $t$

$$\text{sec είναι: } S = \frac{1}{2}gt^2$$

Επειδή  $S = 300\text{m}$  και  $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$  έχουμε:

$$\frac{1}{2}10t^2 = 300 \Leftrightarrow 5t^2 = 300 \Leftrightarrow t^2 = 60 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{60} \Leftrightarrow t \approx \pm 7,75$$

Η αρνητική ρίζα δεν είναι αποδεκτή, διότι ο χρόνος στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν μπορεί να είναι αρνητικός. Άρα  $t \approx 7,75 \text{ sec}$ .

ii) Όταν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα  $v_0$ , το διάστημα

που διανύει σε χρόνο  $t \text{ sec}$  είναι:  $S = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$

Επειδή  $v_0 = 50 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$  και  $t > 0$  θα έχουμε :

$$\frac{1}{2}10t^2 + 50t = 300 \Leftrightarrow 5t^2 + 50t - 300 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 10t - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-10 + \sqrt{100 + 4 \cdot 60}}{2} \approx \frac{-10 + 18,43}{2} = 4,22 \text{ sec}.$$

Άρα, ο ζητούμενος χρόνος είναι περίπου 4,22sec.

### ΣΧΟΛΙΟ

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, όπως είδαμε και παραπάνω, δεν πρέπει να ξεχνάμε να ελέγχουμε, αν οι λύσεις που βρήκαμε είναι εύλογες.

### Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

Στη συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν 2ου βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο:

Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

### ΛΥΣΗ

Επειδή  $x^2 = |x|^2$ , η εξίσωση γράφεται:

$$|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$$

Αν θέσουμε  $|x| = \omega$ , τότε η εξίσωση γίνεται

$$\omega^2 - 2\omega - 3 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις  $\omega_1 = 3$  και  $\omega_2 = -1$ . Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού  $\omega = |x| \geq 0$ .

Επομένως  $|x| = 3$ , που σημαίνει  
 $x = -3$  ή  $x = 3$ .

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο:

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x}$$

### ΛΥΣΗ

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει  $x - 1 \neq 0$  και  $x^2 - x \neq 0$ , δηλαδή  $x \neq 0$  και  $x \neq 1$ . Με αυτούς τους περιορισμούς του  $x$  έχουμε:



$$\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x}$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\frac{3x-1}{x-1} - x(x-1)\frac{2}{x} = x(x-1)\frac{2x^2+x-1}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow x(3x-1) - (x-1)2 = 2x^2+x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 3$ . Από αυτές, λόγω του περιορισμού, δεκτή είναι μόνο η  $x_2 = 3$ .

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο:

Να λυθεί η εξίσωση:

$$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

### ΛΥΣΗ

Αν θέσουμε  $x^2 = y$  η εξίσωση γίνεται:

$$2y^2 - 7y - 4 = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση  $2y^2 - 7y - 4 = 0$  έχει ρίζες τις  $y_1 = 4$  και  $y_2 = -\frac{1}{2}$ .

Επειδή  $y = x^2 \geq 0$ , δεκτή είναι μόνο η  $y_1 = 4$ .

Επομένως, οι ρίζες της (1) είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 = 4$ , δηλαδή οι  $x_1 = -2$  και  $x_2 = 2$ .

### ΣΧΟΛΙΟ

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε στο παραπάνω παράδειγμα εφαρμόζεται και για την επίλυση κάθε εξίσωσης της μορφής:

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \text{ με } \alpha \neq 0$$

Οι εξισώσεις της μορφής αυτής ονομάζονται διτετράγωνες εξισώσεις.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i)  $2x^2 - 5x + 3 = 0$     ii)  $x^2 - 6x + 9 = 0$     iii)  $3x^2 + 4x + 2 = 0$ .

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i)  $x^2 - 1,69 = 0$     ii)  $0,5x^2 - x = 0$     iii)  $3x^2 + 27 = 0$

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες:

i)  $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0, \lambda \neq 0$

ii)  $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0, \alpha \neq 0$

4. Να βρείτε τις τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η εξίσωση  $\mu x^2 + 2x + \mu = 0, \mu \neq 0$  έχει διπλή ρίζα.

5. Αν  $\alpha \neq \beta$ , να δείξετε ότι είναι αδύνατη στο  $\mathbb{R}$  η εξίσωση  $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2(\alpha + \beta)x + 2 = 0$ . Να εξετάσετε την περίπτωση που είναι  $\alpha = \beta$ .

6. Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς

i) 2 και 3    ii) 1 και  $\frac{1}{2}$     iii)  $5 - 2\sqrt{6}$  και  $5 + 2\sqrt{6}$ .

7. Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν

i) Άθροισμα 2 και γινόμενο -15.

ii) άθροισμα 9 και γινόμενο 10.

**8. Να λύσετε τις εξισώσεις:**

i)  $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{3})x + \sqrt{15} = 0$  ii)  $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0.$

**9. Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 + \alpha^2 = \beta^2 - 2\alpha x$ , για τις διάφορες τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .**

**10. Να βρείτε τις πλευρές ενός ορθογωνίου με περίμετρο 68cm και διαγώνιο 26cm.**

**11. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $x^2 - 7|x| + 12 = 0$  ii)  $x^2 + 2|x| - 35 = 0$

iii)  $x^2 - 8|x| + 12 = 0.$

**12. Να λύσετε την εξίσωση  $(x - 1)^2 + 4|x - 1| - 5 = 0.$**

**13. Να λύσετε την εξίσωση  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$**

**14. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$  ii)  $\frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x-2} + \frac{2-x^2}{x^2-2x} = 0$

**15. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$  ii)  $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$

iii)  $2x^4 + 7x^2 + 3 = 0.$

## **Β' ΟΜΑΔΑΣ**

1. Δίνεται η εξίσωση  $\alpha^2 x^2 - 2\alpha^3 x + \alpha^4 - 1 = 0$ , με  $\alpha \neq 0$ .

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι  $\Delta = 4\alpha^2$ .

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}.$$

2. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - (5 - \sqrt{2})x + 6 - 3\sqrt{2} = 0$ .

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι  $\Delta = (1 + \sqrt{2})^2$ .

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι 3 και  $2 - \sqrt{2}$ .

3. Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  τις οποίες η εξίσωση  $2x^2 + (\alpha - 9)x + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$  έχει διπλή ρίζα.

4. Αν ο αριθμός  $\rho$  είναι η ρίζα της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , με  $\alpha \cdot \gamma \neq 0$ , να δείξετε ότι ο αριθμός  $\frac{1}{\rho}$  είναι η ρίζα της εξίσωσης  $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ .

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i)  $x + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{x}, \quad \alpha \neq 0$

ii)  $\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha, \beta \neq 0$

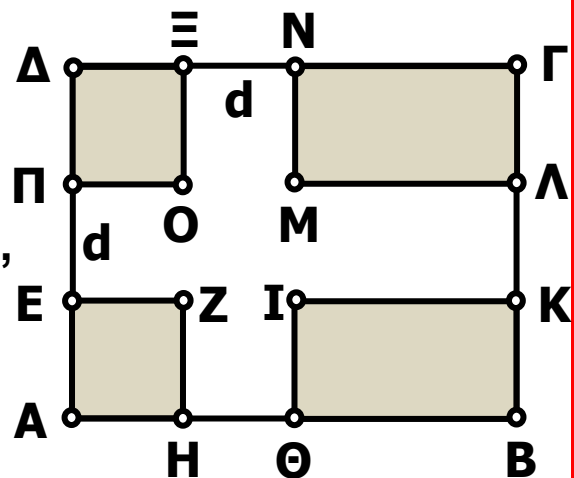
6. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + 2\lambda x - 8 = 0$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

ii) Αν η μια ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, τότε να βρεθούν οι ρίζες και η τιμή του  $\lambda$ .

7. Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι που να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

8. Η σημαία του διπλανού σχήματος έχει διαστάσεις 4m και 3m αντιστοίχως. Να βρείτε πλάτος  $d$  του σταυρού, αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας.



9. Μια κατασκευαστική εταιρεία διαθέτει δυο μηχανήματα Α και Β. Το μηχάνημα Β χρειάζεται 12 ώρες περισσότερο από ότι το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο. Ο χρόνος που απαιτείται για να τελειώσει το έργο, αν χρησιμοποιηθούν και τα δυο μηχανήματα μαζί είναι 8 ώρες. Να βρείτε το χρόνο που θα χρειαζόταν το κάθε μηχάνημα για να τελειώσει το έργο αυτό αν εργαζόταν μόνο του.

10. Είναι γνωστό ότι μια ρίζα της εξίσωσης  $x^4 - 10x^2 + \alpha = 0$  είναι ο αριθμός 1. Να βρείτε το  $\alpha$  και να λύσετε την εξίσωση.

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

**Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.**

1.	Η εξίσωση $(\alpha - 1)x = \alpha(\alpha - 1)$ έχει μοναδική λύση την $x = \alpha$ .	Α	Ψ
2.	Η εξίσωση $( x  + 1)( x  + 2) = 0$ είναι αδύνατη.	Α	Ψ
3.	Η εξίσωση $( x  - 1)( x  - 2) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.	Α	Ψ
4.	Η εξίσωση $( x  - 1)( x  + 2) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.	Α	Ψ
5.	Η εξίσωση $ x  = x - 2$ έχει μοναδική λύση.	Α	Ψ
6.	Η εξίσωση $ x  = 2 - x$ έχει μοναδική λύση.	Α	Ψ
7.	Αν οι συντελεστές α και γ της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.	Α	Ψ
8.	Αν δύο εξισώσεις 2ου βαθμού έχουν τις ίδιες ρίζες, τότε οι συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x των εξισώσεων αυτών είναι ίσοι.	Α	Ψ
9.	Η εξίσωση $ax^2 + 2x - \alpha = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.	Α	Ψ
10.	Η εξίσωση $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$ , με $a \neq 0$ , έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.	Α	Ψ
11.	Η εξίσωση $a^2x^2 - 2ax + 2 = 0$ , με $a \neq 0$ , δεν έχει πραγματικές ρίζες.	Α	Ψ
12.	Η εξίσωση $2x^2 + 3ax + a^2 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.	Α	Ψ

13.	Η εξίσωση $x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + 1 = 0$ με $\alpha \neq 0, 1$ έχει δύο άνισες και αντίστροφες πραγματικές ρίζες.	A	Ψ
14.	Οι εξισώσεις $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ και $x^2 - 3x + 2 = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	A	Ψ
15.	Οι εξισώσεις $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = 5$ και $(2x^2 + 3x + 1) = 5(x^2 - 1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	A	Ψ
16.	Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x$ και $y$ που να έχουν άθροισμα $S = -10$ και γινόμενο $P = 16$ .	A	Ψ
17.	Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x$ και $y$ που να έχουν άθροισμα $S = 10$ και γινόμενο $P = 25$ .	A	Ψ
18.	Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x$ και $y$ που να έχουν άθροισμα $S = 2$ και γινόμενο $P = 2$ .	A	Ψ

**II** Να εντοπίσετε το λάθος στους παρακάτω  
συλλογισμούς:

1. Η εξίσωση  $(2x - 1)(x + 2) = (3 - 2x)(x + 2)$  γράφεται  
ισοδύναμα:

$$(2x - 1)(x + 2) = (3 - 2x)(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 3 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1.$$

Όμως και ο αριθμός  $x = -2$  επαληθεύει τη δοθείσα εξίσωση.

2. Η εξίσωση  $|2x - 1| = x - 2$  γράφεται ισοδύναμα:

$$|2x - 1| = x - 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = x - 2 \text{ ή}$$

$$2x - 1 = 2 - x \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1.$$

Όμως καμία από τις τιμές αυτές του  $x$  δεν επαληθεύει τη δοθείσα εξίσωση.

## ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Από τα αρχαία χρόνια οι μαθηματικοί χρησιμοποίησαν διάφορες τεχνικές για να λύσουν μια εξίσωση 2ου βαθμού.

Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποίησαν γεωμετρικές μεθόδους, ίσως λόγω των δυσκολιών που είχαν με τους άρρητους αριθμούς, αλλά και λόγω πρακτικών δυσκολιών που προέκυπταν από τα ελληνικά ψηφία.

Οι Ινδοί και οι Άραβες χρησιμοποίησαν μια μέθοδο όμοια με τη σημερινή διαδικασία «συμπλήρωσης τετραγώνου», περιγράφοντας όμως λεκτικά τον τρόπο εύρεσης των λύσεων. Αυτοί θεωρούσαν ως διαφορετικού τύπου κάθε μία από τις εξισώσεις  $x^2 + px = q$ ,  $x^2 - px = q$ ,  $x^2 - px = -q$ .

Σήμερα όμως γράφουμε τις εξισώσεις αυτές με τη γενική μορφή  $ax^2 + bx + c = 0$

Ο σύγχρονος συμβολισμός άρχισε να εμφανίζεται περί το 1500 μ.Χ, και οι δυνατότητες χρησιμοποίησης αρνη-



τικών ριζών και ακόμα μιγαδικών ριζών προτάθηκαν από τους Cardano και Girard. Η γεωμετρική παράσταση των αρνητικών ριζών από τον Descartes και των μιγαδικών αριθμών από τους Wessel, Argand και Gauss έκαμε τους αριθμούς αυτούς περισσότερο αποδεκτούς ως ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Όμως η ποικιλία των επιλύσεων που αναπτύχθηκε τα αρχαία χρόνια μας ενέπνευσε να αναπτύξουμε μερικούς τρόπους εξαγωγής του τύπου

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

που δίνει τις ρίζες της γενικής εξίσωσης 2ου βαθμού

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0.$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τρεις μεθόδους επίλυσης μίας εξίσωσης 2ου βαθμού.

### Μέθοδος των Ινδών

Η επίλυση αυτή που επινοήθηκε στην Ινδία, αποδίδεται στον Sridhara (1025 μ. Χ. περίπου). Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

$$\alpha x^2 + \beta x = -\gamma$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με  $4\alpha$  και ύστερα προσθέτουμε το  $\beta^2$  και στα δύο μέλη, για να προκύψει ένα «τέλειο» τετράγωνο στο αριστερό μέλος.

Δηλαδή

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x = -4\alpha\gamma$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$(2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$2\alpha x + \beta = \pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}, \quad \text{εφόσον } \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0.$$

Έτσι προκύπτει ότι:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

**Σχόλιο:** Η απλότητα της μεθόδου των Ινδών χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι το κλάσμα δεν εμφανίζεται. παρά μόνο στο τελευταίο βήμα.

### Μέθοδος του Vieta

Η εξίσωση 2ου βαθμού

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$  μπορεί να λυθεί ευκολότερα, αν δεν περιέχει τον πρωτοβάθμιο όρο  $\beta x$ , πράγμα που μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με την αντικατάσταση

$$x = y - \frac{\beta}{2\alpha} \quad (1)$$

Τότε η εξίσωση γίνεται:  $\alpha \left( y - \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \beta \left( y - \frac{\beta}{2\alpha} \right) + \gamma = 0$

η οποία όταν απλοποιηθεί γίνεται:  $\alpha y^2 + \frac{-\beta + 4\alpha\gamma}{4\alpha} = 0$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι  $y = \frac{\pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

εφόσον  $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$

Για να βρούμε τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης αντικαθιστούμε την παραπάνω τιμή του  $y$  στην (1) και

$$\text{έχουμε: } x = y - \frac{\beta}{2\alpha} = \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha}$$

$$\text{Οπότε } x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

**Σχόλιο:** Η μέθοδος αυτή του Vieta είναι ενδιαφέρουσα, γιατί είναι ο προάγγελος της τεχνικής για την επίλυση της γενικής τριτοβάθμιας καθώς και της διτετράγωνης εξίσωσης. Για παράδειγμα, το πρώτο βήμα στην επίλυση της εξίσωσης  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ,

είναι η αντικατάσταση  $x = y - \frac{\beta}{3\alpha}$  που απαλλάσσει την

εξίσωση από το δευτεροβάθμιο όρο.

### Μέθοδος του Harriot

Ο μαθηματικός Thomas Harriot (1560-1621) εφάρμοσε τη μέθοδο της παραγοντοποίησης, για να βρει τις λύσεις μιας εξίσωσης 2ου βαθμού, στο μεγάλο έργο του για την άλγεβρα «Artis Analytical Praxis». Η τεχνική του είναι η εξής περίπτωση:

Υποθέτουμε ότι  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$ax^2 + bx + \gamma = 0, \alpha \neq 0 \quad (1).$$

Σχηματίζουμε τώρα μία εξίσωση με ρίζες  $x_1$  και  $x_2$ . Αυτή είναι η  $(x - x_1)(x - x_2) = 0$  ή, ισοδύναμα, η

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \quad (2)$$

Με διαίρεση των μελών της (1) με  $\alpha \neq 0$ , βρίσκουμε:

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \quad (3)$$

Επειδή οι εξισώσεις (2) και (3) είναι ίδιες, οι αντίστοιχοι συντελεστές πρέπει να είναι ίσοι. Επομένως:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (4)$$

Η ταυτότητα  $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$  σε

συνδυασμό με την (4) δίνει  $x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha}$   
[εφόσον  $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$ ] (5)

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) έχουμε:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

**Σχόλιο:** Είναι αρκετό να θεωρήσουμε μόνο τη θετική τετραγωνική ρίζα της (5). Η αρνητική ρίζα απλώς εναλλάσσει τη διάταξη των  $x_1$  και  $x_2$ .

# 4

## ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

### 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

#### Οι ανισώσεις: $ax + \beta > 0$ και $ax + \beta < 0$

Γνωρίσαμε στο Γυμνάσιο τη διαδικασία επίλυσης μιας ανίσωσης της μορφής  $ax + \beta > 0$  ή της μορφής  $ax + \beta < 0$ , με  $a$  και  $\beta$  συγκεκριμένους αριθμούς. Γενικότερα έχουμε:

$$\begin{aligned}ax + \beta > 0 &\Leftrightarrow ax + \beta - \beta > -\beta \\ &\Leftrightarrow ax > -\beta\end{aligned}$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

• Αν  $a > 0$ , τότε:

$$\begin{aligned}ax > -\beta &\Leftrightarrow \frac{ax}{a} > \frac{-\beta}{a} \\ &\Leftrightarrow x > \frac{-\beta}{a}\end{aligned}$$

• Αν  $a < 0$ , τότε:

$$\begin{aligned}ax > -\beta &\Leftrightarrow \frac{ax}{a} < \frac{-\beta}{a} \\ &\Leftrightarrow x < \frac{-\beta}{a}\end{aligned}$$

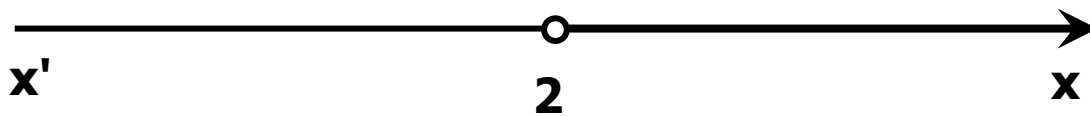
- Αν  $a = 0$ , τότε η ανίσωση γίνεται  $0x > -\beta$ , η οποία
  - ✓ αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αν είναι  $\beta > 0$ , ενώ
  - ✓ είναι αδύνατη, αν είναι  $\beta < 0$ .

Για παράδειγμα:

- Η ανίσωση  $4x > 8$  γράφεται:

$$4x > 8 \Leftrightarrow x > \frac{8}{4} \Leftrightarrow x > 2$$

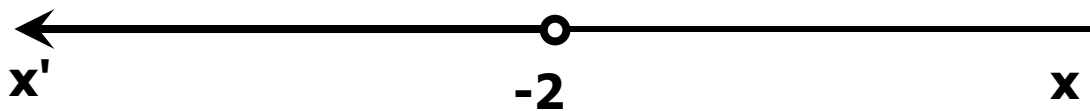
Επομένως η ανίσωση αυτή αληθεύει για  $x \in (2, +\infty)$



- Η ανίσωση  $-4x > 8$  γράφεται:

$$-4x > 8 \Leftrightarrow x < -\frac{8}{4} \Leftrightarrow x < -2$$

Επομένως η ανίσωση αυτή αληθεύει για  $x \in (-\infty, -2)$ .



- Η ανίσωση  $0x > -2$  αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ενώ η ανίσωση  $0x > 2$  είναι αδύνατη.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

- i) Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$2(x + 4) - (x + 6) < 12 - x \quad \text{και}$$

$$2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} \geq 2(1 + x)$$

- ii) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων.

## ΛΥΣΗ

- i) Για την πρώτη ανίσωση έχουμε:

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x < 5$ .

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε:

$$\begin{aligned}
2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} &\geq 2(1+x) \Leftrightarrow 12x + x + 10 \geq 12(1+x) \\
&\Leftrightarrow 2x - x + x < 12 + 6 - 8 \\
&\Leftrightarrow 2x < 10 \\
&\Leftrightarrow \frac{2x}{2} < \frac{10}{2} \\
&\Leftrightarrow x < 5.
\end{aligned}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x \geq 2$ .

ii) Επειδή η πρώτη ανίσωση αληθεύει για  $x < 5$  και η δεύτερη για  $x \geq 2$ , οι ανισώσεις συναληθεύουν για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  με  $2 \leq x < 5$ , δηλαδή οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν  $x \in [2, 5)$ .

Για τον προσδιορισμό των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων μας διευκολύνει να παραστήσουμε τις λύσεις τους στον ίδιο άξονα (Σχήμα), απ' όπου προκύπτει ότι  $2 \leq x < 5$



## Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής και της έννοιας της απόστασης δύο αριθμών, μπορούμε να επιλύουμε ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές. Στη συνέχεια θα δούμε μερικά παραδείγματα επίλυσης τέτοιων ανισώσεων.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί η ανίσωση:  $|x - 2| < 3$ .

#### ΛΥΣΗ

Η επίλυση της ανίσωσης  $|x - 2| < 3$ , με τη βοήθεια της ιδιότητας

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} |x - 2| < 3 &\Leftrightarrow 2 - 3 < x < 2 + 3 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 5 \end{aligned}$$

Μπορούμε όμως να λύσουμε την παραπάνω ανίσωση και με τη βοήθεια της ιδιότητας

$$|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$$

ως εξής:

$$\begin{aligned} |x - 2| < 3 &\Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \\ &\Leftrightarrow -3 + 2 < x - 2 + 2 < 3 + 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 5. \end{aligned}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για  $x \in (-1, 5)$ .

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η ανίσωση:  $|2x - 1| > 5$

#### ΛΥΣΗ

Από την ιδιότητα  $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho$  ή  $x > \rho$  έχουμε :

$$\begin{aligned} |2x - 1| > 5 &\Leftrightarrow 2x - 1 < -5 \text{ ή } 2x - 1 > 5 \\ &\Leftrightarrow 2x < -4 \text{ ή } 2x > 6 \\ &\Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 3 \end{aligned}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για  $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ .



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i)  $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6}$

ii)  $\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x$

iii)  $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$ .

2. Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

$$3x - 1 < x + 5 \text{ και } 2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}.$$

3. Να εξετάσετε αν συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1 \text{ και } x - \frac{1}{3} \leq \frac{x}{3} - 1.$$

4. Να βρείτε τα  $x \in \mathbb{Z}$  για τα οποία συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$2x - \frac{x-1}{8} > x \text{ και } x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0.$$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i)  $|x| < 3$

ii)  $|x - 1| \leq 4$

iii)  $|2x + 1| < 5.$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i)  $|x| \geq 3$

ii)  $|x - 1| > 4$

iii)  $|2x + 1| \geq 5.$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i)  $|2x - 6| = 2x - 6$

ii)  $|3x - 1| = 1 - 3x.$

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i)  $\frac{|x-1|-4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x-1|}{3}$

ii)  $\frac{|x|+1}{2} - \frac{2|x|}{3} > \frac{1-|x|}{3}$

9. Να λύσετε την ανίσωση  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 5.$

10. Να βρείτε την ανίσωση της μορφής  $|x - x_0| < \rho$ , που έχει ως λύσεις τους αριθμούς του διαστήματος  $(-7,3)$ .

11. Η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Κελσίου ( $^{\circ}\text{C}$ ) με τους βαθμούς Φαρενάϊτ ( $^{\circ}\text{F}$ ) είναι η  $F = \frac{9}{5}C + 32.$

Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από  $41^{\circ}\text{F}$  μέχρι  $50^{\circ}\text{F}$ . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε  $^{\circ}\text{C}$ .

## **B' ΟΜΑΔΑΣ**

1. Να βρείτε τις τιμές  $x$  για τις οποίες ισχύει:

i)  $3 \leq 4x - 1 \leq 6$

ii)  $-4 \leq 2 - 3x \leq -2.$

2. Να βρείτε τις τιμές  $x$  για τις οποίες ισχύει:

i)  $2 \leq |x| \leq 4$

ii)  $2 \leq |x - 5| \leq 4.$

- 3. Έστω A και B τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς -3 και 5 και M το μέσο του τμήματος AB.**
- i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο M;**
  - ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης  $|x - 5| \leq |x + 3|$  και να βρείτε τις λύσεις της.**
  - iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας.**
- 4. Έστω A και B τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς 1 και 7 και M το μέσο του τμήματος AB.**
- i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο M;**
  - ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης  $|x - 1| + |x - 7| = 6$  και να βρείτε τις λύσεις της.**
  - iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας, αφού προηγουμένως συντάξετε πίνακα προσήμου των παραστάσεων  $x - 1$  και  $x - 7$ .**

## 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

### Μορφές τριωνύμου

Η παράσταση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $\alpha \neq 0$  λέγεται **τριώνυμο 2ου βαθμού** ή, πιο απλά, **τριώνυμο**. Η διακρίνουσα  $\Delta$  της αντίστοιχης εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  λέγεται και **διακρίνουσα του τριωνύμου**. Οι ρίζες της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , δηλαδή οι

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

ονομάζονται και **ρίζες του τριωνύμου**.

Το τριώνυμο  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $\alpha \neq 0$  μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left( x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \\ &= \alpha \left[ x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} + \left( \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left( \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \right] \\ &= \alpha \left[ \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \right] \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[ \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right] \quad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta > 0$ . Τότε  $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ , οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left[ \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right)^2 \right] \\
&= \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \\
&= \alpha \left[ x - \left( \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \right] \left[ x - \left( \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \right]
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2),$$

όπου  $x_1, x_2$  οι ρίζες του τριωνύμου.

Άρα, όταν  $\Delta > 0$ , τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του  $\alpha$  επί δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες.

•  $\Delta = 0$ . Τότε από την ισότητα (1) έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$$

Άρα, όταν  $\Delta = 0$ , τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του  $\alpha$  επί ένα τέλειο τετράγωνο.

•  $\Delta < 0$ . Τότε ισχύει  $|\Delta| = -\Delta$ , οπότε έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[ \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right]$$

Επειδή για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική, το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα για τις μορφές του τριωνύμου  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $\alpha \neq 0$  με διακρίνουσα  $\Delta$  έχουμε:

- Αν  $\Delta > 0$ , τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2),$$

όπου  $x_1, x_2$  οι ρίζες του τριωνύμου.

- Αν  $\Delta = 0$ , τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$$

- Αν  $\Delta < 0$ , τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[ \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right]$$

Για παράδειγμα:

✓ Το τριώνυμο  $2x^2 + 3x - 2$  έχει  $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$  και

ρίζες  $x_1 = \frac{1}{2}$  και  $x_2 = -2$ . Επομένως:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2 \left( x - \frac{1}{2} \right) (x + 2) = (2x - 1)(x + 2).$$

✓ Το τριώνυμο  $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$  έχει  $\Delta = 9 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = 0$

και  $\frac{\beta}{2\alpha} = -3$ .

Επομένως:

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(x-3)^2.$$

✓ Το τριώνυμο  $2x^2 - 6x + 5$  έχει  $\Delta = -4 < 0$ . Επομένως:

$$2x^2 - 6x + 5 = 2 \left[ \left( x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right].$$

### Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

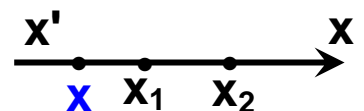
Για να μελετήσουμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου  $ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$ , θα χρησιμοποιήσουμε τις μορφές του ανάλογα με τη διακρίνουσα.

• Αν  $\Delta > 0$ , τότε, όπως είδαμε προηγουμένως, ισχύει:

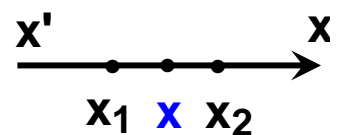
$$ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (1).$$

Υποθέτουμε ότι  $x_1 < x_2$  και τοποθετούμε τις ρίζες σε έναν άξονα.

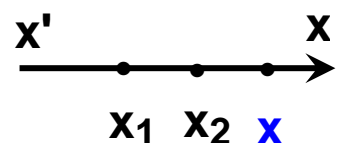
✓ Αν  $x < x_1 < x_2$  (Σχήμα), τότε  $x - x_1 < 0$   
και  $x - x_2 < 0$ , οπότε  $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ .  
Επομένως, λόγω της (1), το  
τριώνυμο είναι ομόσημο του  $a$ .



✓ Αν  $x_1 < x < x_2$  (Σχήμα), τότε  $x - x_1 > 0$   
και  $x - x_2 < 0$ , οπότε  $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ .  
Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο  
είναι ετερόσημο του  $a$ .



✓ Αν  $x_1 < x_2 < x$  (Σχήμα), τότε  $x - x_1 > 0$   
και  $x - x_2 > 0$ , οπότε  $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ .  
Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο  
είναι ομόσημο του  $a$ .



- Αν  $\Delta = 0$ , τότε ισχύει:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$$

Επομένως, το τριώνυμο είναι ομόσημο του  $\alpha$  για κάθε

πραγματικό  $x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$ , ενώ μηδενίζεται για  $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

- Αν  $\Delta < 0$ , τότε ισχύει:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[ \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right]$$

Όμως η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ . Επομένως το τριώνυμο είναι ομόσημο του  $\alpha$  σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα:

Το τριώνυμο  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $\alpha \neq 0$  γίνεται:

- **Ετερόσημο** του  $\alpha$ , μόνο όταν είναι  $\Delta > 0$  και για τις τιμές του  $x$ , που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.
- **Μηδέν**, όταν η τιμή του  $x$  είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- **Ομόσημο** του  $\alpha$  σε κάθε άλλη περίπτωση.



## Ανισώσεις της μορφής $ax^2 + bx + \gamma > 0$ ή $ax^2 + bx + \gamma < 0$

Τα προηγούμενα συμπεράσματα χρησιμοποιούνται στην επίλυση ανισώσεων της μορφής  $ax^2 + bx + \gamma > 0$  ή  $ax^2 + bx + \gamma < 0$ ,  $a \neq 0$ , τις οποίες ονομάζουμε **ανισώσεις δευτέρου βαθμού**. Ο τρόπος επίλυσης αυτών φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθούν οι ανισώσεις

i)  $2x^2 - 3x - 2 > 0$  ii)  $2x^2 - 3x - 2 < 0$

### ΛΥΣΗ

Ζητάμε τις τιμές του  $x$ , για τις οποίες το τριώνυμο  $2x^2 - 3x - 2$  είναι θετικό στην περίπτωση (i) και αρνητικό στην περίπτωση (ii).

Το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς  $-\frac{1}{2}$  και  $2$  και,

επειδή  $a = 2 > 0$ , το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

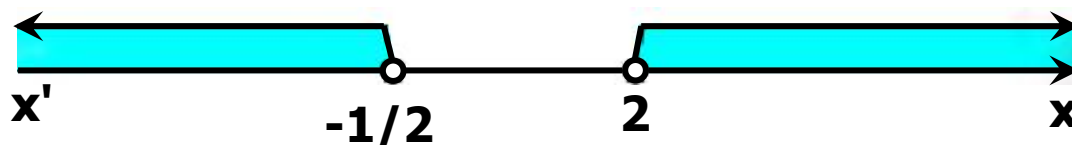
$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$2$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι:

i) Η ανίσωση  $2x^2 - 3x - 2 > 0$  έχει λύσεις τα για  $x \in \mathbb{R}$  τα οποία ισχύει

$$x < -\frac{1}{2} \text{ ή } x > 2, \text{ δηλαδή τα } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$$

Οι λύσεις αυτές εμποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ii) Η ανίσωση  $2x^2 - 3x - 2 < 0$  έχει λύσεις τα  $x \in \mathbb{R}$  για τα

$$\text{οποία ισχύει } -\frac{1}{2} < x < 2 \text{ δηλαδή τα } x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

Οι λύσεις αυτές εμποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20

Να λυθεί η ανίσωση  $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$ .

### ΛΥΣΗ

Ζητάμε τις τιμές του  $x$ , που είναι λύσεις της ανίσωσης  $2x^2 - 3x - 2 < 0$  ή ρίζες της εξίσωσης  $2x^2 - 3x - 2 = 0$ .

Επομένως σύμφωνα με το 1ο παράδειγμα οι λύσεις της

ανίσωσης  $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$  είναι τα  $x \in \mathbb{R}$ , με  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

δηλαδή τα  $x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$  Οι λύσεις αυτές

εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Να λυθούν οι ανισώσεις

i)  $x^2 - 2x + 1 > 0$

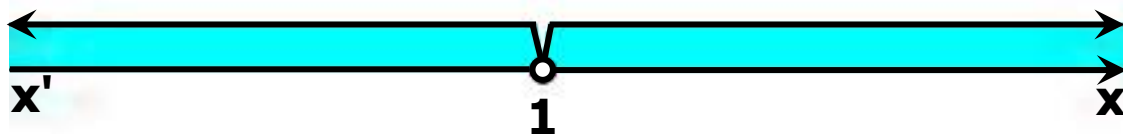
ii)  $x^2 - 2x + 1 < 0$

### ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα του τριωνύμου  $x^2 - 2x + 1$  είναι  $\Delta = 0$ , οπότε έχει διπλή ρίζα την  $x = 1$ . Άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του  $\alpha = 1$ , δηλαδή θετικό, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με  $x \neq 1$ .

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης (i) είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί  $x$ , με  $x \neq 1$ , ενώ η ανίσωση (ii) είναι αδύνατη.

Οι λύσεις της (i) εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο

Να λυθεί η ανίσωση  $x^2 + x + 1 > 0$

### ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα του τριωνύμου  $x^2 + x + 1$  είναι  $\Delta = -3 < 0$ , οπότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του  $\alpha = 1$ , δηλαδή θετικό, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1η** Να βρεθούν οι τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

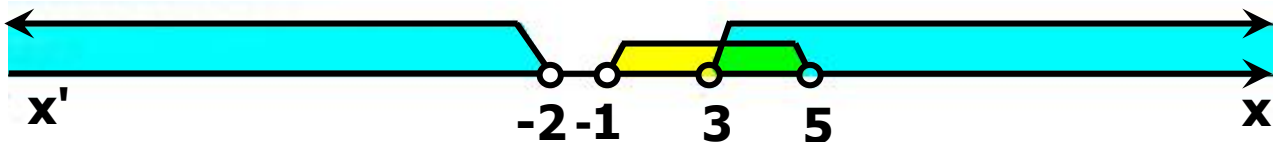
$$x^2 - 4x - 5 < 0 \text{ και } x^2 - x - 6 > 0.$$

### ΛΥΣΗ

Λύνουμε κάθε ανίσωση χωριστά και μετά βρίσκουμε τις κοινές λύσεις Έχουμε:

$$\checkmark x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 5$$

$$\checkmark x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 3$$



Άρα οι ανισώσεις συναληθεύουν για  $x \in (3, 5)$ .

**2η** Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha + 4 = 0, \alpha \in \mathbb{R}$$

- i) Να βρεθεί η διακρίνουσα της εξίσωσης και να μελετηθεί το πρόσημό της.
- ii) Για ποιες τιμές του  $\alpha$  η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες;
- iii) Για ποιες τιμές του  $\alpha$  η εξίσωση έχει διπλή ρίζα;
- iv) Για ποιες τιμές του  $\alpha$  η εξίσωση είναι αδύνατη στο  $\mathbb{R}$ ;

### ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$\Delta = [-(\alpha + 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\alpha + 4) = \alpha^2 - 2\alpha - 15.$$

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα είναι ένα τριώνυμο του  $\alpha$  με διακρίνουσα

$$\Delta' = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 > 0.$$

Επομένως η διακρίνουσα  $\Delta$  έχει ρίζες:

$$\alpha_1 = \frac{2+8}{2} = 5 \text{ και } \alpha_2 = \frac{2-8}{2} = -3$$

και το πρόσημό της φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

$\alpha$	$-\infty$	$-3$	$2$	$+\infty$
$\Delta$	$+$	$0$	$-$	$+$

Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι:

- ii) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες αν  $\Delta > 0$ , δηλαδή αν  $\alpha < -3$  ή  $\alpha > 5$ .
- iii) Η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα αν  $\Delta = 0$ , δηλαδή αν  $\alpha = -3$  ή  $\alpha = 5$ .
- iv) Η εξίσωση είναι αδύνατη αν  $\Delta < 0$ , δηλαδή  $-3 < \alpha < 5$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα:

i)  $x^2 - 3x + 2$       ii)  $2x^2 - 3x - 2$ .

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i)  $\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$       ii)  $\frac{2x^2 + 8x - 42}{x^2 - 49}$

iii)  $\frac{4x^2 - 12x + 9}{2x^2 - 5x + 3}$

3. Για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:  
i)  $x^2 - 2x - 15$     ii)  $4x^2 - 4x + 1$     iii)  $x^2 - 4x + 13$ .
4. Για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:  
i)  $-x^2 + 4x - 3$     ii)  $-9x^2 + 6x - 1$     iii)  $-x^2 + 2x - 2$ .
5. Να λύσετε τις ανισώσεις:  
i)  $5x^2 \leq 20x$     ii)  $x^2 + 3x \leq 4$ .
6. Να λύσετε τις ανισώσεις:  
i)  $x^2 - x - 2 > 0$     ii)  $2x^2 - 3x - 5 < 0$ .
7. Να λύσετε τις ανισώσεις:  
i)  $x^2 + 4 > 4x$     ii)  $x^2 + 9 \leq 6x$ .
8. Να λύσετε τις ανισώσεις:  
i)  $x^2 + 3x + 5 < 0$     ii)  $2x^2 - 3x + 20 > 0$ .
9. Να λύσετε την ανίσωση  $-\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) > 0$
10. Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει:  
 $2x - 1 < x^2 - 4 < 12$ .
11. Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις  $x^2 - 6x + 5 < 0$  και  $x^2 - 5x + 6 > 0$ .

## **Β' ΟΜΑΔΑΣ**

1. i) Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τις παραστάσεις:

$$\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 \text{ και } \alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2.$$

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση  $\frac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2}$

2. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

$$2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta.$$

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $\frac{x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta}{x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2}$

4. Δίνεται η εξίσωση  $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες η εξίσωση:

i) έχει ρίζες ίσες      ii) έχει ρίζες άνισες

iii) είναι αδύνατη.

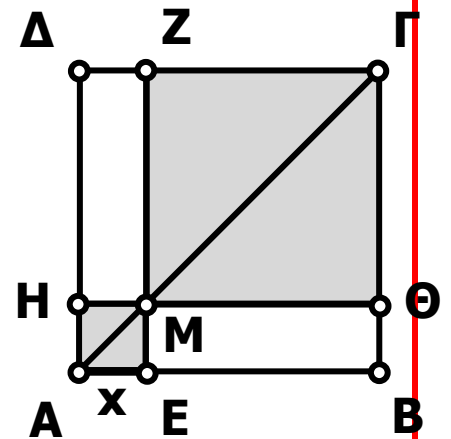
5. Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η ανίσωση  $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$  αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

6. Δίνεται το τριώνυμο  $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda$ ,  $\lambda \neq -2$ .

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα  $\Delta$  του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση  $\Delta < 0$ .

ii) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες η ανίσωση  $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0$ ,  $\lambda \neq -2$  αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

7. Στο διπλανό σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο πλευράς  $AB = 3$  και το  $M$  είναι ένα σημείο της διαγωνίου  $A\Gamma$ . Να βρείτε τις θέσεις του σημείου  $M$  πάνω στη διαγώνιο  $A\Gamma$  για τις οποίες το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων είναι μικρότερο από 5.



8. i) Να αποδείξετε ότι  $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 > 0$  για όλα τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha, \beta \neq 0$ .

ii) Να καθορίσετε το πρόσημο της παράσταση

$$A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 \text{ για τις διάφορες τιμές των } \alpha, \beta \neq 0.$$

## 4.3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ

### Πρόσημο γινομένου

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο  $P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x)$  ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες  $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$  είναι της μορφής  $ax + \beta$  (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής  $ax^2 + \beta x + \gamma$  (τριώνυμα). Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του  $P(x)$ , όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  το πρόσημο του γινομένου  $P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1)$ .



## ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα χωριστά ως εξής:

✓ Επειδή

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1,$$

το  $x - 1$  είναι θετικό για  $x > 1$ , μηδέν για  $x = 1$  και αρνητικό για  $x < 1$ .

✓ Επειδή

$$x^2 + x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 2,$$

το  $x^2 + x - 6$  είναι θετικό για  $x < -3$  και για  $x > 2$ , μηδέν για  $x = -3$  και για  $x = 2$  και αρνητικό για  $-3 < x < 2$ .

✓ Επειδή το  $2x^2 + x + 1$  έχει διακρίνουσα

$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ , το τριώνυμο αυτό είναι θετικό για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Ο προσδιορισμός, τώρα, του προσήμου του γινομένου  $P(x)$  γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα, εφαρμόζοντας τον κανόνα των προσήμων.

$x$	$-\infty$	$-3$	$1$	$2$	$+\infty$	
$x - 1$	-		- 0		+	
$x^2 + x - 6$	+	0	-	- 0	+	
$2x^2 + x + 1$	+		+		+	
$P(x)$	-	0	+	0	- 0	+

Ωστε το γινόμενο  $P(x)$  είναι θετικό για  $-3 < x < 1$  και για  $x > 2$ , ενώ είναι αρνητικό για  $x < -3$  και για  $1 < x < 2$ . Τέλος είναι μηδέν για  $x = -3$ , για  $x = 1$  και για  $x = 2$ .

## Ανισώσεις της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ ( $< 0$ )

Άμεση εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής  $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$  ( $< 0$ ), όπως είναι για παράδειγμα η ανίσωση

$$(x - 1)(x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1) < 0$$

Προκειμένου να λύσουμε την ανίσωση αυτή αρκεί να βρούμε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες το γινόμενο  $P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1)$  είναι αρνητικό.

Από την πρώτη και την τελευταία γραμμή του πίνακα προσήμου του  $P(x)$  διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν  $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$ .

## Ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ( $< 0$ )

Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Επομένως:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0 \text{ και}$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) < 0$$

αφού, καμία από τις λύσεις της  $A(x) \cdot B(x) > 0$  και της  $A(x) \cdot B(x) < 0$  δεν μηδενίζει το  $B(x)$ .

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση

$$\frac{(x - 1)(2x^2 + x + 1)}{x^2 + x - 6} > 0$$

Η ανίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$(x - 1)(x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1) > 0,$$

δηλαδή με την  $P(x) > 0$ , η οποία, από τον πίνακα προσήμου του  $P(x)$  αληθεύει όταν  $x \in (-3, 1) \cup (2, +\infty)$ .

## ΣΧΟΛΙΟ

Μία ανίσωση της μορφής  $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$  αληθεύει για

εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως

$$A(x) \cdot B(x) > 0 \text{ και } B(x) \neq 0.$$

Έστω για παράδειγμα η ανίσωση  $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x - 4} \geq 0$ .

Έχουμε:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x - 4} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 3x - 4) \geq 0$$

και  $x^2 + 3x - 4 \neq 0$ .

Οι ρίζες του τριωνύμου  $x^2 - 4x + 3$  είναι οι 1 και 3, ενώ του τριωνύμου  $x^2 + 3x - 4$  είναι οι 1 και -4.

Συντάσσουμε τον πίνακα προσήμου του γινομένου:

$$P(x) = (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 3x - 4)$$

x	$-\infty$	-4	1	3	$+\infty$			
$x^2 - 4x + 3$		+		+	0	-	0	+
$x^2 + 3x - 4$		+	0	-	0	+		+
P(x)		+		-		-		+

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν  $x \in (-\infty, -4) \cup [3, +\infty)$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (2 - 3x)(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1).$$

2. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (-x^2 + 4)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1).$$

3. Να λύσετε την ανίσωση  $(x - 1)(x^2 + 2)(x^2 - 9) > 0$ .

4. Να λύσετε την ανίσωση  $(3 - x)(2x^2 + 6x)(x^2 + 3) \leq 0$ .

5. Να λύσετε την ανίσωση  $(2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1) \leq 0$ .

6. Να λύσετε την ανίσωση

$$(x - 3)(2x^2 + x - 3)(x - 1 - 2x^2) > 0.$$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i) } \frac{x-2}{x+1} > 0 \quad \text{ii) } \frac{2x+1}{x-3} \leq 0$$

8. Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \leq 0$

## B' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i) } \frac{2x+3}{x-1} > 4 \quad \text{ii) } \frac{x-2}{3x+5} \leq 4$$

2. Να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{x^2 - 3x - 10}{x - 1} + 2 \leq 0$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i) } \frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1} \quad \text{ii) } \frac{x}{2x-1} \geq \frac{3}{x+2}$$

4. Να λύσετε την ανίσωση  $\left| \frac{x+1}{x} \right| > 2$

5. Μία εταιρεία παράγει ηλεκτρικούς λαμπτήρες. Για ένα συγκεκριμένο τύπο λαμπτήρων το τμήμα έρευνας αγοράς της εταιρείας εκτιμά ότι αν η τιμή πώλησης των λαμπτήρων είναι  $x$  ευρώ ανά λαμπτήρα, τότε το εβδομαδιαίο κόστος  $K$  και τα αντίστοιχα έσοδα  $E$  (σε

χιλιάδες ευρώ) δίνονται από τους τύπους  $K = 7 - x$  και  $E = 5x - x^2$ . Να βρείτε τις τιμές πώλησης των λαμπτήρων για τις οποίες η εταιρεία έχει κέρδος.

6. Ένα φάρμακο είναι αποτελεσματικό αν η συγκέντρωσή του στο κυκλοφορικό σύστημα υπερβαίνει μία ορισμένη τιμή, που καλείται ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο. Υποθέτουμε ότι η συγκέντρωση  $\sigma$  ενός φαρμάκου,  $t$  ώρες ύστερα από τη λήψη του, δίνεται

από τον τύπο  $\sigma = \frac{20t}{t^2 + 4} \text{ mgr / lt}$ . Αν για το συγκεκρι-

μένο φάρμακο το ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο είναι  $4 \text{ mgr / lt}$ , να βρείτε πότε η συγκέντρωσή του θα ξεπεράσει το επίπεδο  $\sigma$ .

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν η ανίσωση  $-x^2 + 2x + \gamma > 0$  είναι αδύνατη τότε:  
A)  $\gamma > -1$     B)  $\gamma = -1$     Γ)  $\gamma < -1$     Δ)  $\gamma \geq -1$ .

2. Αν η ανίσωση  $x^2 - 2x + \gamma > 0$  αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε:  
A)  $\gamma < 1$     B)  $\gamma = 1$     Γ)  $\gamma > 1$     Δ)  $\gamma \leq 1$ .

3. Αν η ανίσωση  $-2x^2 + 3\lambda x - \lambda^2 \leq 0$  αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε:  
A)  $\lambda > 0$     B)  $\lambda < 0$     Γ)  $\lambda = 1$     Δ)  $\lambda = 0$ .

4. Η εξίσωση  $|x - 1| + |x - 5| = 4$  αληθεύει αν και μόνο αν:  
 Α)  $x < 1$       Β)  $x > 5$       Γ)  $1 \leq x \leq 5$       Δ)  $1 < x < 5$ .

5. Η εξίσωση  $|x - 1| = x - 1$ :  
 Α) Είναι αδύνατη      Β) Έχει μοναδική λύση τη  $x = 1$   
 Γ) Έχει άπειρες λύσεις      Δ) Είναι ταυτότητα.

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1.	Η ανίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda^2 > 0$ με $\lambda \neq 0$ , αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ .	A	Ψ
2.	Η ανίσωση $\lambda^2 x^2 + 4\lambda x + 5 \leq 0$ με $\lambda \neq 0$ , αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ είναι αδύνατη.	A	Ψ
3.	Οι ανισώσεις $x^2(x - 1) \geq 0$ και $x - 1 > 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	A	Ψ
4.	Οι ανισώσεις $x^2(x - 1) \leq 0$ και $x - 1 \leq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	A	Ψ
5.	Οι ανισώσεις $\frac{2x - 1}{x + 1} > 1$ και $2x - 1 > x + 1$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	A	Ψ
6.	Οι ανισώσεις $\frac{x - 1}{(x - 2)^2} \geq 0$ και $x - 1 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	A	Ψ

7.	Οι ανισώσεις $\frac{x-1}{(x-2)^2} \geq 0$ και $(x-1)(x-2)^2 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	A	Ψ
8.	Οι ανισώσεις $\frac{x-2}{x-1} \geq 0$ και $(x-2)(x-1) \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	A	Ψ
9.	Οι ανισώσεις $\frac{x-2}{x-1} < 0$ και $(x-2)(x-1) < 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	A	Ψ
10.	Οι ανισώσεις $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x+2}{x+1}$ και $(x+1)^2 < (x-1)(x+1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	A	Ψ

**III. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα τριώνυμα της Α' ομάδας με την ισοδύναμη μορφή του από τη Β' ομάδα.**

Α' ΟΜΑΔΑ	
1	$-2x^2 + 6x - 4$
2	$x^2 - 3x + 2$
3	$-x^2 + 3x - 2$
4	$2x^2 - 6x + 4$

Β' ΟΜΑΔΑ	
A	$(x-1)(x-2)$
B	$-(x-1)(x-2)$
Γ	$2(x-1)(x-2)$
Δ	$-2(x-1)(x-2)$



**IV. Να εντοπίσετε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:**

1. Η ανίσωση  $(2x - 6)(x - 1) > 0$  γράφεται ισοδύναμα:  
 $(2x - 6)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow 2x - 6 > 0$  και  $x - 1 > 0$   
 $\Leftrightarrow x > 3$  και  $x > 1 \Leftrightarrow x > 3.$

Όμως ο αριθμός 0, αν και είναι μικρότερος του 3, επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

2. Η ανίσωση  $x < \frac{4}{x}$  γράφεται ισοδύναμα:

$$x < \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Όμως ο αριθμός -1, αν και είναι μεταξύ του -2 και του 2, δεν επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

3. Η ανίσωση  $(x + 2)^2 (x - 1) \geq 0$  γράφεται ισοδύναμα:  
 $(x + 2)^2 (x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$

Όμως ο αριθμός -2, αν και είναι μικρότερος του 1, επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

# 5

## ΠΡΟΟΔΟΙ

### 5.1 Ακολουθίες

---

#### Η έννοια της ακολουθίας

Ας υποθέσουμε ότι καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο 10000 ευρώ με ανατοκισμό ανά έτος και με επιτόκιο 2%. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα χρόνο οι τόκοι που θα αποδώσει το κεφάλαιο προστίθενται σε αυτό και το ποσό που προκύπτει ξανατοκίζεται για τον επόμενο χρόνο με το ίδιο επιτόκιο. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί όσα χρόνια θέλουμε. Επομένως, το κεφάλαιο των 10000 ευρώ θα γίνει:

Σε ένα χρόνο:

$$\begin{aligned}10000 + 0,02 \cdot 10000 &= \\10000 \cdot (1 + 0,02) & \\= 10200 \text{ ευρώ} &\end{aligned}$$

Σε δύο χρόνια:

$$\begin{aligned}10000 \cdot 1,02 + 0,02 \cdot (10000 \cdot 1,02) &= \\= 10000 \cdot 1,02 \cdot (1 + 0,02) &= \\= 10000 \cdot (1,02)^2 &= \\= 10404 \text{ ευρώ} &\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το ποσό των 10000 ευρώ θα γίνει:

Σε 3 χρόνια  $10000(1,02)^3$  ευρώ, σε 4 χρόνια  $10000 \cdot (1,02)^4$  ευρώ κτλ. και σε  $n$  χρόνια θα γίνει  $10000(1,02)^n$  ευρώ.

Έτσι έχουμε τον πίνακα:

Χρόνια $n$	Κεφάλαιο σε $n$ χρόνια
1	$10000 \bullet 1,02$
2	$10000 \bullet (1,02)^2$
3	$10000 \bullet (1,02)^3$
...	...
$n$	$10000 \bullet (1,02)^n$
....	....

Παρατηρούμε ότι κάθε θετικός ακέραιος  $n$  αντιστοιχίζεται στον πραγματικό αριθμό  $10000 \cdot (1,02)^n$ . Η παραπάνω αντιστοίχιση ονομάζεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Γενικά ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται πρώτος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με  $a_1$ , ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται δεύτερος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με  $a_2$  κ.λ.π. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός  $n$  καλείται  $n$ -οστός ή γενικός όρος της ακολουθίας και το συμβολίζουμε συνήθως με  $a_n$ . Δηλαδή,  $1 \rightarrow a_1, 2 \rightarrow a_2, 3 \rightarrow a_3, \dots, n \rightarrow a_n, \dots$  Την ακολουθία αυτή τη συμβολίζουμε  $(a_n)$ .

Παραδείγματα.

- i. Η αντιστοίχιση  $1 \rightarrow 1^2, 2 \rightarrow 2^2, \dots, n \rightarrow n^2, \dots$  είναι η ακολουθία  $(a_n)$  πρώτο όρο  $a_1=1^2$ , δεύτερο όρο  $a_2=2^2$  κλπ. και γενικό όρο  $a_n=n^2$ .
- ii. Η ακολουθία  $(a_n)$  με γενικό όρο  $a_n = (-1)^n$  έχει όρους:  $a_1=-1, a_2=1, a_3=-1, \dots$
- iii. Η ακολουθία  $(a_n)$  με  $n$ -οστό όρο

$$a_n = \frac{1}{n}$$

έχει όρους:

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1, a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

## Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά

Στην ακολουθία  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, v^2, \dots$  ο γενικός της όρος

$a_v = v^2$  μας επιτρέπει να βρούμε τον οποιονδήποτε όρο της. Είναι π.χ.  $a_{20} = 20^2 = 400$ ,  $a_{100} = 100^2 = 10000$  κτλ.

Υπάρχουν όμως και ακολουθίες που για το γενικό τους όρο είναι δύσκολο να βρεθεί ένας μαθηματικός τύπος

Ας θεωρήσουμε π.χ. την ακολουθία  $(a_v)$ , της οποίας ο πρώτος όρος είναι το 1, ο δεύτερος όρος είναι επίσης το 1 και κάθε άλλος όρος, από τον τρίτο και μετά, είναι ίσος με το άθροισμα των δυο προηγούμενων όρων:

$$a_1=1, a_2=1, a_{v+2}= a_{v+1}+a_v$$

Έχουμε:

$$a_3=1+1=2, a_4=2+1=3, a_5=3+2=5, a_6=5+3=8, \text{ κτλ.}$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε με διαδοχικά βήματα να βρούμε τον οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία  $(a_v)$  είναι τελείως ορισμένη.

Λέμε ότι η ακολουθία  $(a_v)$  ορίζεται αναδρομικά και η ισότητα  $a_{v+2} = a_{v+1}+a_v$  λέγεται αναδρομικός τύπος της ακολουθίας. Γενικότερα, για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά, απαιτείται να γνωρίζουμε:

- i. Τον αναδρομικό της τύπο και
- ii. Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

**Σχόλιο:** Υπάρχουν ακολουθίες, για τις οποίες μέχρι τώρα δε γνωρίζουμε ούτε έναν τύπο για το γενικό τους όρο ούτε έναν αναδρομικό τύπο. Μια τέτοια ακολουθία είναι π.χ. η ακολουθία των πρώτων αριθμών:

2, 3, 5, 7, 11, 13,...

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1<sup>ο</sup> Να γράψετε τους τέσσερις πρώτους όρους και τους 20ους όρους των ακολουθιών

$$\text{i) } \alpha_v = 2v^2 - 3 \quad \text{ii) } \beta_v = \frac{(-1)^v}{2v - 1}$$

**ΛΥΣΗ**

i) Έχουμε:

$$\alpha_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 = -1, \quad \alpha_2 = 2 \cdot 2^2 - 3 = 5, \\ \alpha_3 = 2 \cdot 3^2 - 3 = 15, \quad \alpha_4 = 2 \cdot 4^2 - 3 = 29 \\ \text{και } \alpha_{20} = 2 \cdot 20^2 - 3 = 797$$

ii) Έχουμε:

$$\beta_1 = \frac{(-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = -1, \\ \beta_2 = \frac{(-1)^2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{1}{3}, \\ \beta_3 = \frac{(-1)^3}{2 \cdot 3 - 1} = -\frac{1}{5}, \\ \beta_4 = \frac{(-1)^4}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{1}{7}$$

και

$$\beta_{20} = \frac{(-1)^{20}}{2 \cdot 20 - 1} = \frac{1}{39}$$

**2<sup>ο</sup>** Δίνεται η ακολουθία με  $a_1 = 2$  και  $a_n = a_n^2 + 1$ . Να βρεθούν οι πρώτοι τέσσερις όροι της ακολουθίας

### ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$a_1=2,$$

$$a_2=a_1^2+1=2^2+1=5,$$

$$a_3=a_2^2+1=5^2+1=26,$$

$$a_4=a_3^2+1=26^2+1=677.$$

**3<sup>ο</sup>** Δίνεται η ακολουθία  $a_n = 3n+5$ . Να οριστεί η ακολουθία αυτή και αναδρομικά.

### ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= [3(n+1)+5] - (3n+5) = \\ &= 3n+3+5-3n-5 = \\ &= 3 \end{aligned}$$

Άρα  $a_{n+1}=3+a_n$  που είναι ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας. Επειδή  $a_1 = 3 \cdot 1+5 = 8$ , η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1= 8 \text{ και } a_{n+1}= 3+a_n.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

i)  $\alpha_v = 2v + 1$ , ii)  $\alpha_v = 2^v$ , iii)  $\alpha_v = v^2 + v$ ,

iv)  $\alpha_v = \frac{(v^2 - 1)}{v + 1}$ , v)  $\alpha_v = \left(-\frac{1}{10}\right)^{v-1}$ ,

vi)  $\alpha_v = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^v$ , vii)  $\alpha_v = |5 - v|$ ,

viii)  $\alpha_v = \eta\mu\left(\frac{v\pi}{4}\right)$ , ix)  $\alpha_v = \frac{2^v}{v^2}$ ,

x)  $\alpha_v = (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{v}$ , xi)  $\alpha_v = (-1)^{v+1}$ .

2. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

$$\alpha_1 = 2, \alpha_{v+1} = \frac{1}{\alpha^v}$$

$$\alpha_1 = 0, \alpha_{v+1} = \alpha_v^2 + 1$$

$$\alpha_1 = 3, \alpha_{v+1} = 2(\alpha_v - 1).$$

3. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες:

i)  $\alpha_v = v + 5$ , ii)  $\alpha_v = 2^v$ , iii)  $\alpha_v = 2^v - 1$ ,

iv)  $\alpha_v = 5v + 3$ .

4. Να βρείτε το  $v$ -οστό όρο των ακολουθιών:

i)  $\alpha_1 = 1, \alpha_{v+1} = \alpha_v + 2$ ,

ii)  $\alpha_1 = 3, \alpha_{v+1} = 5\alpha_v$ .



## 5.2 Αριθμητική Πρόοδος

-Στην ακολουθία 1, 3, 5, 7,... των περιττών αριθμών, κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{v+1} = \alpha_v + 2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{v+1} - \alpha_v = 2$$

Η ακολουθία  $(\alpha_v)$  λέγεται αριθμητική πρόοδος με διαφορά 2.

-Στην ακολουθία 15, 10, 5, 0, -5, -10,... κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού -5. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{v+1} = \alpha_v - 5 \quad \text{ή} \quad \alpha_{v+1} - \alpha_v = -5$$

Όπως και προηγουμένως, η ακολουθία  $(\alpha_v)$  λέγεται αριθμητική πρόοδος με διαφορά -5.

Γενικότερα ορίζουμε ότι:

Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με  $\omega$  και τον λέμε διαφορά της προόδου.

Επομένως, η ακολουθία  $(\alpha_v)$  είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά  $\omega$ , αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{v+1} = \alpha_v + \omega} \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha_{v+1} - \alpha_v = \omega}$$

Αν σε μια αριθμητική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της  $\alpha_1$  και τη διαφορά της  $\omega$  τότε ο αναδρομικός

της τύπος  $a_{v+1} = a_v + \omega$  μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της.

Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε κατευθείαν το  $v_0 =$  όρο  $a_v$  μιας αριθμητικής προόδου ως συνάρτηση των  $a_1$ ,  $\omega$  και  $v$  ως εξής: Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + \omega$$

$$a_3 = a_2 + \omega$$

$$a_4 = a_3 + \omega$$

.....

$$a_{v-1} = a_{v-2} + \omega$$

$$a_v = a_{v-1} + \omega$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της  $v$  αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής βρίσκουμε

$$a_v = a_1 + (v-1)\omega$$

Επομένως

Ο  $v$ -οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο  $a_1$  και διαφορά  $\omega$  είναι

$$a_v = a_1 + (v-1)\omega$$

Έτσι π.χ. στην αριθμητική πρόοδο 3, 5, 7, 9 ... η οποία έχει

$$a_1 = 3 \text{ και } \omega = 5 - 3 = 2,$$

$$\text{ο } v\text{-οστός όρος της είναι } a_v = 3 + (v-1) \cdot 2.$$

Επομένως ο 20ος όρος της είναι  $a_{20} = 3 + 19 \cdot 2 = 41$ , ο 100ος όρος της είναι  $a_{100} = 3 + 99 \cdot 2 = 201$  κτλ.

## Αριθμητικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά  $\omega$ , τότε ισχύει:

$$\beta - \alpha = \omega \text{ και } \gamma - \beta = \omega,$$

επομένως

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta \text{ ή}$$

$$\beta = \frac{(\alpha + \gamma)}{2}$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ισχύει

$$\beta = \frac{(\alpha + \gamma)}{2}$$

τότε έχουμε

$$2\beta = \alpha + \gamma \text{ ή } \beta - \alpha = \gamma - \beta$$

που σημαίνει ότι οι  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο  $\beta$  λέγεται αριθμητικός μέσος των  $\alpha$  και  $\gamma$ .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Τρεις αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

αν και μόνο αν ισχύει  $\beta = \frac{(\alpha + \gamma)}{2}$

## Άθροισμα $n$ διαδοχικών όρων αριθμητικής πρόοδου

Ας θεωρήσουμε την αριθμητική πρόοδο 1, 2, 3, 4,... και ας βρούμε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της  $S_{100}=1+2+3+\dots+98+99+100$

Αντί να προσθέσουμε τους αριθμούς αυτούς με τον συνήθη τρόπο, μπορούμε να βρούμε συντομότερα το άθροισμά τους ως εξής:

Γράφουμε δυο φορές το παραπάνω άθροισμα, αλλά με αντίθετη τη σειρά των προσθετέων και προσθέτουμε τις δυο ισότητες κατά μέλη:

$$S_{100} = 1+2+3+\dots+98+99+100$$

$$S_{100} = 100+99+98+\dots+3+2+1$$

---

$$2S_{100} =$$

$$(1+100)+(2+99)+(3+98)+\dots+(98+3)+(99+2)+(100+1)$$

$$\text{ή } 2S_{100} = 101+101+101+\dots+101+101+101$$

$$\text{ή } 2S_{100} = 100 \cdot 101, \text{ άρα } S_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τρόπο σε μια οποιαδήποτε αριθμητική πρόοδο, θα αποδείξουμε ότι:

Το άθροισμα των πρώτων  $n$  όρων αριθμητικής πρόοδου ( $a_n$ ) με διαφορά  $\omega$  είναι

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$S_n = \alpha_1 + (\alpha_1 + \omega) + (\alpha_1 + 2\omega) + \dots + [\alpha_1 + (n + 2)\omega] + [\alpha_1 + (n - 1)\omega]$$

$$\text{και } S_n = \alpha_n + (\alpha_n + \omega) + (\alpha_n + 2\omega) + \dots + [\alpha_n + (n + 2)\omega] + [\alpha_n + (n - 1)\omega]$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$2S_n = (\alpha_1 + \alpha_n) + (\alpha_1 + \alpha_n) + (\alpha_1 + \alpha_n) + \dots + (\alpha_n + \alpha_1) + (\alpha_n + \alpha_1)$$

$$\text{ή } 2S_n = n(\alpha_1 + \alpha_n). \text{ Άρα } S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n).$$

Επειδή  $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega$ , ο τύπος  $S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$  γράφεται:

$$S_n = \frac{n}{2}[2\alpha_1 + (n - 1)\omega]$$

---

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

---

1°

Να βρεθεί το άθροισμα  
 $7+10+13 +\dots+ 157$ .

### ΛΥΣΗ

Πρόκειται για το άθροισμα διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου με  $a_1 = 7$ ,  $a_n = 157$  και  $\omega = 3$ .

Για να το υπολογίσουμε, χρειαζόμαστε το πλήθος  $n$  των προσθετέων.

Από τον τύπο του  $n$ -οστού όρου

$$a_n = a_1 + (n-1)\omega \text{ έχουμε}$$

$$157 = 7 + (n-1)3 \Leftrightarrow$$

$$7 + (n-1)3 = 157 \Leftrightarrow$$

$$3n = 153 \Leftrightarrow n = 51$$

Επομένως το ζητούμενο άθροισμα είναι

$$S_{51} = \frac{51}{2}(7 + 157) = 4182.$$

2°

Πόσοι όροι της αριθμητικής προόδου  $52, 47, 42, \dots$  έχουν άθροισμα ίσο με  $90$ ;

### ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$a_1=52, \omega=47-52=-5 \text{ και } S_n=90$$

Επειδή

$$S_n = \frac{n}{2} [2\alpha_1 + (n-1)\omega]$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} 90 &= \frac{n}{2} [2 \cdot 52 + (n-1)(-5)] \Leftrightarrow 90 = \frac{n}{2} (109 - 5n) \\ &\Leftrightarrow 5n^2 - 109n + 180 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{9}{5} \quad \text{ή} \quad n = 20 \end{aligned}$$

Επειδή όμως  $n \in \mathbb{N}^*$ , συμπεραίνουμε ότι  $n = 20$ . Άρα 20 όροι της δοθείσης αριθμητικής προόδου έχουν άθροισμα ίσο με 90.

**3°**

Ο 10ος όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι ο 42 και ο 19ος όρος της είναι ο 87. Να υπολογισθεί το άθροισμα των πρώτων 100 όρων της προόδου αυτής.

**ΛΥΣΗ**

Από τον τύπο  $a_n = a_1 + (n-1)\omega$  έχουμε  $42 = a_1 + 9\omega$  και  $87 = a_1 + 18\omega$ . Επομένως οι  $a$  και  $\omega$  είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} \alpha_1 + 9\omega = 42 \\ \alpha_1 + 18\omega = 87 \end{cases}$$

Από την επίλυση του συστήματος αυτού βρίσκουμε ότι είναι

$$\alpha_1 = -3 \text{ και } \omega = 5.$$

$$\begin{aligned}
 S_{100} &= \frac{100}{2} [2(-3) + 99 \cdot 5] \\
 &= 50(-6 + 495) \\
 &= 24450
 \end{aligned}$$

---

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

---

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το  $n$ -οστό όρο των αριθμητικών προόδων:

i) 7,10,13,...    ii) 11,13,15,....    iii) 5,2,-1,....

iv)  $2, \frac{5}{2}, 3, \dots$ ,    v) -6,-9,-12

2. Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμιά από τις αριθμητικές προόδους:

i) Τον  $a_{15}$  της -2,3,8...    ii) Τον  $a_{20}$  της 11,18,25,...

iii) Τον  $a_{30}$  της 4,15,26,...

iv) Τον  $a_{35}$  της 17,25,33,... v) Τον  $a_{50}$  της  $1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \dots$

vi) Τον  $a_{47}$  της  $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \dots$

3. i) Αν ο 6ος όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι 12 και ο 10ος όρος είναι 16, να βρείτε τον 1ο όρο και τη διαφορά της προόδου.

ii) Ομοίως, αν είναι  $a_5 = 14$  και  $a_{12} = 42$

iii) Ομοίως, αν είναι  $a_3 = 20$  και  $a_7 = 32$ .

4. i) Ο 5ος όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι -5 και ο 15ος όρος της είναι -2. Να βρείτε τον 50ο όρο της προόδου.

ii) Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι  $a_7 = 55$  και  $a_{22} = 145$ , να βρείτε τον  $a_{18}$ .



5. i) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με  $a_1 = 2$  και  $\omega = 5$  ισούται με 97;  
ii) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με  $a_1 = 80$  και  $\omega = -3$  ισούται με -97;
6. i) Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των 10 και -40  
ii) Να βρείτε για ποια τιμή του  $x$  ο αριθμητικός μέσος των  $5x+1$  και 11 είναι ο  $3x-2$ .
7. Αν δυο αριθμοί διαφέρουν κατά 10 και ο αριθμητικός τους μέσος είναι ο 25, να βρείτε τους δυο αυτούς αριθμούς.
8. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων των αριθμητικών προόδων:
- i) 7,9,11,... ii) 0, 2, 4,..... iii) 6, 10, 14,... iv)-7,-2,+3,...
9. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 80 όρων των αριθμητικών προόδων:
- i) 2,-1,-4,...      ii)  $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \dots$

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

- i)  $1+5+9 + \dots + 197$     ii)  $9+12+15+ \dots + 90$   
iii)  $-7-10-13-\dots-109$ .

11. Πόσους πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε από καθεμιά από τις παρακάτω αριθμητικές προόδους για να έχουν άθροισμα 180;

- i) 4, 8, 12,...    ii) 5, 10, 15,...

12. Μια στέγη σχήματος τραπεζίου έχει 15 σειρές κεραμίδια. Η πρώτη σειρά έχει 53 κεραμίδια και κάθε επόμενη σειρά έχει δυο κεραμίδια λιγότερα. Πόσα κεραμίδια έχει η 15η σειρά και πόσα κεραμίδια έχει συνολικά η στέγη;

### **B' ΟΜΑΔΑΣ**

1. Ο  $n$ -οστός όρος μιας ακολουθίας είναι  $a_n = 12-4n$ . Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο της  $a_1$  και τη διαφορά της  $\omega$ .

2. Να βρείτε το άθροισμα:

- i) των πρώτων 200 περιττών αριθμών, ii) των πρώτων 300 θετικών άρτιων  
iii) όλων των περιττών αριθμών μεταξύ 16 και 380.

3. Να βρείτε το άθροισμα:

- i) των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 1 και 199,  
ii) των πολλαπλασίων του 3 μεταξύ 10 και 200.

4. Να βρείτε το άθροισμα:

i) των πρώτων 30 όρων της ακολουθίας  $a_n = 5n-4$ ,

ii) των πρώτων 40 όρων της ακολουθίας  $a_n = -5n-3$ .

5. Να βρείτε το άθροισμα των ακεραίων από 1 μέχρι 200 που δεν είναι πολλαπλάσια του 4 ή του 9.

6. Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου 1, 3, 5, 7,... που απαιτούνται, ώστε το άθροισμα του να ξεπερνάει το 4000.

7. Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα, στον οποίο τα  $a_1$ ,  $\omega$ ,  $\nu$ , αν και  $S_\nu$  ανήκουν σε κάθε γραμμή στην ίδια αριθμητική πρόοδο

$a_1$	$\omega$	$\nu$	$a_\nu$	$S_\nu$
120	-10	12		
5		27	109	
	3	12		210
	2	16	-8	

8. Ένα ρολόι χτυπάει τις ακέραιες ώρες. Πόσα χτυπήματα ακούγονται σε ένα 24/ωρο;

9. Ένα στάδιο έχει 33 σειρές καθισμάτων. Στην κάτω-κάτω σειρά βρίσκονται 800 θέσεις και στην πάνω-πάνω σειρά βρίσκονται 4160 θέσεις. Το πλήθος των θέσεων αυξάνει από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό θέσεων. Να βρείτε πόσες θέσεις έχει συνολικά το στάδιο και πόσες θέσεις έχει η μεσαία σειρά.

10. Μεταξύ των αριθμών 3 και 80 θέλουμε να βρούμε άλλους 10 αριθμούς που όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί

όροι μιας αριθμητικής προόδου. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. [Τέτοια προβλήματα λέγονται προβλήματα παρεμβολής όρων].

11. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + \frac{v-1}{v} + \frac{v-3}{v} + \dots + \frac{1}{v}$$

12. Ένας αγρότης, για να κάνει μία γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε τα εξής με τον ιδιοκτήτη του γεωτρήπανου: Το 1 μέτρο θα κοστίσει 20 ευρώ και αυξανόμενου του βάθους, θα αυξάνεται και η τιμή κάθε μέτρου κατά 5 ευρώ. Ο αγρότης διαθέτει 4700 ευρώ. Σε πόσο βάθος μπορεί να πάει η γεώτρηση στο κτήμα του;

## 5.3 Γεωμετρική Πρόοδος

- Στην ακολουθία 3, 6, 12, 24,... κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{v+1} = \alpha_v \cdot 2 \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = 2$$

Η ακολουθία ( $\alpha_v$ ) λέγεται γεωμετρική πρόοδος με λόγο 2. Στην ακολουθία 27, -9, 3, -1, ... κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί  $-\frac{1}{3}$ . Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{v+1} = \alpha_v \left(-\frac{1}{3}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = -\frac{1}{3}$$

Όπως και προηγουμένως, η ακολουθία ( $\alpha_v$ ) λέγεται γεωμετρική πρόοδος με λόγο  $-\frac{1}{3}$

Γενικότερα ορίζουμε ότι:

Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με  $\lambda$  και τον λέμε λόγο της προόδου. Σε μια γεωμετρική πρόοδο  $(\alpha_n)$  υποθέτουμε πάντα ότι  $\alpha_1 \neq 0$ , οπότε, αφού είναι και  $\lambda \neq 0$ , ισχύει  $\alpha_n \neq 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$ . Επομένως, η ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο  $\lambda$ , αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \lambda} \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha_{n+1} / \alpha_n = \lambda}$$

Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της  $\alpha_1$  και το λόγο της  $\lambda$ , τότε ο αναδρομικός της τύπος  $\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \lambda$  μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε κατευθείαν το  $n^{\circ}$  όρο  $\alpha_n$  μιας γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση των  $\alpha_1$ ,  $\lambda$  και  $n$  ως εξής:

Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 \cdot \lambda$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 \cdot \lambda$$

.....

$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} \cdot \lambda$$

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \cdot \lambda$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις  $n$  αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε  $\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1}$

Επομένως

Ο  $n$ -οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο  $a_1$  και λόγο  $\lambda$  είναι

$$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$$

Έτσι π.χ. στη γεωμετρική πρόοδο 3, -6, 12, -24, ... η οποία έχει  $a_1 = 3$  και  $\lambda = -\frac{6}{3} = -2$

ο  $n$ -οστός όρος της είναι  $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$ . Επομένως ο 5ος όρος της είναι  $a_5 = 3(-2)^4 = 48$  ο δέκατος όρος της είναι  $a_{10} = 3(-2)^9 = -1536$  κτλ.

## Γεωμετρικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους  $\alpha, \beta, \gamma$  μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο  $\lambda$ , τότε ισχύει

$$\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\beta} = \lambda$$

Επομένως:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{και} \quad \beta^2 = \alpha\gamma$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$  ισχύει  $\beta^2 = \alpha\gamma$ , τότε

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$$

που σημαίνει ότι οι  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου.

Ο θετικός αριθμός

$$\sqrt{\alpha\gamma}$$

λέγεται γεωμετρικός μέσος των  $\alpha$  και  $\gamma$ .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει  
$$\beta^2 = \alpha\gamma$$

## Άθροισμα $n$ διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

Ας θεωρήσουμε τη γεωμετρική πρόοδο 1, 3, 9, 27, ... στην οποία είναι  $\alpha_1 = 1$  και  $\lambda = 3$ , και ας βρούμε το άθροισμα  $S_7$  των 7 πρώτων όρων της.

Έχουμε

$$S_7 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 \quad (1)$$

Αντί να προσθέσουμε τους αριθμούς αυτούς με τον συνήθη τρόπο, μπορούμε να βρούμε συντομότερα το άθροισμά τους ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο  $\lambda=3$  και έχουμε

$$3S_7 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 \quad (2)$$

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:



$$\begin{aligned}
3S_7 - S_7 &= 2187 - 1 \\
2S_7 &= 2186 \\
S_7 &= 1093
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τρόπο σε μια οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδο, θα αποδείξουμε ότι:

Το άθροισμα των πρώτων  $n$  όρων μιας γεωμετρικής προόδου ( $a_n$ ) με λόγο  $\lambda \neq 1$  είναι

$$S_n = a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω

$$S_n = a_1 + a_1\lambda + a_1\lambda^2 + \dots + a_1\lambda^{n-2} + a_1\lambda^{n-1} \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο  $\lambda$  και έχουμε

$$\lambda S_n = a_1\lambda + a_1\lambda^2 + a_1\lambda^3 + \dots + a_1\lambda^{n-1} + a_1\lambda^n \quad (2)$$

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lambda S_n - S_n &= a_1\lambda^n - a_1 \quad \text{ή} \\
(\lambda - 1)S_n &= a_1(\lambda^n - 1)
\end{aligned}$$

Επομένως, αφού  $\lambda \neq 1$ , έχουμε:

$$S_n = \frac{a_1(\lambda^n - 1)}{\lambda - 1}$$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που ο λόγος της προόδου είναι  $\lambda \neq 1$ , τότε το άθροισμα των όρων της είναι  $S_n = n \cdot \alpha_1$  αφού όλοι οι όροι της προόδου είναι ίσοι με  $\alpha_1$ .

---

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

---

1°

Να βρεθεί ο  $n$  όρος μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο 4ος όρος είναι  $\frac{3}{4}$  και ο 9ος είναι  $-\frac{3}{128}$ .

### ΛΥΣΗ

Έστω  $\alpha_1$ , ο πρώτος όρος της γεωμετρικής προόδου και  $\lambda$  ο λόγος της.  
Τότε έχουμε:

$$\alpha_1 \lambda^{4-1} = \alpha_1 \lambda^3 = \frac{3}{4}$$

και

$$\alpha_1 \lambda^{9-1} = \alpha_1 \lambda^8 = -\frac{3}{128}$$

Επομένως

$$\frac{\alpha_1 \lambda^8}{\alpha_1 \lambda^3} = \left( -\frac{3}{128} \right) : \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda^5 = -\frac{1}{32}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\lambda = -\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του  $\lambda$  στην

$$\alpha_1 \lambda^3 = \frac{3}{4}$$

και έχουμε

$$\alpha_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad \alpha_1 = -6$$

Άρα ο  $n$  όρος της γεωμετρικής προόδου, σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1},$$

είναι

$$\alpha_n = (-6) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

2°

Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{256}$$

**ΛΥΣΗ**

Πρόκειται για το άθροισμα διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου με  $\alpha_1 = 1$  και  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Για να εφαρμόσουμε τον τύπο

$$S_v = \alpha_1 \frac{\lambda^v - 1^v}{\lambda - 1},$$

πρέπει να ξέρουμε το πλήθος  $v$  των όρων.

Από τον τύπο όμως του  $v$  όρου  $\alpha_v = \alpha_1 \lambda^{v-1}$  έχουμε

$$\frac{1}{256} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{v-1},$$

ή

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{v-1}$$

και επομένως  $v-1 = 8$  ή  $v=9$ .

Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$\begin{aligned} S_v &= 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{512}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{511}{\frac{1}{2}} = \frac{1022}{512} = \frac{511}{256} \end{aligned}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το  $n$  όρο των γεωμετρικών προόδων:

i) 3, 6, 12, ... ii)  $\frac{2}{3}, 2, 6, \dots$  iii) 9, 27, 81, ...

iv)  $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$  v) 16, 8, 4, ... vi) 18, 6, 2, ...

vii) 1, 0, 4, 0, 16, ... viii) -2, 4, -8, ... ix) -3, 9, -27, ...

2. Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμιά από τις γεωμετρικές προόδους:

i) Τον  $a_9$  της  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$  ii) Τον  $a_7$  της 2, 6, 18, ...

iii) Τον  $a_8$  της 729, 243, ... iv) Τον  $a_{10}$  της 1, -2, 4, ...

v) Τον  $a_9$  της  $\frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, \dots$

3. i) Να βρείτε τον 1<sup>ο</sup> όρο μιας γεωμετρικής προόδου, της οποίας ο 5ος όρος είναι  $\frac{32}{3}$  και ο λόγος 2.

ii) Ομοίως, αν ο 42 όρος είναι  $\frac{3}{4}$  και ο λόγος  $\frac{8}{3}$

4. i) Να βρείτε το λόγο μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο 3ος όρος είναι 12 και ο 62ος όρος είναι 96.

ii) Ομοίως, αν ο 2ος όρος είναι  $\frac{8}{3}$  και ο 52ος όρος είναι  $\frac{64}{81}$ .

5. Να βρείτε:

i) τον  $a_{14}$  μιας γεωμετρικής προόδου με  $a_4=125$  και

$$a_{10} = \frac{124}{64}$$

ii) τον  $a_{21}$  μιας γεωμετρικής προόδου με  $a_{13}=\sqrt{2}$  και  $a_{23}=32\sqrt{2}$ .

6. Έστω η γεωμετρική πρόοδος 3, 6, 12,... Να βρείτε το πλήθος των όρων της μέχρι και τον όρο που ισούται με 768.

7. i) Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 4, 8, 16,... που υπερβαίνει το 2000

ii) Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 128, 64, 32,..., που είναι μικρότερος του 0,25.

8. i) Να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των αριθμών 5 και 20, καθώς και των  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  και  $\sqrt{3}$

ii) Να βρείτε τον  $x$  ώστε οι αριθμοί  $x-4$ ,  $x+1$ ,  $x-19$  να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

9. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων των γεωμετρικών προόδων

i) 1, 2, 4,...    ii) 3, 9, 27,...    iii) -4, 8, -16

10. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 8 όρων των γεωμετρικών προόδων

i)  $2+8+32+\dots+8192$     ii)  $4+2+1+\dots+\frac{1}{512}$

iii)  $1+(-2)+4+\dots+256.$

11. Μια κοινωνία βακτηριδίων διπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα. Αν αρχικά υπάρχουν 3 βακτηρίδια, πόσα βακτηρίδια θα υπάρχουν ύστερα από 12 ώρες;

12. Μια μπάλα πέφτει από ύψος 60 μέτρων και αναπηδά σε έδαφος φθάνοντας κάθε φορά στο  $\frac{1}{3}$  του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης. Να βρείτε σε τι ύψος θα φθάσει στην 4η αναπήδηση.

## **B' ΟΜΑΔΑΣ**

1. Ο  $n$ -οστός όρος μιας ακολουθίας είναι  $2^n \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$ . Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους  $a_1$  και  $\lambda$ .

2. Για ποια τιμή του  $n$  οι αριθμοί  $\sqrt{n-5}$ ,  $\sqrt[4]{10n+4}$ ,  $\sqrt{n+2}$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής πρόοδου;

3. Να δείξετε ότι:

i) τα τετράγωνα των όρων μιας γεωμετρικής πρόοδου σχηματίζουν επίσης γεωμετρική πρόοδο

ii) Αν υψώσουμε κάθε όρο μιας γεωμετρικής πρόοδου στην  $k$ , τότε προκύπτει πάλι γεωμετρική πρόοδος.

4. Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο, της οποίας: το άθροισμα των δυο πρώτων όρων της είναι  $3+\sqrt{3}$  και το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι  $4(3+\sqrt{3})$ .
5. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων δέκα όρων της γεωμετρικής προόδου, στην οποία είναι  $\alpha_2+\alpha_6=34$  και  $\alpha_3+\alpha_7=68$ .
6. Ο πληθυσμός μιας χώρας είναι 90 εκατομμύρια και παρουσιάζει ετήσια αύξηση 2%. Αν είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από  $n$  χρόνια, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας ( $a_n$ ).
- Ποιός θα είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από 10 χρόνια; [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].
7. Η ένταση του φωτός μειώνεται κατά 10%, όταν αυτό διέρχεται από ένα φίλτρο. Αν  $I_n$  είναι η ένταση του φωτός, αφού διέλθει διαδοχικά μέσα από  $n$  τέτοια φίλτρα, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας ( $I_n$ ).
- Ποια θα είναι η ένταση του φωτός, αν διέλθει μέσα από 10 τέτοια φίλτρα και η αρχική ένταση είναι  $I_0$ ; [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].
8. Σε ένα όργανο μουσικής ο τόνος  $C'$  έχει συχνότητα 261 Hz και η οκτάβα του  $C''$  έχει διπλάσια συχνότητα. Ανάμεσα στους  $C'$  και  $C''$  υπάρχουν 11 επιπλέον τόνοι, των οποίων οι συχνότητες σχηματίζουν με τις συχνότητες των  $C'$  και  $C''$  13 διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Να υπολογίσετε:
- i) το λόγο της προόδου, ii) τη συχνότητα του πέμπτου τόνου.



9. Το ψυγείο ενός φορτηγού περιέχει 40 lt νερό. Αδειάζουμε 4 lt νερό και το αντικαθιστούμε με αντιπηκτικό. Ύστερα αδειάζουμε 4 lt του μείγματος και το αντικαθιστούμε με αντιπηκτικό κ.ο.κ. Αν  $D_n$  είναι η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία  $n$  φορές, να βρείτε:

- i) Έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας ( $D_n$ ).
- ii) Την ποσότητα του αντιπηκτικού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία 7 φορές. [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

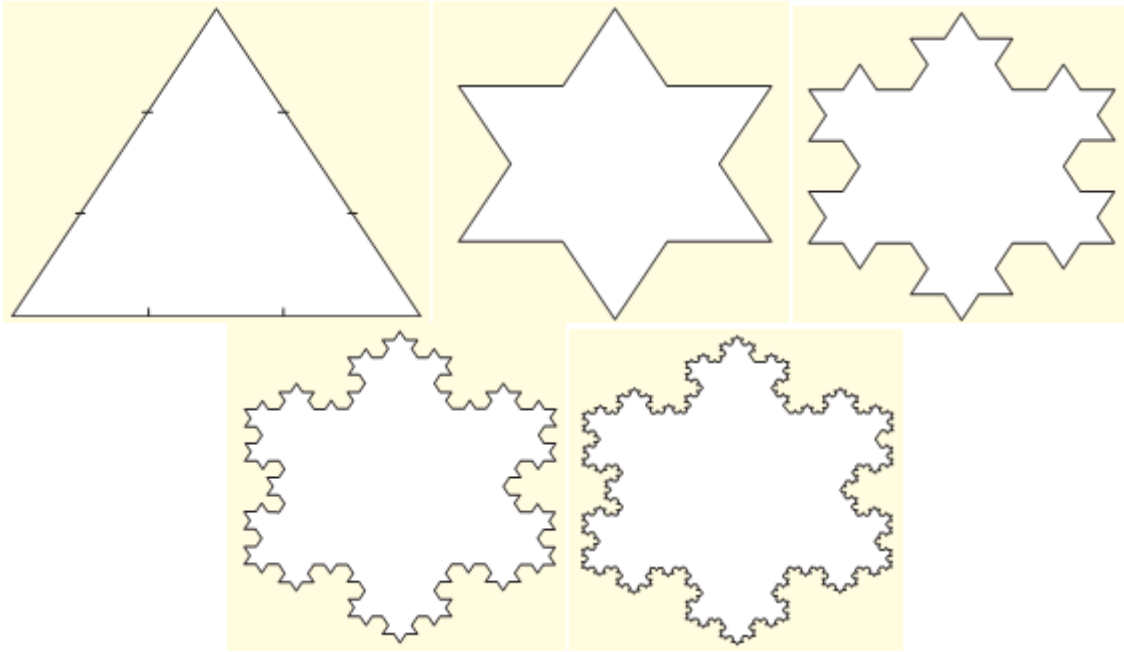
10. Λέγεται ότι ο εφευρέτης του σκακιού παρακλήθηκε από έναν Ινδό βασιλιά να ζητήσει όποια αμοιβή ήθελε για τη σπουδαία ιδέα του. Ο εφευρέτης ζήτησε να πάρει το ρύζι που θα μαζευόταν ως εξής: Στο 1ο τετραγωνάκι του σκακιού να έβαζε κάποιος έναν κόκκο ρυζιού, στο 2ο τετραγωνάκι 2 κόκκους, στο 3ο τετραγωνάκι 4 κόκκους, στο 5ο τετραγωνάκι 8 κόκκους κτλ. Να βρείτε πόσοι τόνοι θα ήταν η ποσότητα αυτή του ρυζιού, αν 1 Kg ρυζιού έχει 20000 κόκκους.

11. Κάθε πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου χωρίζεται σε τρία ίσα τμήματα. Το μεσαίο τμήμα κάθε πλευράς αντικαθίσταται από τις δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Στο σχήμα με μορφή αστεριού που

προκύπτει αντικαθιστούμε πάλι το μεσαίο  $\frac{1}{3}$  κάθε

πλευράς με δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Με ανάλογο τρόπο συνεχίζουμε για κάθε σχήμα που προκύπτει από τη διαδικασία αυτή.

- i) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας ( $S_n$ ) που εκφράζει το πλήθος των πλευρών κάθε σχήματος.



ii) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας  $(U_n)$  που εκφράζει την περίμετρο κάθε σχήματος, αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά ίση με 1.

---

## Ανατοκισμός – Ίσες Καταθέσεις

---

Με τη βοήθεια των γεωμετρικών προόδων μπορούμε να λύσουμε προβλήματα οικονομικής φύσεως, που συχνά παρουσιάζονται στις συναλλαγές με πιστωτικούς οργανισμούς.

### Ανατοκισμός

#### ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο  $\alpha$  ευρώ με ετήσιο επιτόκιο  $\varepsilon\%$ . Με τη συμπλήρωση ενός χρόνου οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο και το ποσό που προκύπτει είναι το νέο κεφάλαιο που τοκίζεται με το ίδιο επιτόκιο για τον επόμενο χρόνο. Αν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί για  $n$  χρόνια, να βρεθεί πόσα χρήματα θα εισπράξουμε στο τέλος του  $n^{\text{ου}}$  χρόνου. (Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα ανατοκισμού).

#### ΛΥΣΗ

Στο τέλος του 1 χρόνου το κεφάλαιο  $\alpha$  θα δώσει τόκο

$$\frac{\varepsilon}{100} \cdot \alpha$$

και μαζί με τον τόκο θα γίνει

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{\varepsilon}{100} \alpha = \alpha \left( 1 + \frac{\varepsilon}{100} \right)$$

Στο τέλος του 2ου χρόνου το κεφάλαιο  $\alpha_1$  θα δώσει τόκο

$$\frac{\varepsilon}{100} \cdot \alpha_1$$

και μαζί με τον τόκο θα γίνει

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\varepsilon}{100} \alpha_1 = \alpha_1 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{100} \right)$$

Στο τέλος του 3ου χρόνου το κεφάλαιο  $\alpha_2$  μαζί με τους τόκους θα γίνει

$$\alpha_3 = \alpha_2 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{100} \right) \text{ κτλ.}$$

και γενικά στο τέλος του  $n$  χρόνου το κεφάλαιο θα γίνει

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{100} \right)$$

Παρατηρούμε ότι τα  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου με

$$\alpha_1 = \alpha \left( 1 + \frac{\varepsilon}{100} \right)$$

και

$$\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{100}$$

Άρα, σύμφωνα με τον τύπο του  $n$  όρου γεωμετρικής προόδου, στο τέλος του  $n^{\text{ου}}$  χρόνου το κεφάλαιο  $\alpha$  μαζί με τους τόκους θα γίνει

$$\alpha_v = \alpha \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{v-1}$$

ή

$$\alpha_v = \alpha \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^v$$

Αν θέσουμε

$$\frac{\varepsilon}{100} = \tau$$

που είναι ο τόκος του ενός ευρώ σε ένα χρόνο, έχουμε τον τύπο

$$\alpha_v = \alpha(1+\tau)^v$$

που είναι γνωστός ως τύπος του ανατοκισμού.

---

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

---

Καταθέτουμε με ανατοκισμό κεφάλαιο 10000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 2%. Να βρεθεί τι ποσό θα εισπράξουμε ύστερα από 10 χρόνια.

### ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο  $\alpha_v = \alpha(1+\tau)^v$ , ύστερα από 10 χρόνια θα εισπράξουμε ποσό

$$\begin{aligned}\alpha_{10} &= 10000 \cdot (1+0,02)^{10} = \\ &= 10000 \cdot (1,02)^{10} = \\ &= 10000 \cdot 1,218994 = \\ &= 12189,94 \text{ ευρώ.}\end{aligned}$$

**Παρατήρηση.** Τη δύναμη  $(1,02)^{10}$  την υπολογίζουμε με τη βοήθεια πινάκων ή με έναν υπολογιστή τσέπης.

## Ίσες καταθέσεις

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Καταθέτουμε σε μια τράπεζα στην αρχή κάθε χρόνου α ευρώ με ανατοκισμό και επιτόκιο  $\varepsilon\%$ . Τι ποσό θα πάρουμε ύστερα από  $n$  χρόνια;  
(Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα των ίσων καταθέσεων)

### ΛΥΣΗ

Η 1η κατάθεση θα ανατοκιστεί για  $n$  χρόνια και επομένως, σύμφωνα με τον τύπο του ανατοκισμού, θα γίνει

$$a(1+\tau)^n, \quad \text{όπου } \tau = \frac{\varepsilon}{100}$$

Η 2η κατάθεση θα ανατοκιστεί για  $n-1$  χρόνια και επομένως θα γίνει  $a(1+\tau)^{n-1}$  κτλ. και η  $n$  κατάθεση θα τοκιστεί για 1 χρόνο και θα γίνει  $a(1+\tau)$ .

Συνεπώς ύστερα από  $n$  χρόνια θα πάρουμε το ποσό

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \alpha(1 + \tau)^V + \alpha(1 + \tau)^{V+1} + \dots + \alpha(1 + \tau) \\
&= \alpha(1 + \tau) + \alpha(1 + \tau)^2 + \dots + \alpha(1 + \tau)^V \\
&= \alpha(1 + \tau) \left[ 1 + (1 + \tau) + (1 + \tau)^2 + \dots + (1 + \tau)^{V-1} \right] \\
&= \alpha(1 + \tau) \cdot \frac{(1 + \tau)^V - 1}{(1 + \tau) - 1}
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\Sigma = \alpha(1 + \tau) \cdot \frac{(1 + \tau)^V - 1}{\tau}$$

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως τύπος των ίσων καταθέσεων.

---

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

---

Στην αρχή κάθε χρόνου καταθέτουμε στην τράπεζα ποσό 10000 ευρώ με ανατοκισμό και με επιτόκιο 2%. Τι ποσό θα πάρουμε ύστερα από 10 χρόνια;

### ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο

$$\Sigma = \alpha(1 + \tau) \cdot \frac{(1 + \tau)^V - 1}{\tau},$$

ύστερα από 10 χρόνια θα πάρουμε ποσό

$$\begin{aligned}
\Sigma &= 10000 \cdot (1 + 0,02) \cdot \frac{(1 + 0,02)^{10} - 1}{0,02} \\
&= 10000 \cdot 1,02 \cdot \frac{(1 + 0,02)^{10} - 1}{0,02} \\
&= 10000 \cdot 1,02 \cdot \frac{1,218994 - 1}{0,02} \\
&= 10000 \cdot 11,168694 = 111686,94 \text{ ευρώ.}
\end{aligned}$$

---

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

---

Για την επίλυση των ασκήσεων να χρησιμοποιηθεί υπολογιστής τσέπης

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δανείζει κάποιος 5000 ευρώ με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5%. Πόσα χρήματα θα πάρει συνολικά ύστερα από 5 χρόνια;
2. Πόσα χρήματα πρέπει να τοκίσει κάποιος με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% για να πάρει ύστερα από 10 χρόνια συνολικά 50.000 ευρώ;
3. Ποιο είναι το επιτόκιο με το οποίο, κεφάλαιο 10.000 ευρώ, ανατοκιζόμενο ανά έτος, γίνεται ύστερα από 5 χρόνια 12.762 ευρώ;
4. Στην αρχή κάθε χρόνου και για 5 συνεχή χρόνια καταθέτουμε 5.000 ευρώ με ανατοκισμό ανά έτος και με ετήσιο επιτόκιο 3%. Τι ποσό θα πάρουμε στο τέλος του 5ου έτους;



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 2ου ΤΟΜΟΥ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο:

#### Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού .....	5
3.2 Η Εξίσωση $x^v = \alpha$ .....	15
3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού .....	19

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο:

#### Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1ου Βαθμού .....	39
4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού .....	46
4.3 Ανισώσεις Γινόμενο & Ανισώσεις Πηλίκο .....	58

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο:

#### Πρόοδοι

5.1 Ακολουθίες .....	68
5.2 Αριθμητική Πρόοδος .....	75
5.3 Γεωμετρική Πρόοδος .....	87
5.4 Ανατοκισμός-Ίσες καταθέσεις .....	101



**Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α').**

***Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.***

