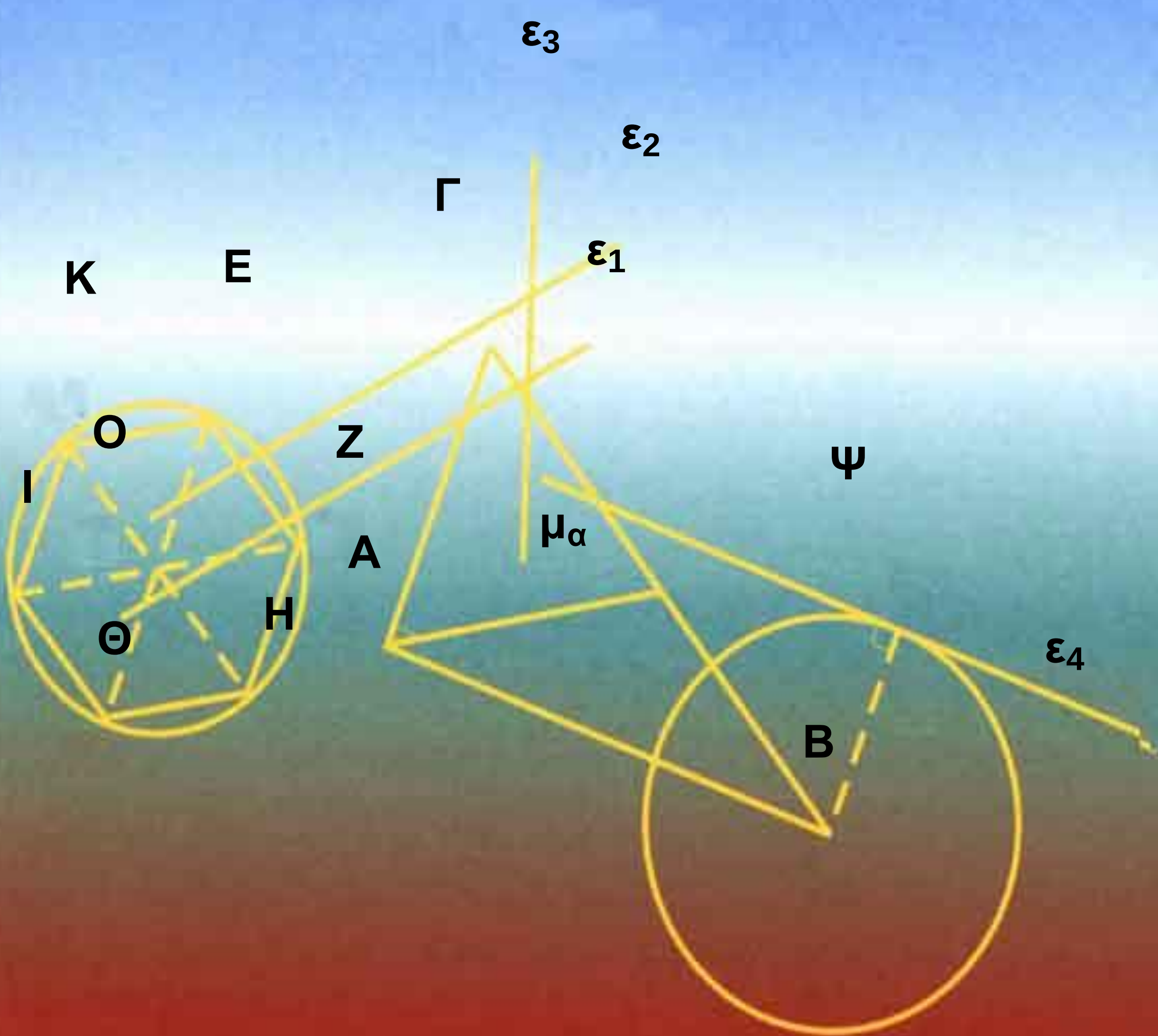
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ,
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ
ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Α΄ και Β΄ Γενικού Λυκείου



Τόμος 3ος

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ,
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΗΛΙΑΣ
ΒΛΑΜΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΤΣΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΜΑΡΚΑΤΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ
ΣΙΔΕΡΗΣ ΠΟΛΥΧΡΟΝΗΣ

ΤΟΜΟΣ 3ος

ΚΕΦΑΛΑΙΑ 5.1 - 5.12
6.1 – 6.7
7.1-7.9
8.1-8.2

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ
Αργυρόπουλος Ηλίας
Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Βλάμος Παναγιώτης
Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Κατσούλης Γεώργιος
Μαθηματικός

Μαρκάτης Στυλιανός
Επίκουρος Καθηγητής, Τομέα Μαθηματικών Ε.Μ. Της-τεχνείου

Σίδερης Πολύχρονης
Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Ιστορικά Σημειώματα: Βανδουλάκης Ιωάννης
Διδάκτωρ Πανεπιστημίου Μ. Lomonosov Μόσχας Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Φιλολογική Επιμέλεια: Δημητρίου Ελένη

Επιλογή εικόνων: Παπαδοπούλου Μπία

Εικονογράφηση – Σελιδοποίηση: Αλεξοπούλου Καίτη

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>

Ομάδα εργασίας του
Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

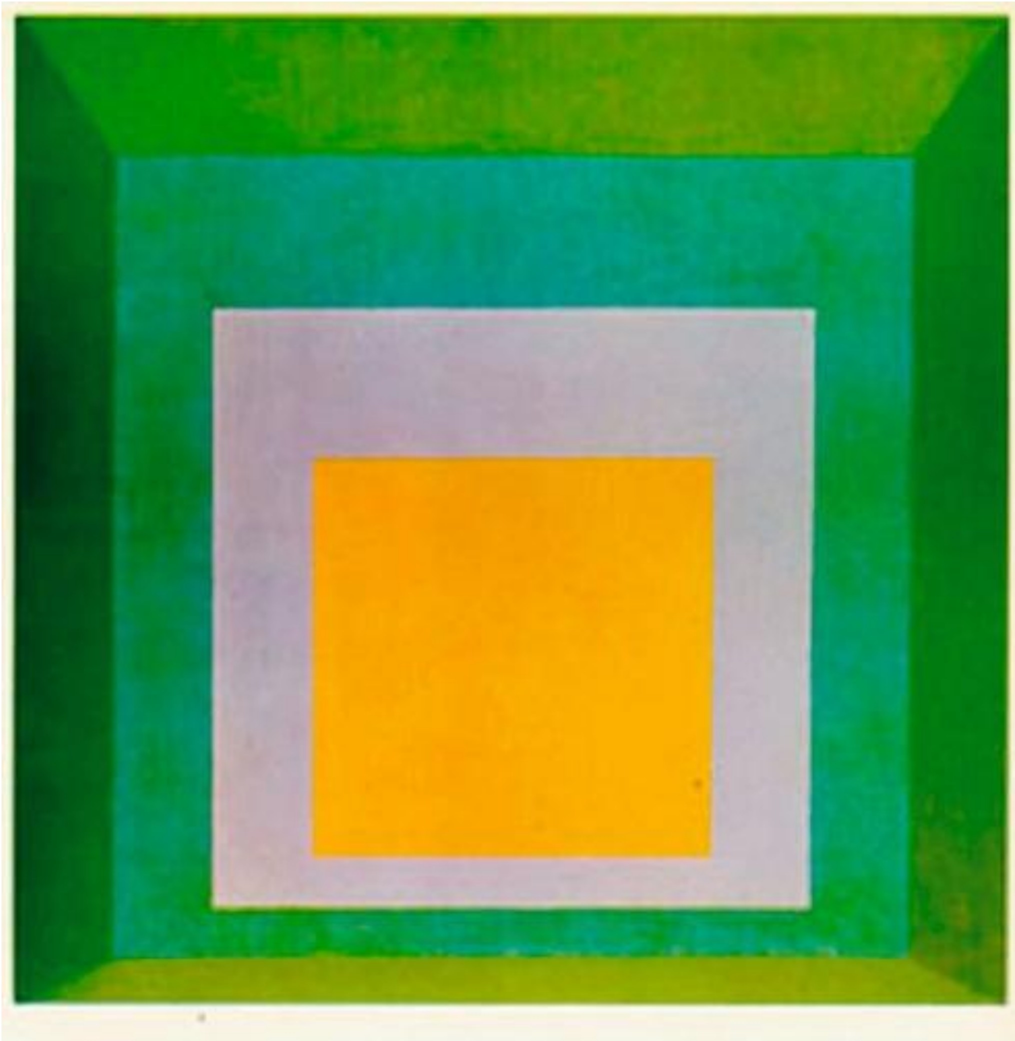
(Μαγγιώρης Δημήτριος)

Επιμέλεια: (Γελαστοπούλου Μαρια)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια

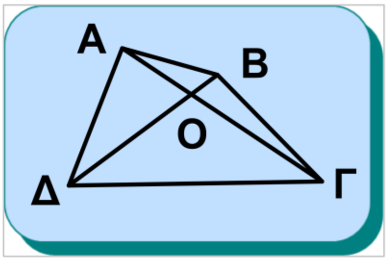
Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα τετράπλευρα που έχουν παράλληλες πλευρές, θα τα ταξινομήσουμε και θα εξετάσουμε της χαρακτηριστικές ιδιότητές της. Ως εφαρμογές θα αποδειχθούν κάποιες βασικές προτάσεις για τα τρίγωνα, τα τετράπλευρα και της παράλληλες ευθείες.



Josef Alberts (Γερμανός, 1888-1976).
«Αφιέρωμα στο τετράγωνο: οπτασία», λάδι σε σανίδα, 1959.
Συλλογή Μουσείου Solomon R. Guggenheim, Νέα Υόρκη.

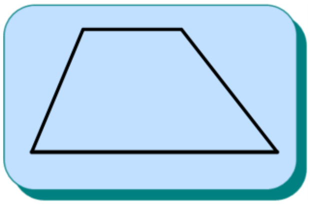
5.1 Εισαγωγή

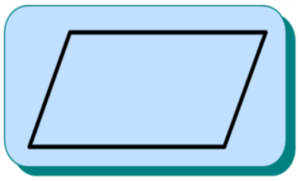
Της είδαμε στην §2.20, το ευθύγραμμο σχήμα που έχει τέσσερις πλευρές λέγεται τετράπλευρο. Κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ.1) έχει δύο διαγωνίους ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται σε εσωτερικό σημείο της. Στα επόμενα, όταν λέμε τετράπλευρο, θα εννοούμε **κυρτό** τετράπλευρο.



Σχήμα 1

Το τετράπλευρο που έχει δύο μόνον πλευρές παράλληλες λέγεται τραπέζιο (σχ.2), ενώ το τετράπλευρο που έχει της απέναντι πλευρές παράλληλες λέγεται παραλληλόγραμμο (σχ.3).


Σχήμα 2


Σχήμα 3

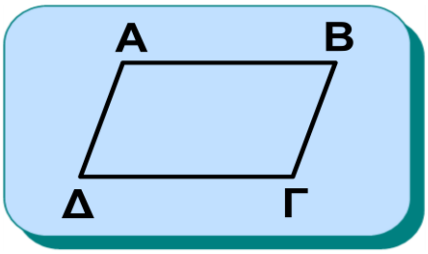
5.2 Παραλληλόγραμμα

Παραλληλόγραμμο

Ορισμός

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει της απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, όταν ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ.



Σχήμα 4

● **Ιδιότητες παραλληλογράμμων**

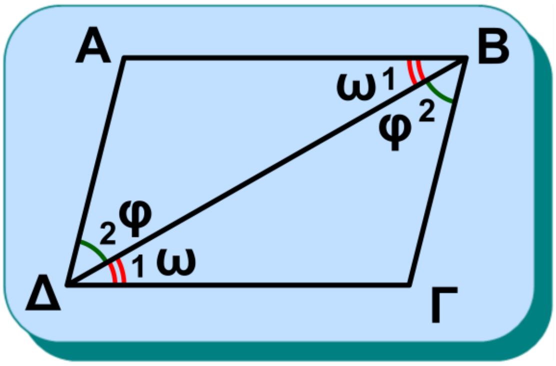
Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
(ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
(iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη των i), ii)

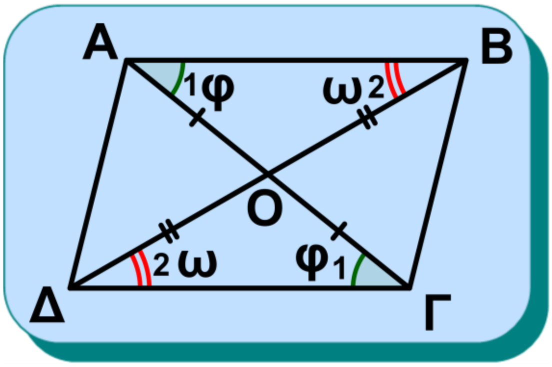
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ (σχ. 5).

Έχουμε:
$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).
ΒΔ κοινή πλευρά.
$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ. Της έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi + \omega$.



Σχήμα 5

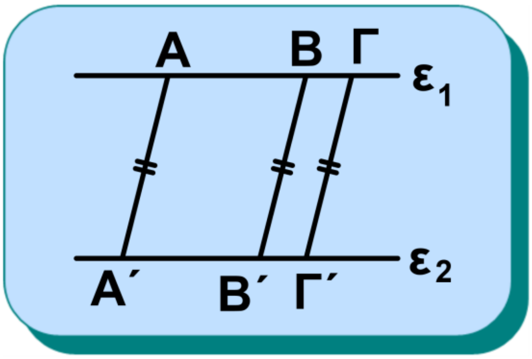
Απόδειξη της ιδιότητας iii)
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ. Έχουμε: ΑΒ = ΓΔ
$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).
$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).
Άρα, τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ είναι ίσα, οπότε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ =ΟΔ.



Σχήμα 6

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι
Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.
Για το λόγο αυτό λέγεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου.

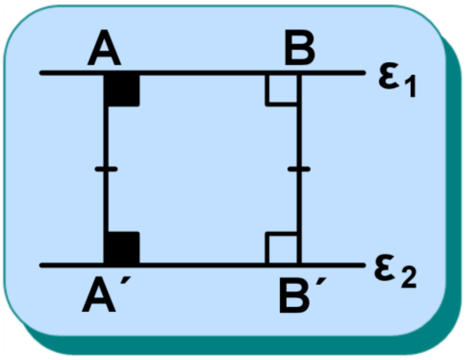
ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ
Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα της σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα (σχ.7).



Σχήμα 7

Αν τα τμήματα (σχ.8) είναι **κάθετα** της παράλληλες, το κοινό μήκος της λέγεται **απόσταση** των παραλλήλων.

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του της ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου, ενώ οι απέναντι πλευρές του λέγονται **βάσεις** ως της αυτό το ύψος (σχ.9)

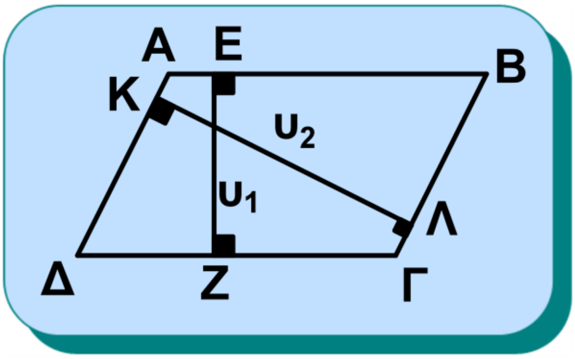


Σχήμα 8

.

● **Κριτήρια για παραλληλόγραμμα**

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε προτάσεις (κριτήρια) οι οποίες εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.



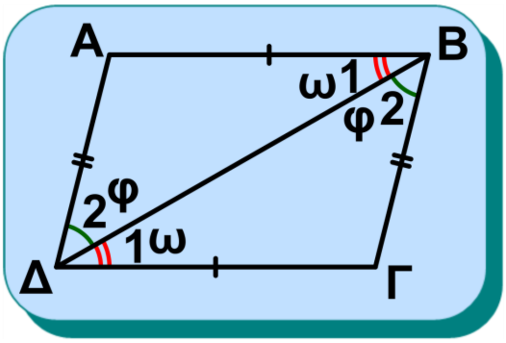
Σχήμα 9

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από της παρακάτω προτάσεις:

Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
(ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
(iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
(iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες. (i)



Σχήμα 10

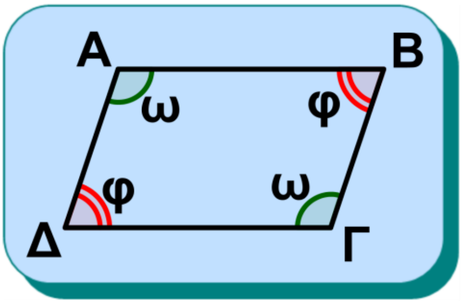
Έστω ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ= ΒΓ (σχ.10). Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ που είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ,

ΑΔ = ΒΓ και ΒΔ κοινή πλευρά. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = ω$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = φ$, οπότε ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(ii) Έστω ΑΒ// = ΓΔ (σχ.10). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = ω$ και η ΒΔ είναι κοινή πλευρά. Επομένως, όμοια με το (i), το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

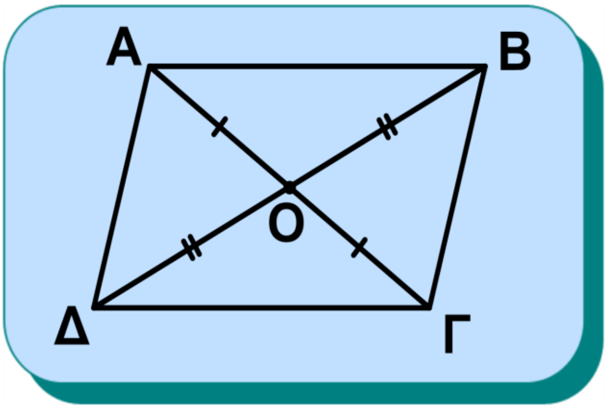
(iii) Αν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = ω$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = φ$ (σχ.11) η σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 4$∟ γράφεται 2ω+ 2φ = 4∟ ή φ + ω= 2∟.

Επομένως, έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2$∟, οπότε ΑΒ // ΓΔ και $\hat{A} + \hat{B} = 2$∟, οπότε ΑΔ // ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 11

(iv) Έστω ΑΟ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ (σχ.12). Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ, καθώς και τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσα. Επομένως, όμοια με το (i), θα είναι ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

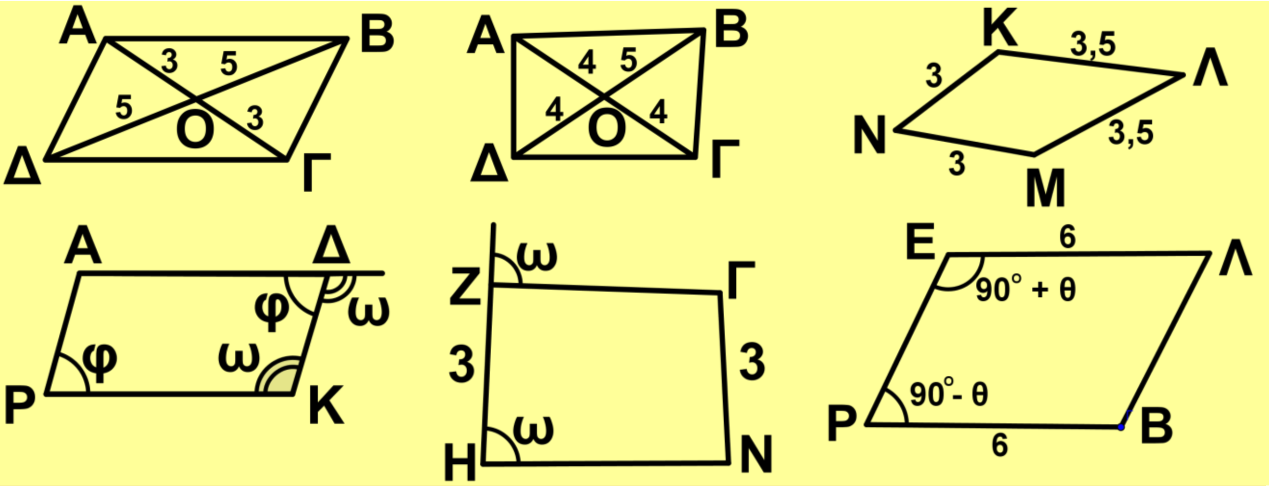


Σχήμα 12

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

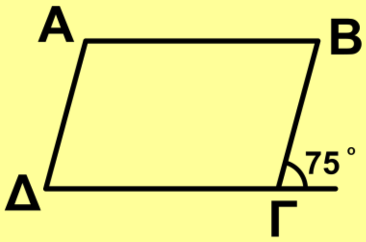
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα, ποια όχι και γιατί;

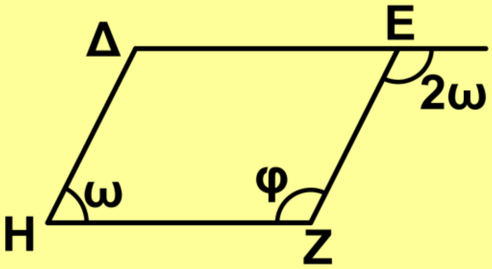


2. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο;

3. Να υπολογίσετε της γωνίες του παραλληλογράμμου.



4. Να υπολογίσετε της γωνίες ω και φ του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.



5. Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν:

i) Δύο απέναντι γωνίες είναι ίσες. ☐

ii) Οι διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές. ☐

iii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες. ☐

iv) Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. ☐

(Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει τη ΔΓ στο Ε.
Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΒΓ.

2. Έστω Ο το κέντρο παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Αν Ε και Ζ σημεία των ΟΑ και ΟΓ αντίστοιχα, ώστε ΟΕ = ΟΖ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Έστω Ε και Ζ, τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:
i) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
ii) οι ΑΓ, ΒΔ και ΕΖ συντρέχουν.
4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Η παράλληλη από το Δ της την ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν η παράλληλη από το Ε της τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΒΖ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε ΜΕ//ΑΒ (Ε σημείο του ΑΓ) και ΜΔ//ΑΓ (Δ σημείο του ΑΒ). Να αποδείξετε ότι
ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ.
2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε σημείο της ΑΓ. Φέρουμε ΔΖ//ΒΕ (Ζ σημείο του ΑΓ). Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΖ.
3. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ και τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΖ = ΔΑ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Β και Ε είναι συνευθειακά.
4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Της προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ παίρνουμε σημεία Η και Ζ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΔΗ = ΒΔ και ΖΕ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι
i) ΑΗ = ΑΖ,
ii) τα σημεία Ζ, Α και Η είναι συνευθειακά.
5. Από σημείο Α να φέρετε τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών με τρόπο, ώστε το μεταξύ των παραλλήλων τμήμα της να είναι ίσο με δοσμένο τμήμα λ.

Σύνθετα θέματα

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Κ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΓΗ και ΒΖ = ΔΚ. Να αποδείξετε ότι
i) το τετράπλευρο ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο,
ii) οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΚΖ συντρέχουν.

2. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και επί της ημιευθείας ΔΑ θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι $Z\hat{\Gamma}E = 90°$.

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και την ΑΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ της ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΒΓ διχοτομεί τη ΔΕ.

5. Ένα ποταμός, του οποίου οι όχθες είναι ευθύγραμμες, διέρχεται μεταξύ δύο χωριών που απέχουν άνισες αποστάσεις από της όχθες του. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί μια γέφυρα κάθετη της τον ποταμό, ώστε τα δύο χωριά να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από της αντίστοιχες εισόδους της γέφυρας;

Είδη παραλληλογράμμων

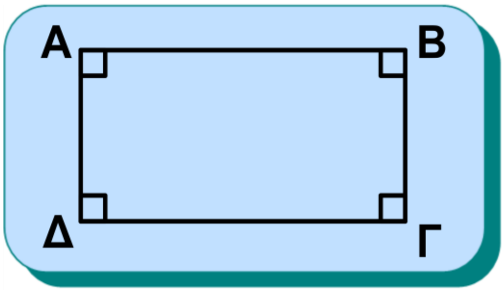
Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τα είδη των παραλληλογράμμων, δηλαδή τα παραλληλόγραμμα που έχουν και κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων: το **ορθογώνιο**, το **ρόμβο** και το **τετράγωνο**.

5.3 Ορθογώνιο

Ορισμός

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, ενώ δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), προκύπτει ότι της οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές.



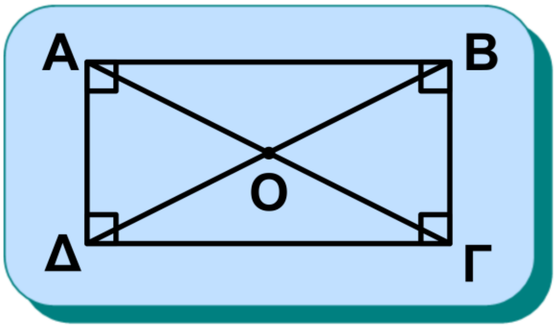
Σχήμα 13

● Ιδιότητες ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες (σχ.14). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$, ΑΔ κοινή, ΑΒ = ΔΓ), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



Σχήμα 14

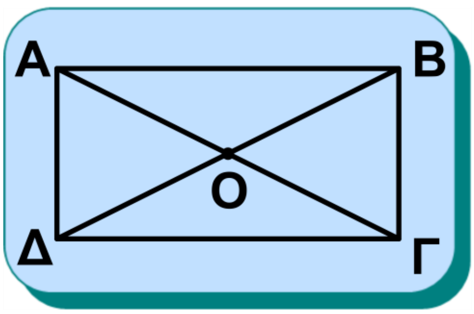
● Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από της παρακάτω προτάσεις:

Είναι **παραλληλόγραμμο** και έχει **μία ορθή** γωνία.
(ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες.**
(iii) Έχει **τρεις** γωνίες **ορθές.**
(iv) **Της** οι γωνίες του είναι **ίσες.**

Απόδειξη

Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του παραλληλογράμμου.
ii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΓ = ΒΔ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα (ΑΒ = ΔΓ, ΑΓ = ΒΔ, ΑΔ κοινή),



Σχήμα 15

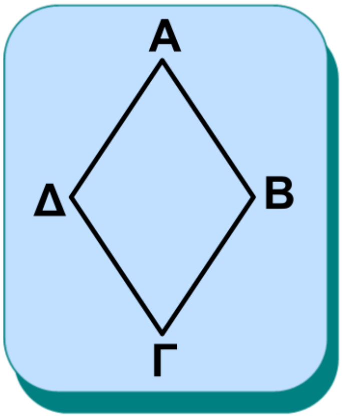
οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2$∟, οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1$∟.

Επομένως, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
(iii) Αν έχει τρεις ορθές γωνίες θα είναι και η άλλη ορθή, αφού το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι 4 ∟.
(iv) Αν της οι γωνίες είναι ίσες, προφανώς της είναι ορθές.

5.4 Ρόμβος

Ορισμός

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.



Σχήμα 16

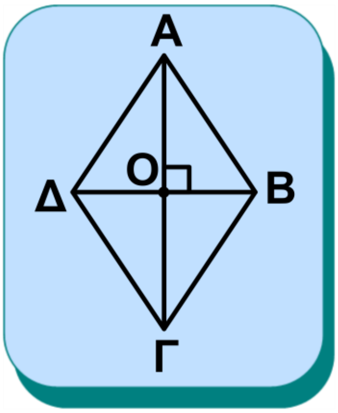
Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι **της οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.**

● Ιδιότητες του ρόμβου

Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
ii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν της γωνίες του.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, η διάμεσος του ΑΟ είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επομένως
ΑΓ ⊥ ΒΔ και η ΑΓ διχοτομεί την $\hat{A}$.
Όμοια η ΑΓ διχοτομεί τη $\hat{\Gamma}$ και η ΒΔ της $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.



Σχήμα 17

● Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από της παρακάτω προτάσεις:

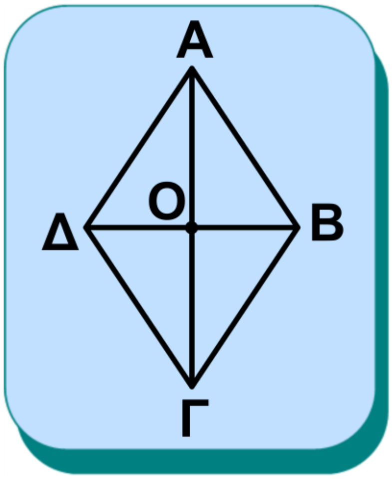
Έχει **της της πλευρές του ίσες.**
(ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και **δύο διαδοχικές** πλευ-

ρές του είναι ίσες.
(iii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι διαγώνιοί του τέμνονται **κάθετα.**
(iv) Είναι **παραλληλόγραμμο** και μία διαγώνιός του **διχοτομεί** μία γωνία του.

Απόδειξη

(i) και (ii) Προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.

(iii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΓ ⊥ ΒΔ.
Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΟ είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η ΑΟ είναι και ύψος, επειδή ΑΓ ⊥ ΒΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε ΑΒ = ΑΔ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.



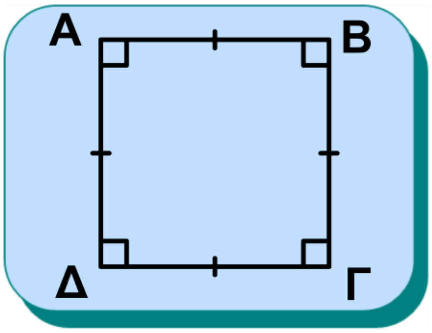
Σχήμα 18

(iv) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΑΓ διχοτόμος της $\hat{A}$.
Τότε πάλι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές (αφού ΑΟ διχοτόμος και διάμεσος), οπότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

5.5 Τετράγωνο

Ορισμός

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.



Σχήμα 19

● **Ιδιότητες τετραγώνου**

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει της της ιδιότητες του
ορθογωνίου και της της ιδιότητες του ρόμβου.
Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:

Οι **απέναντι** πλευρές του είναι **παράλληλες.**
(ii) **Της** οι πλευρές του είναι **ίσες.**
(iii) **Της** οι γωνίες του είναι **ορθές.**
(iv) Οι διαγώνιοί του είναι **ίσες**, τέμνονται **κάθετα, διχοτομούνται** και **διχοτομούν** της γωνίες του.

● Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Αποδεικνύεται ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από της παρακάτω προτάσεις:

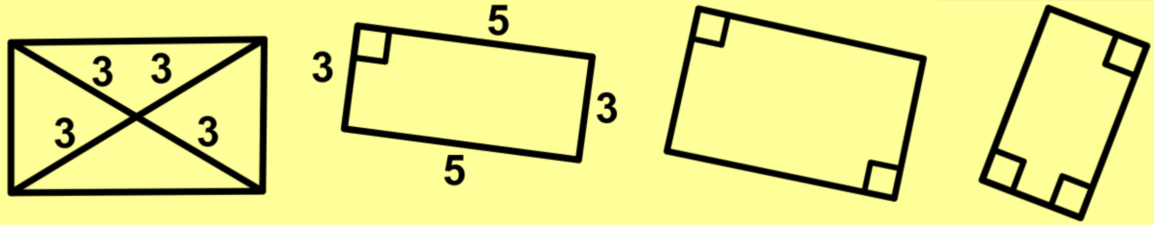
Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
(ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
(iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
(iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές
του είναι ίσες.
(v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
(vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

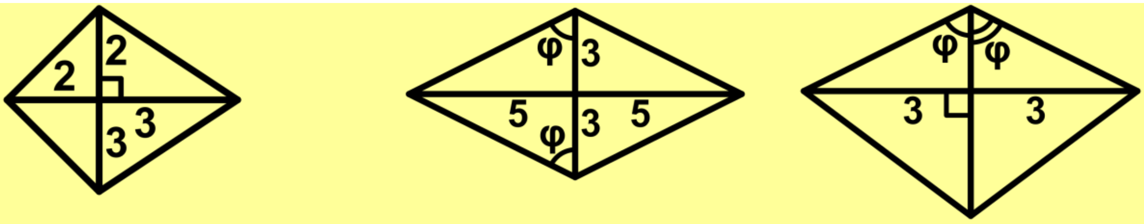
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι i) ορθογώνια, ii) ρόμβοι, iii) τετράγωνα, ποια όχι και γιατί;

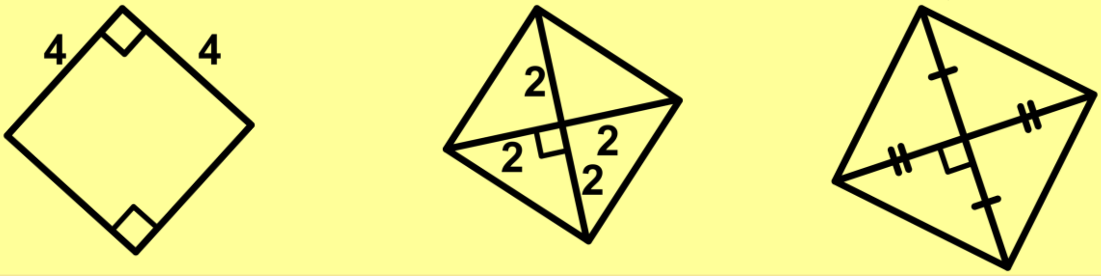
i)



ii)



iii)



2. **Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι: i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος**

3. **Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα παρακάτω σχήματα από της διαγωνίους της; I) Ορθογώνιο**
ii) Ρόμβος iii) Τετράγωνο

4. **Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που αφορούν πλευρές, γωνίες ή διαγωνίους μεταξύ των ζευγών των σχημάτων:**
i) Τετράγωνο – Ρόμβος
ii) Τετράγωνο – Ορθογώνιο
iii) Ορθογώνιο – Ρόμβος

5. **Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση:**
i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου δεν είναι ίσες. ☐
ii) Της οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες. ☐
iii) Της ρόμβος με μία ορθή γωνία είναι τετράγωνο. ☐
iv) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος. ☐

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. **Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε ΑΕ ⊥ ΔΓ και ΓΖ ⊥ ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το ΑΖΓΕ είναι ορθογώνιο.**

2. **Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ΒΔ = 2ΑΓ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΟΒ και ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.**

3. **Να αποδείξετε ότι αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δε συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.**

4. Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

5. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Παίρνουμε δύο σημεία Ε και Ζ της ΑΓ, ώστε ΟΕ = ΟΖ = ΟΒ = ΟΔ. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι τετράγωνο.

6. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Της πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε σημεία Κ, Λ, Μ και Ν αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ. Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και Μ το μέσο της ΒΔ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη της τη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.

2. Της πλευρές ΑΒ και ΒΓ, τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΒΖ. Να αποδείξετε ότι i) ΑΖ = ΔΕ, ii) ΑΖ $\perp$ ΔΕ.

3. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΕ και Θ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ, να αποδείξετε ότι το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.

4. Να αποδείξετε ότι αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα της της απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.

Σύνθετα θέματα

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B}$= 45°. Από το μέσο Μ της ΓΔ φέρουμε κάθετο πάνω στη ΓΔ και έστω Ε και Ζ τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει της ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα (ή της προεκτάσεις της). Να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΖ είναι τετράγωνο.

2. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε ΒΕ $\perp$ ΑΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ$\hat{B}$Ε τέμνει τη ΓΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΓΖ.

3. Να αποδείξετε ότι: i) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από της ίσες πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με ένα από τα ύψη του), ii) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από της πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με το ύψος του).

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

Θεώρημα Ι

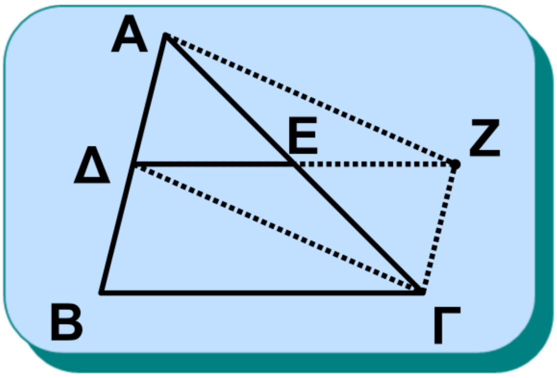
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο της την Τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα (σχ.20). Θα αποδείξουμε ότι ΔΕ // = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Προεκτείνουμε τη ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ.

Το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.Άρα ΑΔ = // ΓΖ, οπότε ΔΒ = // ΓΖ, αφού ΑΔ = ΔΒ. Έτσι το τετράπλευρο ΔΖΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε: (i) ΔΖ // ΒΓ άρα ΔΕ // ΒΓ και



Σχήμα 20

(ii) ΔΖ = ΒΓ ή 2ΔΕ = ΒΓ ή ΔΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

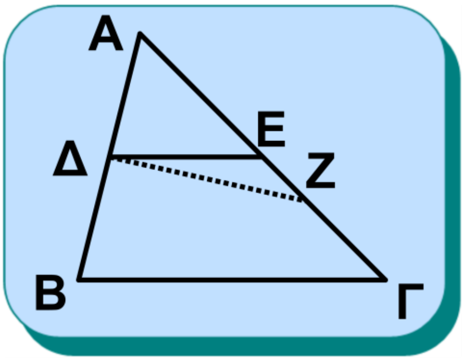
Θεώρημα ΙΙ

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η

ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ας φέρουμε από το μέσο Δ της ΑΒ την παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε (σχ.21). Θα αποδείξουμε ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ. Έστω ότι το Ε δεν είναι μέσο της ΑΓ. Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΓ, το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα ΔΖ // ΒΓ. Έτσι, όμως, έχουμε από το Δ δύο παράλληλες προς τη ΒΓ, που είναι άτοπο. Άρα το Ε είναι μέσο της ΑΓ.



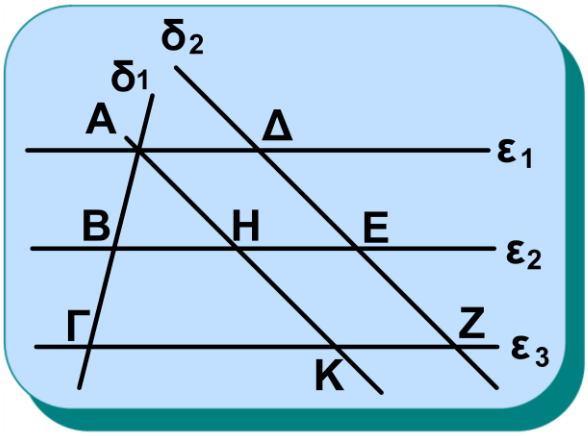
Σχήμα 21

Θεώρημα ΙΙΙ

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 οι οποίες τέμνουν την δ_1 στα σημεία Α, Β, Γ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ (σχ.22). Αν μια άλλη ευθεία δ_2 τέμνει τις ε_1, ε_2, ε_3 στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι ΔΕ = ΕΖ.



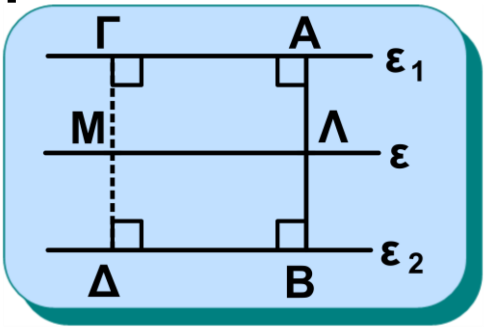
Σχήμα 22

Φέρουμε ΑΚ // ΔΖ. Τότε τα τετράπλευρα ΑΔΕΗ και ΕΖΚΗ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε ΑΗ = ΔΕ (1) και ΗΚ = ΕΖ (2). Στο τρίγωνο ΑΚΓ το Β είναι το μέσο της ΑΓ και ΒΗ // ΓΚ. Άρα το Η είναι μέσο της ΑΚ, δηλαδή ΑΗ = ΗΚ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΔΕ = ΕΖ.

● Η μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ και ένα τμήμα ΑΒ = υ κάθετο προς αυτές, το οποίο έχει τα άκρα του στις $ε_1$ και $ε_2$. Αν από το μέσο Κ της ΑΒ φέρουμε την ευθεία ε παράλληλη προς τις $ε_1$ και $ε_2$, παρατηρούμε ότι κάθε σημείο Μ της ε **ισαπέχει** από τις $ε_1$ και $ε_2$, αφού ΜΓ = ΜΔ $= \frac{υ}{2}$.



Σχήμα 23

Αντίστροφα, αν ένα σημείο Μ ισαπέχει από τις $ε_1$ και $ε_2$, το Μ τότε είναι σημείο μεταξύ των παραλλήλων και ισχύει ΜΓ+ΜΔ = ΓΔ = υ, οπότε ΜΓ = ΜΔ = $\frac{υ}{2}$. Έτσι τα τετράπλευρα ΜΓΑΚ και ΜΔΒΚ είναι παραλληλόγραμμα (ΜΓ// = ΑΚ, ΜΔ // = ΚΒ), οπότε ΜΚ // $ε_1$, $ε_2$. Επομένως, το Μ ανήκει στην ευθεία ε.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι: **Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις $ε_1$ και $ε_2$, η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες.**

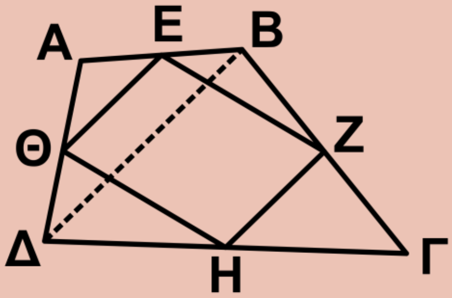
Η ευθεία ε λέγεται **μεσοπαράλληλος** των $ε_1$ και $ε_2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ (σχ.24α). Παρατηρούμε ότι τα Ε και Θ είναι τα μέσα δύο πλευρών



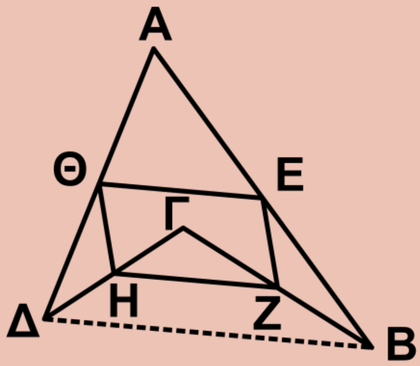
Σχήμα 24α

του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε ΕΘ = // $\frac{ΒΔ}{2}$ (1). Όμοια από το τρίγωνο ΒΓΔ προκύπτει ότι ΖΗ = // $\frac{ΒΔ}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι ΕΘ = // ΖΗ, οπότε το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και σε μη κυρτό τετράπλευρο (σχ.24β).



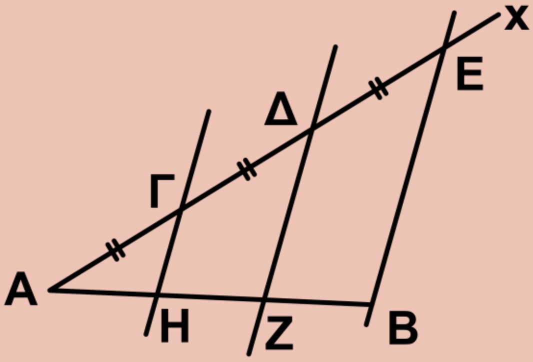
Σχήμα 24β

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα (σχ.25).

Λύση

Φέρουμε μια ημιευθεία Αx και παίρνουμε σε αυτή τα ίσα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ. Φέρουμε τη ΒΕ και από τα Δ, Γ και Α παράλληλες προς αυτή, οι οποίες τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Ζ



Σχήμα 25

και Η.Τότε σύμφωνα με το θεώρημα ΙΙΙ, σελ. 105, θα είναι ΑΗ = ΗΖ = ΖΒ.

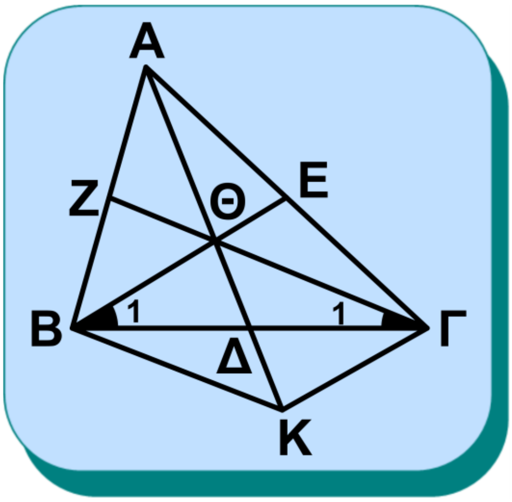
5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

Θεώρημα

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις δύο διαμέσους ΒΕ και ΓΖ. Επειδή $\hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1<\hat{B}+\hat{\Gamma}<2\llcorner$, οι δύο διάμεσοι τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο Θ του τριγώνου. Αν η ΑΘ τέμνει τη ΒΓ στο Δ, θα αποδείξουμε ότι i) η ΑΔ είναι η τρίτη διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή ΒΔ = ΔΓ και ii) $A\Theta=\frac{2}{3}A\Delta$



Σχήμα 26

i) Στην ημιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμήμα ΘΚ = ΑΘ. Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε και Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΚΓ, οπότε ΕΘ = // $\frac{\Gamma K}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε ΖΘ = // $\frac{BK}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΕ //ΓΚ και ΓΖ // ΒΚ, δηλαδή το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμο (3). Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε ΒΔ = ΔΓ.

Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται **βαρύκεντρο** (ή **κέντρο βάρους**) του τριγώνου.

ii) Από το παραλληλόγραμμο ΒΘΓΚ έχουμε ακόμη ΘΔ = ΔΚ = $\frac{\Theta K}{2}$, άρα ΘΔ = $\frac{A\Theta}{2}$ ή ΑΘ = 2ΘΔ.

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι ΕΘ = $\frac{ΓΚ}{2} = \frac{ΒΘ}{2}$ ή ΒΘ = 2ΘΕ. Όμοια από τις (2) και (3) έχουμε ΓΘ = 2ΘΖ. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου. Επίσης έχουμε ότι ΑΔ = ΑΘ + ΘΔ = 2ΘΔ + ΘΔ = 3ΘΔ. Άρα ΘΔ = $\frac{1}{3}$ ΑΔ, οπότε ΑΘ = $\frac{2}{3}$ ΑΔ. Όμοια προκύπτει ότι ΒΘ = $\frac{2}{3}$ ΒΕ και ΓΘ = $\frac{2}{3}$ ΓΖ.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Η απόσταση του βαρυκέντρου Θ ενός τριγώνου ΑΒΓαπό κάθε κορυφή του ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην παραπάνω πρόταση θεωρήσαμε το σημείο τομής Θ των δύο διαμέσων ΒΕ και ΓΖ και αποδείξαμε ότι η ΑΘ αν προεκταθεί είναι η τρίτη διάμεσος ΑΔ.

Αυτός ο τρόπος αποτελεί μια βασική μέθοδο για να αποδεικνύουμε ότι τρεις ευθείες συντρέχουν σε κάποιο σημείο.

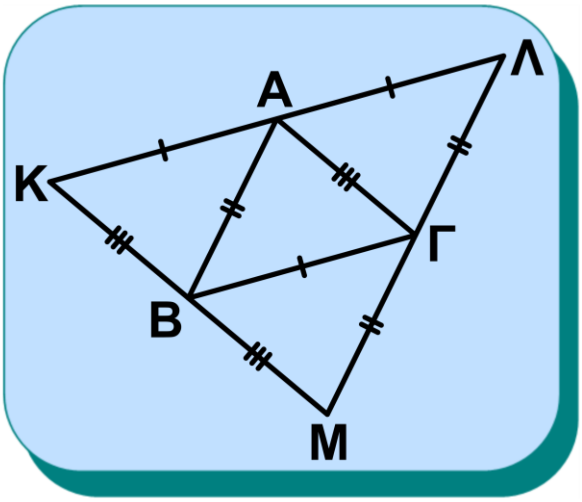
5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου

Λήμμα

Οι παράλληλες, που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

Απόδειξη

Από τις κορυφές Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του, οι οποίες ορίζουν ένα νέο τρίγωνο ΚΛΜ (σχ.27). Λόγω των σχηματιζόμενων παραλληλογράμμων ΚΑΓΒ, ΛΑΒΓ και ΜΒΑΓ έχουμε: ΚΑ = ΒΓ = ΑΛ, ΛΓ = ΑΒ = ΓΜ και ΚΒ = ΑΓ = ΒΜ. Επομένως τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ.



Σχήμα 27

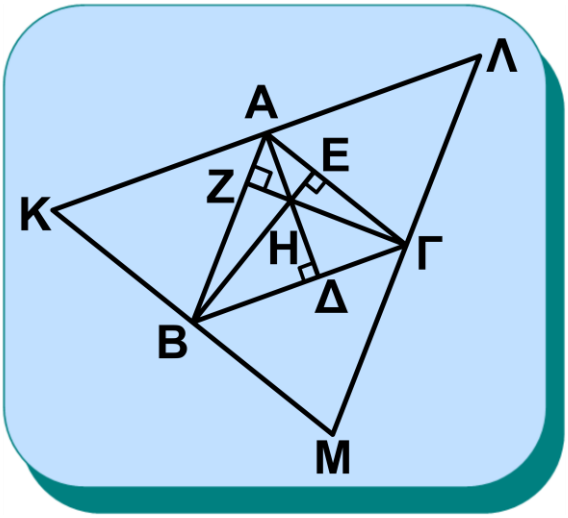
Θεώρημα

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Από τις κορυφές του Α, Β, Γ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές (σχ.28). Σύμφωνα με το Λήμμα, στο τρίγωνο ΚΛΜ τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του.

Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι κάθετες στις ΚΛ, ΚΜ και ΜΛ αντίστοιχα (αφού είναι κάθετες στις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ) και μάλιστα είναι κάθετες στα μέσα τους. Δηλαδή οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ, οπότε θα διέρχονται από το ίδιο σημείο Η.



Σχήμα 28

Το σημείο Η λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου ΑΒΓ.

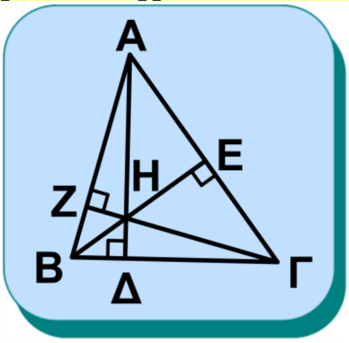
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, το ορθόκεντρο είναι η κορυφή της ορθής γωνίας, ενώ σε αμβλυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο βρίσκεται εκτός του τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Οι κορυφές Α, Β, Γ, τριγώνου ΑΒΓ και το ορθόκεντρό του Η αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα σημεία είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.

Πράγματι οι κορυφές π.χ. Β, Γ και το ορθόκεντρο Η του τριγώνου ΑΒΓ ορίζουν το τρίγωνο ΒΗΓ. Τα ύψη ΗΔ,ΒΖ και ΓΕ του τριγώνου ΒΗΓ τέμνονται στο Α, οπότε το Α είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΗΓ.



Σχήμα 29

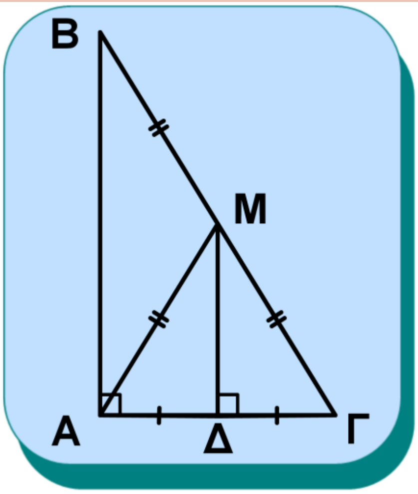
5.9 Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου

Θεώρημα Ι

Η διάμεσος οθρογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°) και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.30). Θα αποδείξουμε ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$. Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ.



Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε

Σχήμα 30

ΜΔ // ΑΒ. Αλλά ΑΒ ⊥ ΑΓ, επομένως και ΜΔ ⊥ ΑΓ. Άρα, το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΜΓ, οπότε ΑΜ = ΜΓ, δηλαδή $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$.

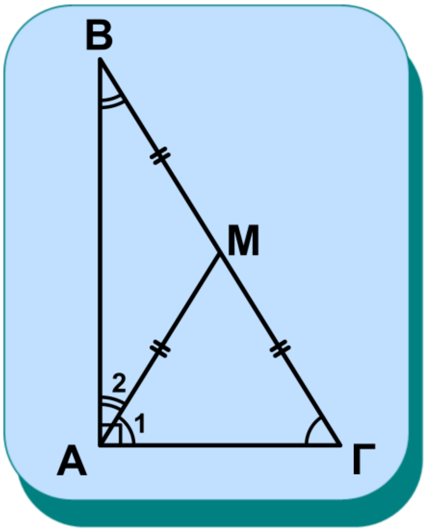
Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Θεώρημα ΙΙ

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.31). Αν $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$, θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{Α}$ είναι ορθή. Επειδή $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ έχουμε ΑΜ = ΜΓ, οπότε $\hat{Α}_1 = \hat{Γ}$ (1) και ΑΜ = ΜΒ, οπότε $\hat{Α}_2 = \hat{Β}$ (2).



Σχήμα 31

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{Α}_1 + \hat{Α}_2 = \hat{Β} + \hat{Γ}$, δηλαδή $\hat{Α} = \hat{Β} + \hat{Γ}$.

Αλλά $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 2∟$, οπότε $2\hat{Α} = 2∟$ ή $\hat{Α} = 1∟$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90°$) με $\hat{Β} = 30°$ (σχ.32).

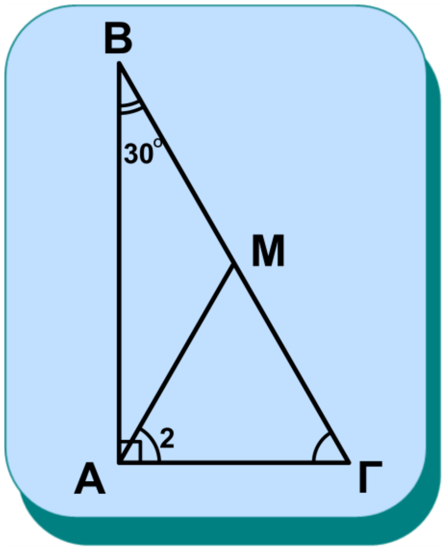
Θα αποδείξουμε ότι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

28 / 109-110

Επειδή $\hat{B} = 30°$, είναι $\hat{\Gamma} = 90° - 30° = 60°$.

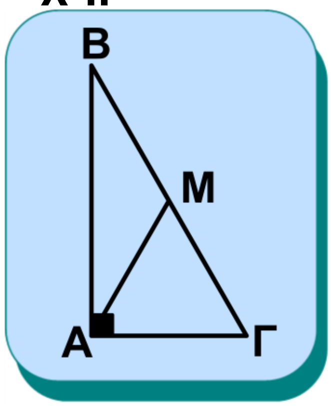
Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και είναι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$. Έτσι $\hat{A}_2 = \Gamma = 60°$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως $A\Gamma = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

$AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$. Έτσι $\hat{A}_2 = \Gamma = 60°$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως $A\Gamma = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.



Σχήμα 32

Αντίστροφο, αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ (σχ.33), θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} = 30°$.



Σχήμα 33

Απόδειξη

Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, οπότε

$AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma = A\Gamma$ (αφού $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$).

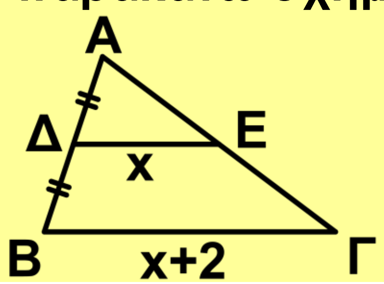
Άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma} = 60°$

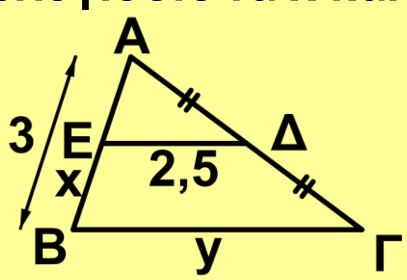
Επομένως $\hat{B} = 90° - 60° = 30°$.

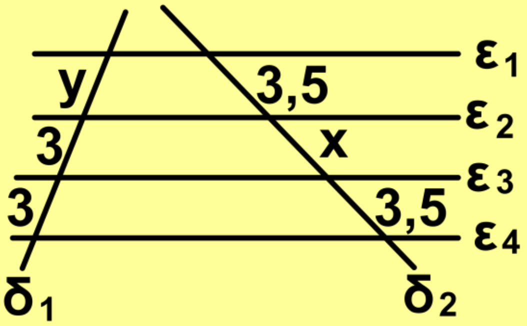
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

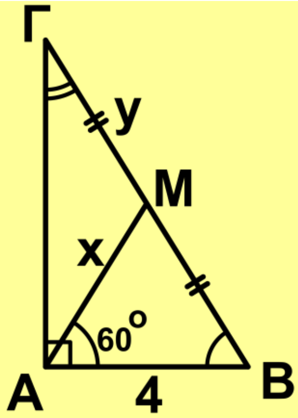
Ερωτήσεις Κατανόησης

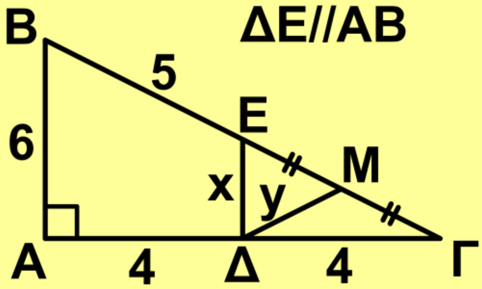
1. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x και y.

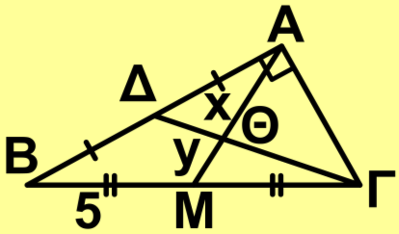




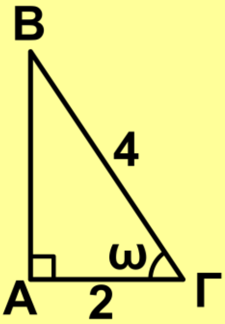


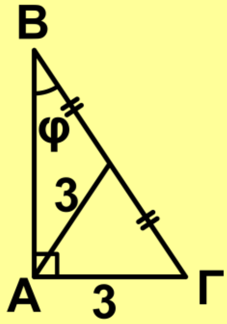


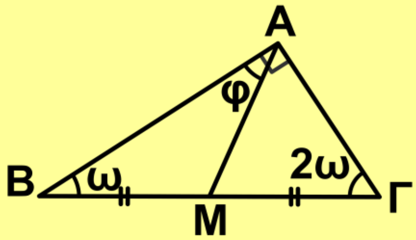


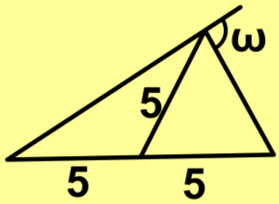


2. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες φκαι ω.



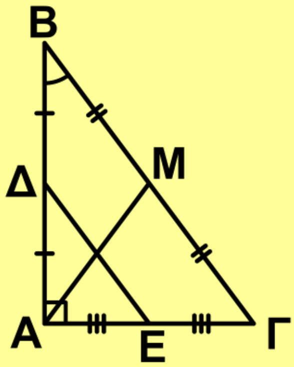






3. Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο ταυτίζονται;

4. Στο διπλανό σχήμα να δικαιολογήσετε την ισότητα ΑΜ = ΔΕ.



5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ

($\hat{A} = 90°$) ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ διέρχεται από το Α; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ και Ζ τυχαίο σημείο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΔΕ διχοτομεί την ΑΖ.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Αν Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι ΕΖ=ΑΓ.

5. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$,να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$.

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Προεκτείνουμε τη ΓΑ κατά τυχαίο τμήμα ΑΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΗ ⊥ ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΓΕ ⊥ ΔΒ.

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΕΔ. Να αποδείξετε ότι το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και το ύψος του ΑΔ.

i) Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = \hat{A} = 90°$.

ii) Αν Μ είναι το μέσο της ΕΖ, να αποδείξετε ότι ΔΜ = $\dfrac{B\Gamma}{4}$.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε και Ζ των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Η, να αποδείξετε ότι
$ΓΗ = \frac{ΑΓ}{4}$.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90°$) με $\hat{Β} > \hat{Γ}$ φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $Μ\hat{Α}Δ = \hat{Β} - \hat{Γ}$.

4. Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ.

5. Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΑΕ και ΑΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΒΔ.

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, Δ είναι το μέσο της διαμέσου ΑΜ. Αν η ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι
$ΑΕ = \frac{ΕΓ}{2}$.

7. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΑΒ. Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Η και τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι i) ΒΖ = ΖΓ, ii) $ΓΗ = \frac{ΑΗ}{2}$.

8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β} = 30°$ η κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι:
i) ΜΔ = ΑΔ, ii) $ΜΔ = \frac{ΑΒ}{3}$.

9. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η, Κ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΕΗ \perp ΚΖ$.

10. Τρία χωριά που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία ανήκουν στον ίδιο δήμο. Ο δήμος αποφασίζει να κατασκευάσει δρόμο (ευθεία), ο οποίος να ισαπέχει από τα τρία χωριά. Πώς θα γίνει η χάραξη του δρόμου; Πόσοι τέτοιοι δρόμοι υπάρχουν;

Σύνθετα θέματα

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{E}Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) φέρουμε το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι αν $\hat{B} = 15°$, τότε $A\Delta = \dfrac{B\Gamma}{4}$ και αντίστροφα. (Υπόδειξη: Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ).

3. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ θεωρούμε το βαρύκεντρο Κ του τριγώνου ΑΒΓ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΓΔ και ΚΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΕΗ//ΚΖ.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} < 90°$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΔ. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ διχοτομεί την πλευρά ΑΓ.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και Μ το μέσο της ΒΓ. Αν Ε είναι η προβολή του Β στη διχοτόμο ΑΔ, να αποδείξετε ότι:

i) ΕΜ//ΑΓ , ii) $EM = \dfrac{A\Gamma - AB}{3}$, iii) $\Delta\hat{E}M = \dfrac{\hat{A}}{2}$

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΒΔ και Μ το μέσο του τμήματος ΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΔΒ. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το Μ στην ΑΒ, η κάθετη από το Α στην ΕΓ και η ΒΔ συντρέχουν.

7. Αν Κ και Λ είναι οι προβολές της κορυφής Α τριγώνου ΑΒΓ στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) Το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο.

ii) Η ευθεία ΚΛ διέρχεται από το μέσο της ΑΓ.

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) το ύψος του ΑΔ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν Ε, Ζ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

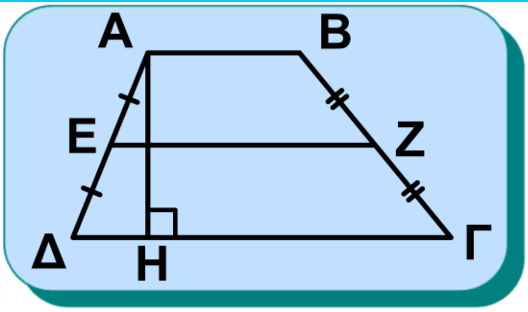
i) ΑΔ = ΕΖ,
ii) ΑΜ ⊥ ΕΖ,
iii) Η διάμεσος ΑΜ το τμήμα ΔΖ και η παράλληλη προς την ΕΖ από το Β συντρέχουν.

Τραπέζια

5.10 Τραπέζιο

Ορισμός

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Σχήμα 34

Οι παράλληλες πλευρές ΑΒ και ΓΔ (σχ.34) του τραπεζίου ΑΒΓΔ λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου.
Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου.

Θεώρημα Ι

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

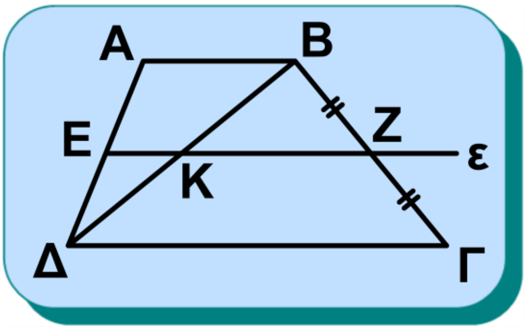
Δηλαδή, αν ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ, τότε:

i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ και ii) $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) (σχ.35), τη διαγώνιο του ΒΔ και Ε το μέσο της ΑΔ. Από το Ε φέρουμε ευθεία ε παράλληλη των ΑΒ και ΓΔ που τέμνει τις ΒΔ και ΒΓ στα Κ και Ζ αντίστοιχα.

Τότε: Στο τρίγωνο ΑΒΔ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΚ//ΑΒ, οπότε το Κ είναι το μέσο της ΒΔ και $ΕΚ = \frac{ΑΒ}{2}$ (1).



Σχήμα 35

Επίσης στο τρίγωνο ΒΔΓ το Κ είναι μέσο της ΒΔ και ΚΖ//ΓΔ, οπότε το Ζ είναι το μέσο της ΒΓ και $ΚΖ = \frac{ΓΔ}{2}$ (2).

Επομένως η ΕΖ είναι διάμεσος του τραπεζίου και i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ (από κατασκευή).

ii) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

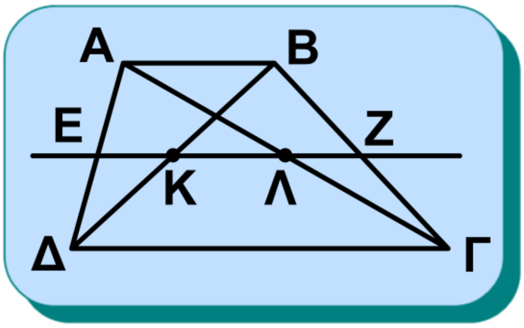
$ΕΚ + ΚΖ = \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΓΔ}{2}$ ή $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

Απόδειξη

Αποδείξαμε παραπάνω ότι το Κ είναι μέσο της ΒΔ (σχ.35). Όμοια, αν φέρουμε την ΑΓ (σχ.36), στο τρίγωνο ΑΔΓ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΛ // ΓΔ, οπότε το Λ είναι μέσο της ΑΓ και $ΕΛ = \frac{ΓΔ}{2}$ (3).



Σχήμα 36

Επομένως, η διάμεσος ΕΖ του τραπεζίου διέρχεται απότα μέσα Κ, Λ των διαγωνίων του και προφανώς

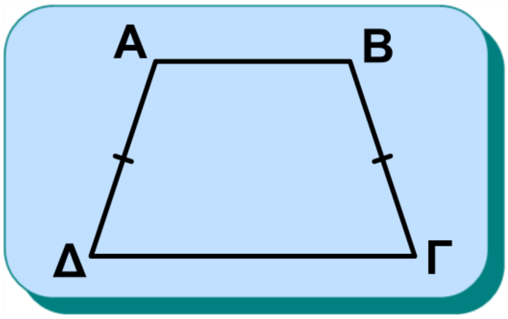
ΚΛ // ΑΒ, ΓΔ. Επίσης από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

$$ΕΛ - ΕΚ = \frac{ΓΔ}{2} - \frac{ΑΒ}{2} \text{ ή } ΚΛ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2} \quad (\text{με } ΓΔ > ΑΒ).$$

5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

Ορισμός

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.



Σχήμα 37

• Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

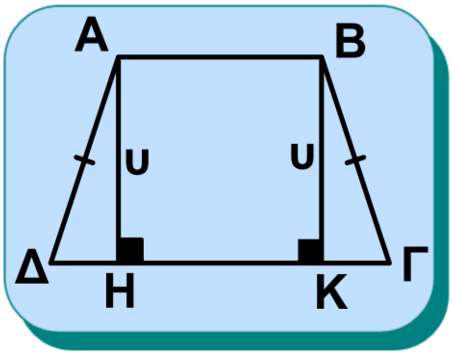
Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:
(i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
(ii) Οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

Απόδειξη

(i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ).

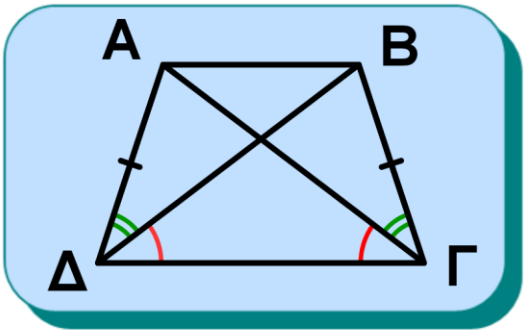
Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα

($\hat{Η} = \hat{Κ} = 90°$, ΑΔ = ΒΓ και ΑΗ = ΒΚ = υ), οπότε $\hat{Γ} = \hat{Δ}$. Επειδή $\hat{Α} + \hat{Δ} = 180°$ και $\hat{Β} + \hat{Γ} = 180°$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{Α} = \hat{Β}$



Σχήμα 38

(ii) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ (σχ. 39)είναι ίσα (ΑΔ = ΒΓ, ΓΔ κοινή και $Α\hat{Δ}Γ = Β\hat{Γ}Δ$), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



Σχήμα 39

• Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάνω προτάσεις.

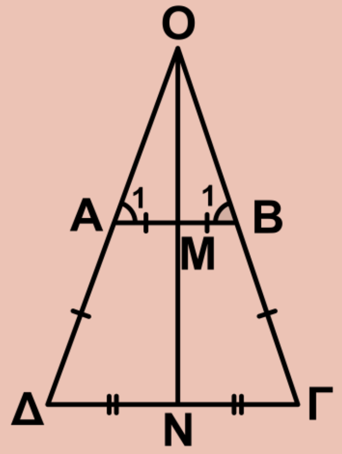
(i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
(ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο:
(i) αν προεκτείνουμε τις μη παράλληλες πλευρές του σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα,
(ii) η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι μεσοκάθετος της κάθε βάσης.

Απόδειξη

(i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ) (Σχ. 40) και Ο το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ είναι ισοσκελή, αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο).
(ii) Η μεσοκάθετος ε της βάσης ΑΒ διέρχεται από το Ο, επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Η ε είναι κάθετος και στη ΓΔ επειδή ΓΔ//ΑΒ. Αφού η ε διέρχεται από το Ο, είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΟΓΔ, άρα μεσοκάθετος και στη ΓΔ.

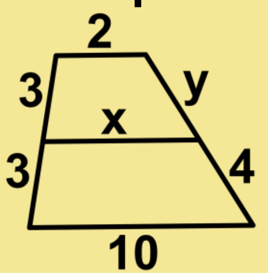


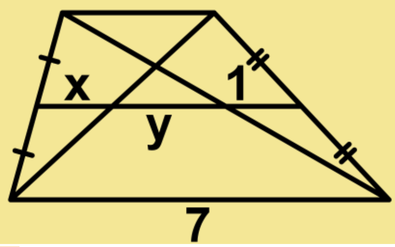
Σχήμα 40

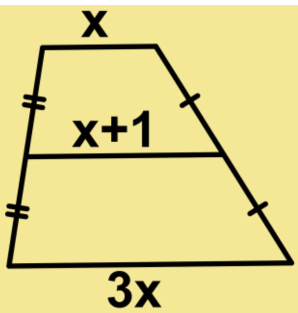
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

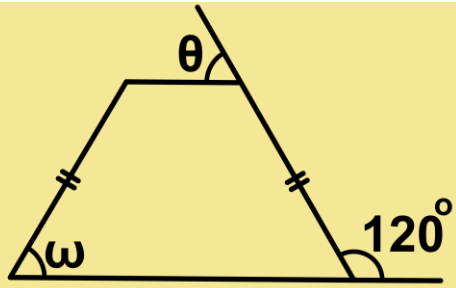
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Από τα παρακάτω τραπέζια να βρείτε τα x, y, ω και θ.





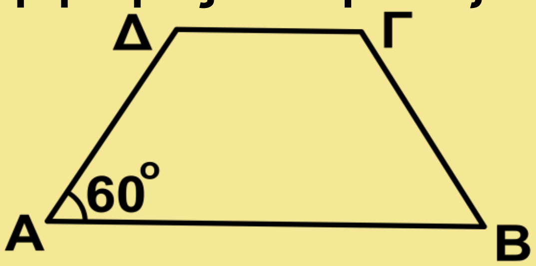




2. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο;

3. Τι ονομάζεται διάμεσος τραπεζίου; Ποιες ιδιότητες έχει;

4. Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι: ΑΒ = 5x, ΔΓ = 3x και $\hat{A}$ = 60°. Η περίμετρος του τραπεζίου είναι:



i) 10x ii) 11x iii) 12x iv)13x v)14x

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και η διάμεσός του ΕΖ. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Κ και Η, Θ είναι τα μέσα των ΚΑ και ΚΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ, Η, Θ είναι κορυφές τραπεζίου.

2. Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

3. Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) τέμνονται στο Ο. Αν Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ,ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το ύψος του ΑΕ. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

5. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με

ΑΒ < ΓΔ και τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΓΖ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2}$.

6. Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία ε που δεν τέμνει το τρίγωνο και ας είναι ΒΒ΄ και ΓΓ΄ οι αποστάσεις των Β και Γ από την ευθεία ε. Αν Μ είναι το μέσο της Β΄Γ΄ και Κ το μέσο της διαμέσου ΑΔ να αποδείξετε ότι $ΜΚ = \frac{ΑΔ}{2}$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ(ΑΒ//ΓΔ) η διχοτόμος της γωνίας του Β τέμνει τη διάμεσο του ΕΖ στο Η. Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Η}Γ = 90°$.

2. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) Μ είναι το μέσο της ΑΒ. Αν η μεσοκάθετος της ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη από το Ζ προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Η, να αποδείξετε ότι ΓΗ = ΑΖ.

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90°$ και $\hat{Β} = 120°$. Αν ΑΒ = 2α και ΒΓ = α να υπολογίσετε τη διάμεσο ΕΖ, ως συνάρτηση του α.

4. Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $Α\hat{Μ}Δ = 90°$.

5. Από το μέσο Ε της πλευράς ΒΓ ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ που τέμνει τη ΔΓ στο Μ. Να αποδείξετε ότι $ΒΜ \perp ΔΓ$.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

7. Αν σε τραπέζιο η μία βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.

8. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ = 3ΑΒ και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ΑΚΛΒ είναι παραλληλόγραμμο.
Πότε αυτό είναι ορθογώνιο;

9. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ = $\frac{3}{2}$ ΑΒ. Αν Ε, Ζ, Η είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Αν η προέκταση της ΑΗ τέμνει τη ΓΔ στο Θ, τότε
ΘΔ = ΔΓ - ΑΒ.

10. Αν Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Κ΄ είναι οι προβολές των κορυφών και του κέντρου Κ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα σε ευθεία ε που αφήνει όλες τις κορυφές του προς το ίδιο μέρος της, να αποδείξετε ότι
ΑΑ΄ + ΒΒ΄ + ΓΓ΄ + ΔΔ΄ = 4ΚΚ΄.

Σύνθετα θέματα

1. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) έχουμε ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ τέμνονται στη ΒΓ.

2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$ και ΒΓ = 2ΓΔ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι
$A\hat{M}\Gamma = 3M\hat{A}B$.

3. Μια ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή Δ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και έχει εκατέρωθεν αυτής τις κορυφές Β και Γ. Αν Α΄, Β΄ και Γ΄ οι προβολές των Α, Β και Γ αντίστοιχα στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι ΑΑ΄ - ΓΓ΄ = ΒΒ΄ (με ΑΑ΄> ΓΓ΄).

4. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Από το μέσο Ζ του ΑΔ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΓ που τέμνει τη ΒΓ στο Η. Αν ΖΗ = $\frac{3}{8}$ ΒΓ ,να υπολογισθεί η γωνία $\hat{B}$.

5. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ < ΓΔ, έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι

i) αν ΔΜ = ΔΓ και η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει τη ΔΜ στο Ε, τότε ΑΜ = ΒΕ,

ii) αν Ε είναι το μέσο της ΔΜ, τότε ΑΕ = $\frac{3}{4}$ ΒΓ.

5.12 Αξιοσημείωτες ευθείες και κύκλοι τριγώνου

Είδαμε προηγούμενα (§4.5 και §5.7 - §5.8) ότι σε ένα τρίγωνο οι μεσοκάθετοι των πλευρών του, οι διχοτόμοι των γωνιών του, οι διάμεσοι και τα ύψη του αποτελούν τριάδες συντρεχουσών ευθειών.

Ανακεφαλαιώνοντας, σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ αποδείξαμε ότι **διέρχονται από το ίδιο σημείο:**

● Οι μεσοκάθετοι των τριών πλευρών του. Το κοινό σημείο Ο λέγεται **περίκεντρο** του ΑΒΓ και ο κύκλος (Ο,ΟΑ) λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.

● Οι διχοτόμοι των τριών γωνιών του. Το κοινό σημείο Ι λέγεται
έγκεντρο του ΑΒΓ και ο κύκλος με κέντρο το Ι και ακτίνα την
κοινή απόσταση του Ι από τις τρεις πλευρές του, λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.

● Οι τρεις διάμεσοί του. Το κοινό σημείο τους Θ λέγεται **βαρύκεντρο** του ΑΒΓ.

● Τα τρία ύψη του. Το κοινό σημείο τους Η λέγεται **ορθόκεντρο** του ΑΒΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

Για να αποδείξουμε ότι υπάρχουν κάποια από τα αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου (βαρύκεντρο, ορθόκεντρο κτλ.) καθώς και τις βασικές τους ιδιότητες χρησιμοποιήσαμε τη θεωρία των παραλληλογράμμων που στηρίζεται στο αίτημα παραλληλίας (§ 4.2).

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (β ή γ) με $\hat{A}$ = 60°, τα ύψη του

ΒΔ, ΓΕ και τα μέσα Μ, Ν των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΜΕ = ΝΔ.

2. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και σημείο Α της $ε_1$. Φέρουμε
$AK \perp ε_2$. Αν Β σημείο της $ε_2$ και μια ευθεία, που διέρχεται από το Β, τέμνει τις ΑΚ και $ε_1$ στα Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΔΕ = 2ΑΒ, να αποδείξετε ότι $A\hat{B}K = 3E\hat{B}K$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, Δ το μέσο της ΑΒ και σημείο Ε της ημιευθείας ΔΒ, ώστε $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2}$. Από τα Β και Ε φέρουμε κάθετες στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, οι οποίες τέμνουν την ΑΓ στα Β΄ και Ε΄ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) $Β΄Ε΄ = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$.

ii) Η ευθεία ΕΕ΄ διέρχεται από το μέσο της ΒΓ.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ, $\hat{B} > 60°$ και το ύψος του ΑΕ προς τη ΒΓ ($AE \perp BΓ$). Αν Ζ, Η είναι τα μέσα των ΓΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) το ΗΒΓΖ είναι ρόμβος,

ii) η ΖΕ είναι διχοτόμος της $H\hat{E}Γ$,

iii) το ΗΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο,

iv) $Δ\hat{Z}E = 3Z\hat{E}Γ$.

5. Ευθεία ε αφήνει τις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ προς το ίδιο μέρος της. Αν Α΄, Β΄, Γ΄, Κ΄ οι προβολές των Α, Β, Γ και του βαρυκέντρου Κ αντίστοιχα στην ε, να αποδείξετε ότι ΑΑ΄ + ΒΒ΄ + ΓΓ΄ = 3ΚΚ΄.

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Δ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε $ΔE \perp AΓ$. Αν Ζ το μέσο του ΕΓ, να αποδείξετε ότι:

i) ΔΖ//ΒΕ,

ii) $AH \perp BE$, όπου Η το μέσο του ΔΕ.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Κ και Λ είναι τα κέντρα των ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

8. Δίνεται τετράγωνο πλευράς α και κέντρου Ο. Στη διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Μ, ώστε $ΓΜ = \frac{ΑΓ}{4}$. Φέρουμε τη ΒΜ που τέμνει τη ΓΔ στο Ε και ΟΗ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη ΒΕ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι: i) $ΟΖ = \frac{α}{3}$, ii) το ΟΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

9. Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα στο Ο. Αν Κ, Λ τα μέσα των βάσεων ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) τα σημεία Ο, Κ, Λ είναι συνευθειακά,

ii) $ΚΛ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2}$ (με ΔΓ > ΑΒ).

iii) αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, τότε το ΚΕΛΖ είναι ορθογώνιο.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ και το μέσο Μ του ΕΔ. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του Μ από τη ΒΓ είναι ίση με το άθροισμα των αποστάσεών του από τις ΑΒ, ΑΓ.

Δραστηριότητες

1. Δύο αδέλφια κληρονόμησαν ένα οικόπεδο σχήματος παραλληλογράμμου, το οποίο έχει την πλευρά ΑΒ παράλληλη προς δημόσιο δρόμο που διέρχεται μπροστά από το οικόπεδο. Πώς θα μοιρασθεί δίκαια το οικόπεδο μεταξύ των δύο αδελφών;

2. Έχουμε 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Τοποθετώντας κατάλληλα το ένα τρίγωνο δίπλα στο άλλο, τι είδους τετράπλευρα κατασκευάζουμε; Να γίνουν τα σχήματα.

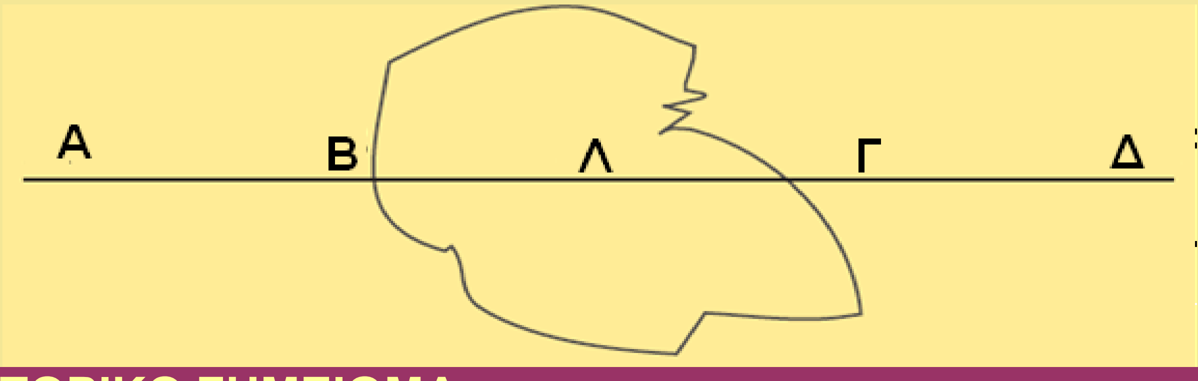
3. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα έχουν κέντρο συμμετρίας, ποια έχουν άξονες συμμετρίας και πόσους. Να γίνουν τα σχήματα και να βρεθεί το συμμετρικό των κορυφών τους και των πλευρών τους.

i) παραλληλόγραμμο iv) τετράγωνο
ii) ορθογώνιο v) τραπέζιο
iii) ρόμβος vi) ισοσκελές τραπέζιο

4. Θεωρούμε ευθεία ε και ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να υπολογίσετε την απόσταση του μέσου Μ του τμήματος, ως συνάρτηση των αποστάσεων των άκρων του Α και Β από την ευθεία ε (Υπόδειξη: Να διακρίνετε περιπτώσεις για τις διάφορες θέσεις των Α και Β ως προς την ευθεία ε).

Εργασία

Σε μια πεδιάδα υπάρχει λόφος Λ, τον οποίο πρόκειται να διασχίσει **ευθεία** σιδηροδρομική γραμμή ΑΒΓΔ. Πώς ο μηχανικός θα χαράξει την προέκταση ΓΔ αυτής πίσω από το λόφο, πριν να γίνει η διάνοιξη της σήραγγας;



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η έννοια του τετραπλεύρου

Η πρώτη υποδιαίρεση των τετραπλεύρων σήμερα είναι σε επίπεδα και στρεβλά, ανάλογα με το αν οι κορυφές τους βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή όχι. Τα επίπεδα τετράπλευρα, με τη σειρά τους, υποδιαιρούνται σε κυρτά και μη κυρτά, ανάλογα με το αν η κάθε πλευρά τους αφήνει το σχήμα εξ ολοκλήρου στο ένα από τα δύο ημι-επίπεδα που ορίζει η πλευρά αυτή ή όχι. Μία ειδική περίπτωση επιπέδου κυρτού τετραπλεύρου είναι το παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του οποίου είναι παράλληλες. Τέλος, διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων (Διάγραμμα 1):

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

επίπεδο (έχει όλες τις πλευρές του στο ίδιο επίπεδο)

στρεβλό

κυρτό (για κάθε πλευρά το τετράπλευρο ανήκει στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η πλευρά)

μη κυρτό

παραλληλόγραμμο (έχει απέναντι πλευρές παράλληλες)

ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (έχει τέσσερις γωνίες ορθές)

Ρόμβος (έχει τέσσερις πλευρές ίσες)

τετράγωνο (έχει τέσσερις γωνίες ορθές και τέσσερις πλευρές ίσες)

Διάγραμμα 1: Η σύγχρονη ταξινόμηση των τετραπλεύρων

(α) το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που έχει τέσσερις γωνίες ορθές.

(β) ο ρόμβος που έχει τέσσερις πλευρές ίσες,

(γ) το τετράγωνο, που έχει τέσσερις γωνίες ορθές και τέσσερις πλευρές ίσες.

Όμως η ταξινόμηση αυτή δε διαμορφώθηκε εξ αρχής στην ιστορία της Γεωμετρίας. Ο Ευκλείδης π.χ. στα

«Στοιχεία» του προτείνει μια άλλη ταξινόμηση (Διάγραμμα 2).

τετράπλευρο

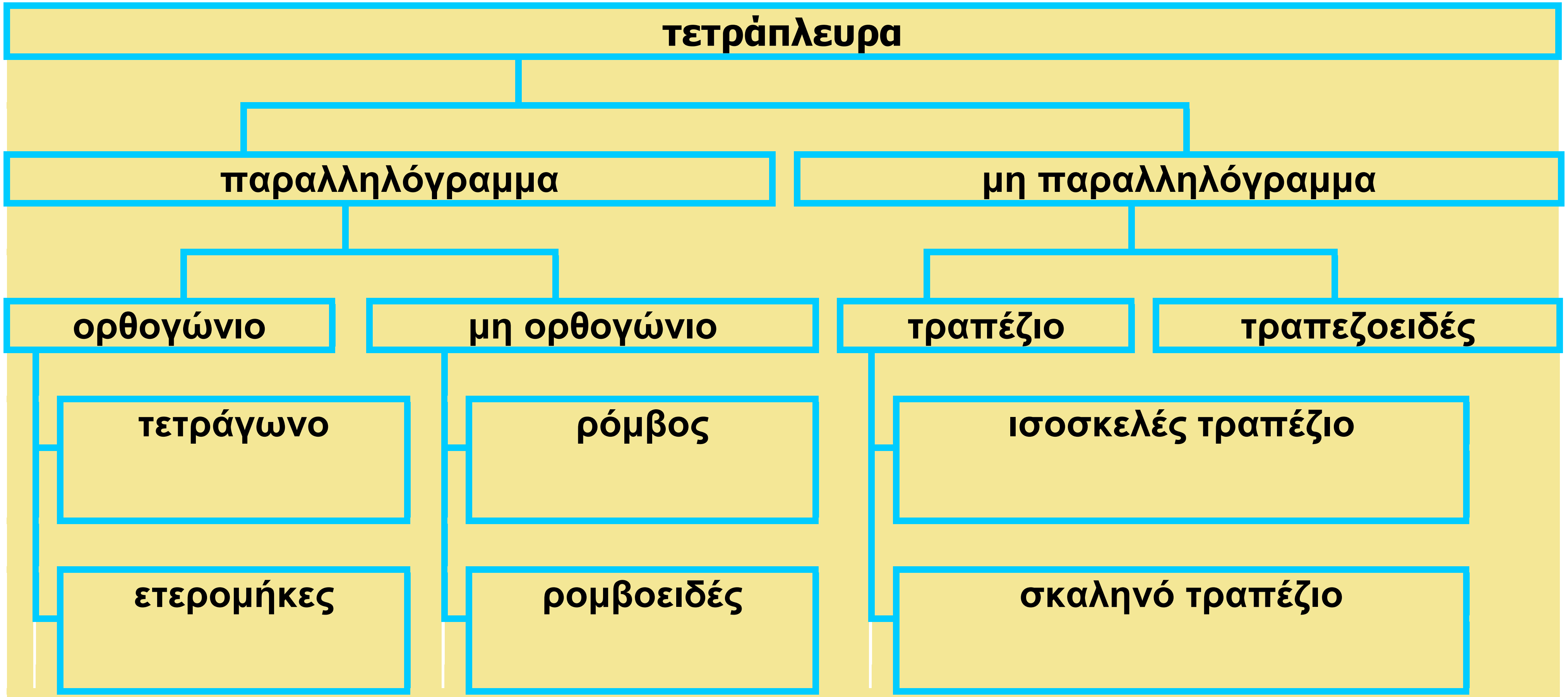
- **Τετράγωνο (ισόπλευρο και ορθογώνιο)**
- **τραπέζιο**
- **ετερομήκες (ορθογώνιο όχι ισόπλευρο)**
- **ρόμβος (ισόπλευρο όχι ορθογώνιο)**
- **ρομβοειδές (έχει ίσες τις απέναντι πλευρές και γωνίες)**

Διάγραμμα 2: Η Ευκλείδεια ταξινόμηση των τετραπλεύρων

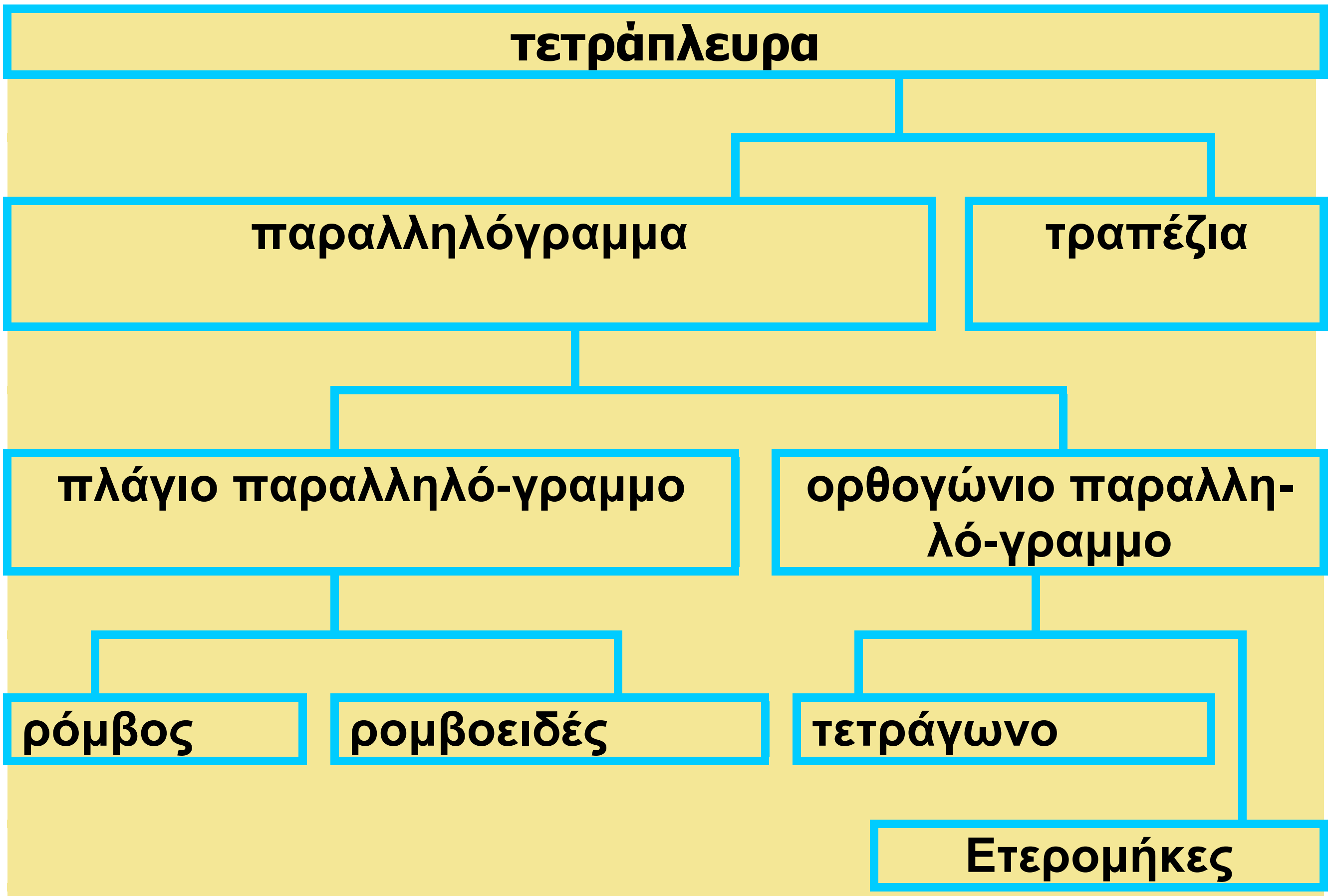
Η ταξινόμηση αυτή δε χρησιμοποιεί ως κριτήριο την έννοια της παραλληλίας, η οποία στα «Στοιχεία» εισάγεται αργότερα.

Επίσης δε φαίνεται να στηρίζεται σε κάποια ενιαία αρχή. Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις φαίνεται ότι λαμβάνει ως βάση τα κατηγορήματα «έχει ίσες πλευρές» και «έχει ορθές γωνίες» και τις αρνήσεις τους: ορθογώνιο και ισόπλευρο είναι το τετράγωνο,ορθογώνιο και όχι ισόπλευρο το ετερομήκες (δηλαδή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο), ισόπλευρο και όχι ορθογώνιο ο ρόμβος. Όμως, η έννοια του ρομβοειδούς (δηλαδή του πλάγιου παραλληλογράμμου) στηρίζεται στην έννοια

της ισότητας των απέναντι πλευρών και των γωνιών και όχι στην παραλληλία των απέναντι πλευρών. Τραπέζιο ονομάζει όχι ό,τι σήμερα εννοούμε με τον όρο αυτό, δηλαδή τετράπλευρο με δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αλλά οποιοδήποτε τετράπλευρο. Ο όρος τραπέζιο, με τη σύγχρονη έννοια, απαντάται αργότερα στον Αρχιμήδη.
Η ταξινόμηση όμως αυτή αποδεικνύεται μη λειτουργική και μάλλον άβολη. Ο ίδιος ο Ευκλείδης μάλιστα δε χρησιμοποιεί ποτέ στα «Στοιχεία» του τις έννοιες του ετερομήκους, του ρόμβου και του ρομβοειδούς. Παρόλα αυτά, η ταξινόμηση αυτή απαντάται και σε μεταγενέστερους μαθηματικούς, ακόμα και του Αραβικού κόσμου, όπως π.χ. στη διαπραγμάτευση της Γεωμετρίας του αλ-Χουαρίζμι. Όμως υπήρχαν και μαθηματικοί που προσπάθησαν να τροποποιήσουν την ταξινόμηση του Ευκλείδη. Ο Πρόκλος αποδίδει στον Ποσειδώνιο μια πιο ολοκληρωμένη ταξινόμηση, η οποία απαντάται επίσης στον Ήρωνα (Διάγραμμα 3).
Μια άλλη προσπάθεια διόρθωσης της Ευκλείδειας ταξινόμησης απαντάται το 16ο αι. στη «Γεωμετρία» (1569) του Πέτρου Ράμου (Petrus Ramus ή Pierre de la Ramee) (Διάγραμμα 4). Η ταξινόμηση του Ράμου φαίνεται να στηρίζεται στη διχοτομική διαίρεση του πλάτους των εννοιών.



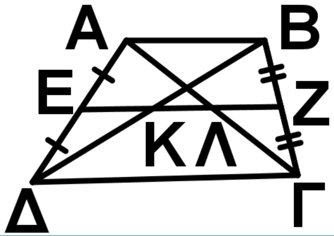
Διάγραμμα 3: Η ταξινόμηση των τετραπλεύρων κατά τον Ποσειδώνιο και τον Ή-ρωνα



Διάγραμμα 4: Η ταξινόμηση του Ράμου

έχει δυο παράλληλες πλευρές

Τραπέζιο

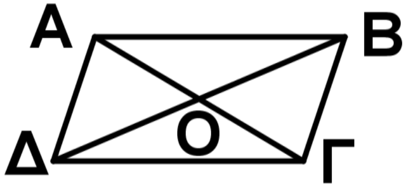


Ιδιότητες

- ΕΖ//ΑΒ//ΓΔ
- $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$
- $ΚΛ = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$

απέναντι πλευρές παράλληλες

Παραλληλόγραμο



Ιδιότητες

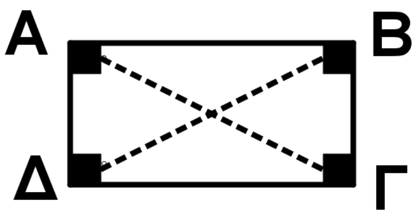
- ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ
- ΑΒ=ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ
- $\hat{Α} = \hat{Γ}$ και $\hat{Β} = \hat{Δ}$
- ΑΟ=ΟΓ και ΒΟ=ΟΔ

Κριτήρια

- Κάθε μια από τις ιδιότητες
- Δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες

παραλληλόγραμο με μια ορθή γωνία

Ορθογώνιο



Επιπλέον Ιδιότητες

- **ΑΓ = ΒΔ**
- **$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^{o}$**

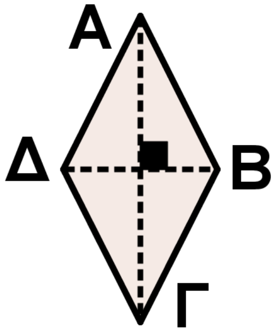
Κριτήρια

Είναι παραλλλόγραμο και επιπλέον έχει:

- **μια γωνία ορθή**
- **ΑΓ = ΒΔ**

παραλλλόγραμο με δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες

ρόμβος



Επιπλέον Ιδιότητες

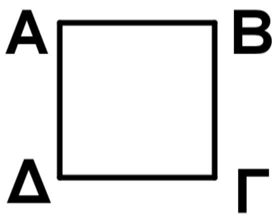
- **ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ**
- **ΑΓ ⊥ ΒΔ**
- **οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του**

Κριτήρια

Είναι παραλλλόγραμο και επιπλέον έχει:

- **Δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες**
- **ΑΓ ⊥ ΒΔ**
- **Μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία του**

τετράγωνο

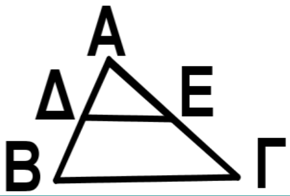


Ιδιότητες

- Όλες οι ιδιότητες του παραλλο-γράμμου, του ορθογωνίου και του ρόμβου.

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

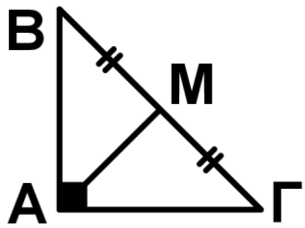
Τρίγωνο



Αν Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΑΓ τοτε $ΔΕ // = \frac{ΒΓ}{2}$

Αν Δ μέσον ΑΒ και ΔΕ//ΒΓ τότε Ε μέσον ΑΓ

Ορθογώνιο Τρίγωνο

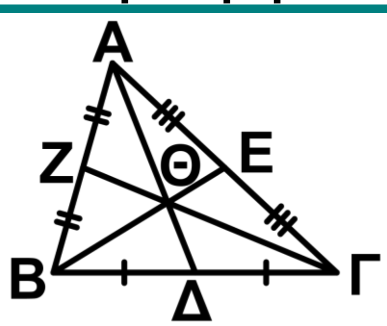


Αν $\hat{A} = 90^o \Leftrightarrow AM = \frac{ΒΓ}{2}$

Αν $\hat{A} = 90^o$ **τότε:**

$\hat{B} = 30^o \Leftrightarrow ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$

Βαρύκενρο Τρίγωνο



$ΑΘ = \frac{2}{3} ΑΔ, \quad ΒΘ = \frac{2}{3} ΒΕ$

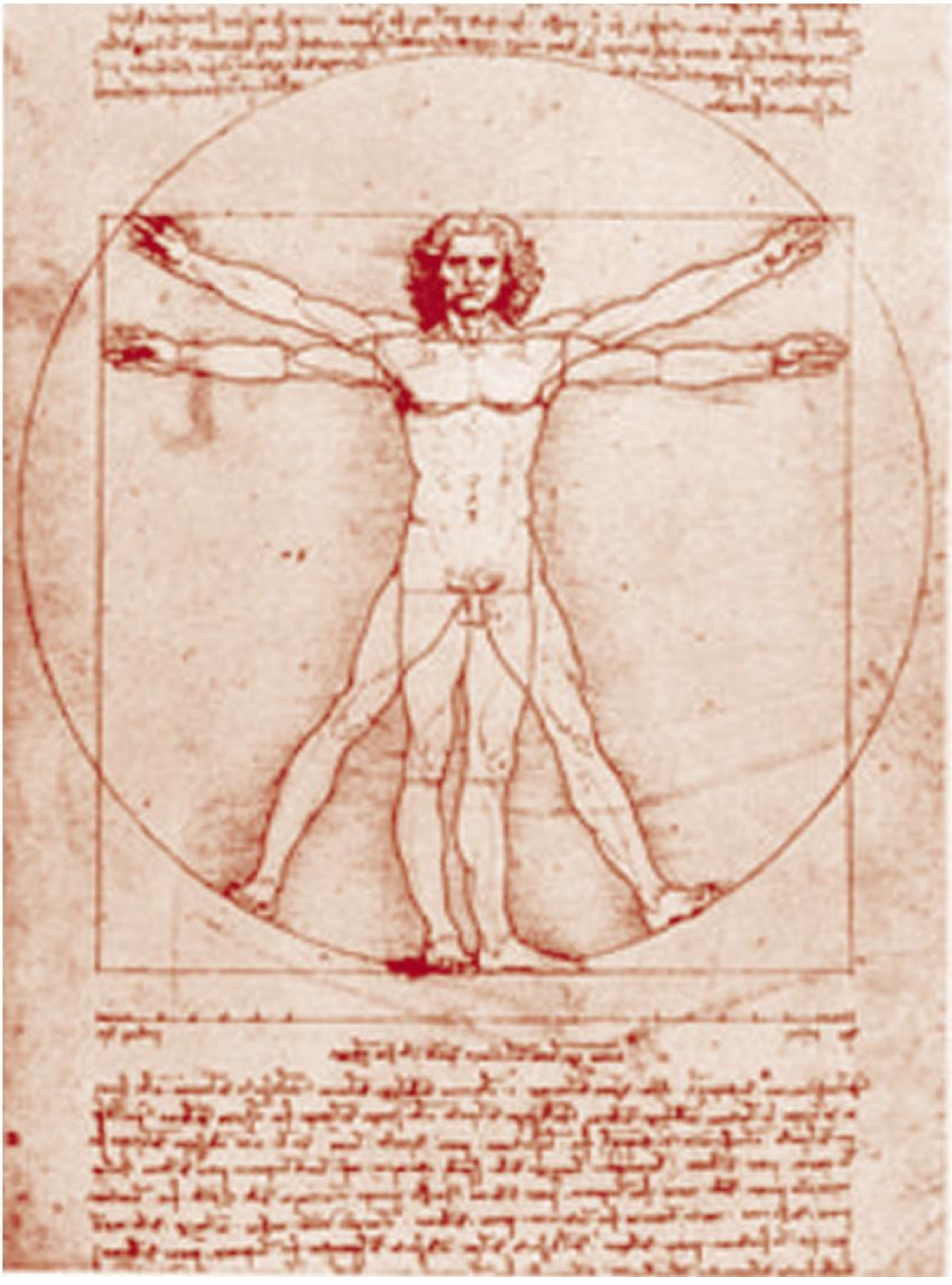
$ΓΘ = \frac{2}{3} ΓΖ$

Ορθόκεντρο τριγώνου → Σημείο τομής υψών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εγγεγραμμένα Σχήματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αρχικά την έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας και τη σχέση της με την αντίστοιχη επίκεντρη καθώς και με τη γωνία χορδής και εφαπτομένης. Έτσι, θα μας δοθεί η δυνατότητα αναλυτικής μελέτης βασικών γεωμετρικών τόπων στον κύκλο. Τέλος, θα μελετήσουμε τα εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα καθώς και συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές που γίνονται με τη βοήθεια γεωμετρικών τόπων.

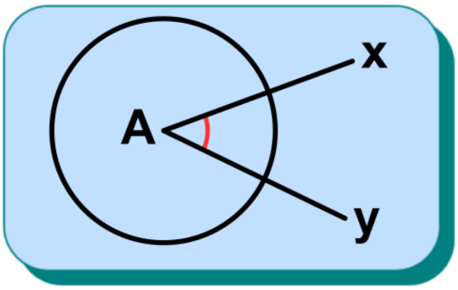


Σχέδιο και σημειώσεις του Ιταλού ζωγράφου της Αναγέννησης Leonardo da Vinci (1452-1519), από το Architectura de Vitruve, περίπου 1492.

Εγγεγραμμένη γωνία

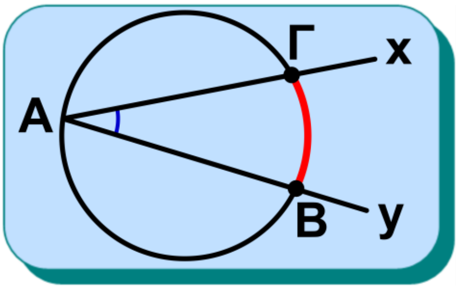
6.1 Εισαγωγικά - Ορισμοί

Δίνεται μία κυρτή γωνία $x\hat{A}y$ και ένας κύκλος (O,R). Οι σχετικές θέσεις τους καθορίζονται από τη θέση της κορυφής της και των πλευρών της:



Σχήμα 1

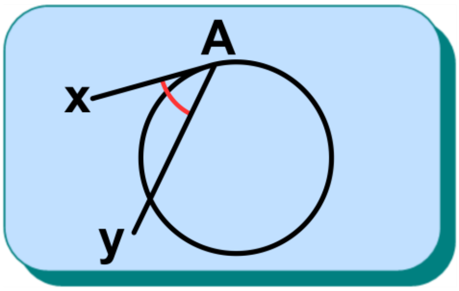
(i) Αν η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου (σχ.1), τότε η γωνία λέγεται επίκεντρη, όπως είδαμε στη § 2.18.



Σχήμα 2

(ii) Αν η κορυφή (σχ.2) είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουσες του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη** γωνία του κύκλου.

Το τόξο ΒΓ που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της ή διαφορετικά λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A}$ **βαίνει** στο τόξο ΒΓ.



Σχήμα 3

(iii) Αν η κορυφή είναι σημείο του κύκλου, η μία της πλευρά είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου (σχ.3), τότε η γωνία λέγεται **γωνία χορδής και εφαπτομένης.**

6.2 Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης

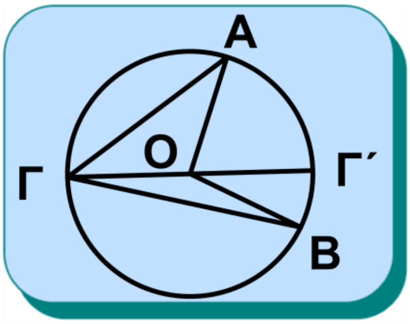
Η σχέση μίας εγγεγραμμένης και μίας επίκεντρης γωνίας που βαίνουν στο ίδιο τόξο δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Απόδειξη

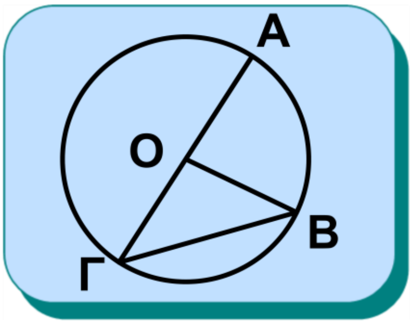
Έστω κύκλος (Ο,R) και ένα τόξο του $\overset{\frown}{AB}$. Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Τότε θα αποδείξουμε ότι $A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$.



Σχήμα 4α

(i) Ας μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο Ο του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ (σχ.4α). Έστω Γ΄ το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ. Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές, επομένως $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A$. Η $\Gamma'\hat{O}A$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΟΓ, επομένως $\Gamma'\hat{O}A = 2O\hat{\Gamma}A$ και όμοια έχουμε ότι $\Gamma'\hat{O}B = 2O\hat{\Gamma}B$.

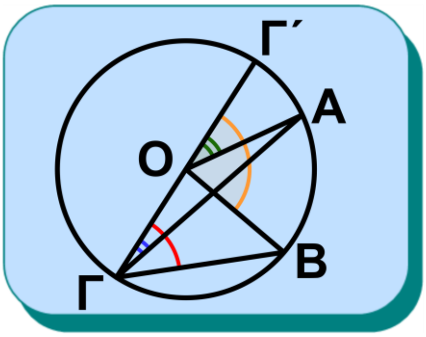
Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ισότητες έχουμε ότι
$A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$.



Σχήμα 4β

(ii) Ας εξετάσουμε κατόπιν την περίπτωση όπου το Ο ανήκει σε μία πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ (σχ.4β). Η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΓΟΒ, οπότε $A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$.

(iii) Όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις (σχ.4γ).



Σχήμα 4γ

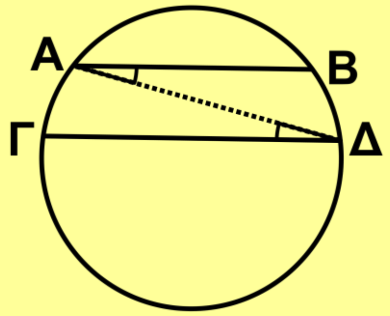
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

(i) Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

(ii) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
(iii) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.

ΣΧΟΛΙΟ

Από το πόρισμα (iii) συμπεραίνουμε εύκολα ότι τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παράλληλων χορδών είναι ίσα (σχ.5) και αντίστροφα.



Σχήμα 5

6.3 Γωνία χορδής και εφαπτομένης

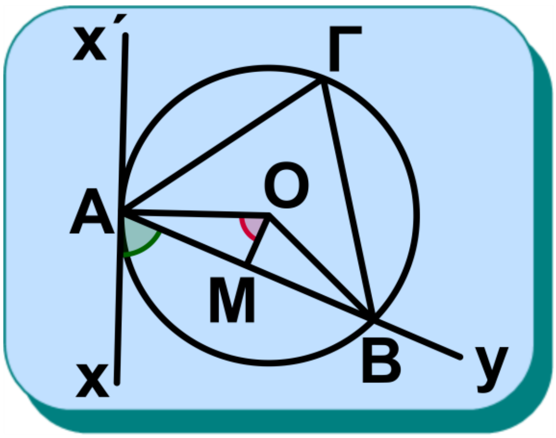
Η σχέση μίας γωνίας χορδής και εφαπτομένης με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής δίνεται από τοακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

Απόδειξη

Έστω ότι η γωνία χορδής και εφαπτομένης $x\hat{A}y$ είναι οξεία (σχ. 6) και $A\hat{\Gamma}B$ μια τυχαία εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής ΑΒ.



Σχήμα 6

Γνωρίζουμε ότι $A\hat{\Gamma}B = \dfrac{A\hat{O}B}{2}$.

Φέρουμε το απόστημα ΟΜ, οπότε

$A\hat{O}M = M\hat{O}B = \dfrac{A\hat{O}B}{2} = A\hat{\Gamma}B$.

Αλλά $x\hat{A}y = A\hat{O}M$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές. Επομένως $x\hat{A}y = A\hat{\Gamma}B$.
Αν η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι αμβλεία, η απόδειξη είναι ανάλογη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

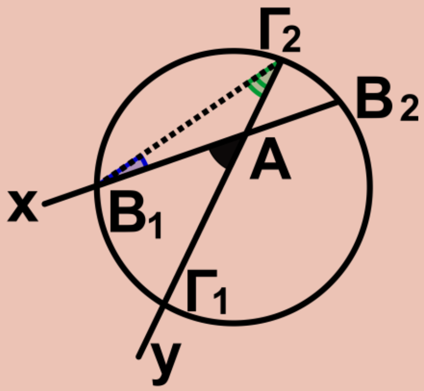
Μία γωνία που η κορυφή της ανήκει στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου λέγεται **γωνία δύο τεμνουσών** και εκφράζεται ως συνάρτηση των εγγεγραμμένων γωνιών, που σχηματίζουν οι πλευρές της με τον κύκλο.

(i) Ας θεωρήσουμε γωνία $x\hat{A}y$, όπου η κορυφή της Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (σχ.7). Οι πλευρές της Αx, Αy και οι προεκτάσεις τους τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B_1, Γ_1 και B_2, Γ_2 αντίστοιχα. Τότε, ισχύει ότι η γωνία $x\hat{A}y$ ισούται με το άθροισμα των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα που περιέχει η $x\hat{A}y$ και η κατακορυφήν της, δηλαδή:
$x\hat{A}y = A\hat{B}_1\Gamma_2 + B_1\hat{\Gamma}_2A$.

(ii) Ας θεωρήσουμε γωνία $x\hat{A}y$ όπου η κορυφή της Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (σχ.8). Οι πλευρές της Αx, Αy τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B_1, B_2 και Γ_1, Γ_2 αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι η γωνία $x\hat{A}y$ ισούται με τη διαφορά των εγγεγραμμένων γωνιών, που βαίνουν στα τόξα του κύκλου που περιέχει η $x\hat{A}y$, δηλαδή $x\hat{A}y=B_2\hat{B}_1\Gamma_2 - B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1$, όπου $B_2\hat{B}_1\Gamma_2 > B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1$.

Απόδειξη

(i) Η $x\hat{A}y$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B_1A\Gamma_2$, επομένως ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, δηλαδή
$x\hat{A}y = A\hat{B}_1\Gamma_2 + B_1\hat{\Gamma}_2A$.

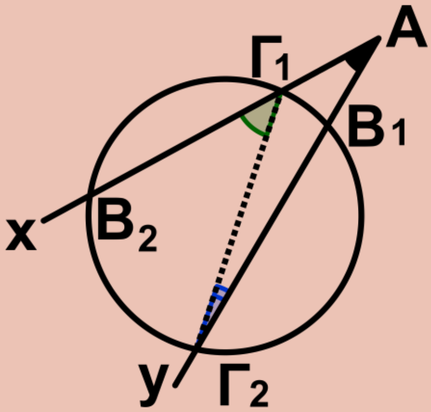


Σχήμα 7

ΣΧΟΛΙΟ

$$x\hat{A}y = \frac{B_1\Gamma_1}{2} + \frac{B_2\Gamma_2}{2}$$

(ii) Η γωνία $B_2\hat{B}_1\Gamma_2$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B_1A\Gamma_2$, επομένως $B_2\hat{B}_1\Gamma_2 = x\hat{A}y + A\hat{\Gamma}_2B_1$ ή $x\hat{A}y = B_2\hat{B}_1\Gamma_2 - B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1$.



Σχήμα 8

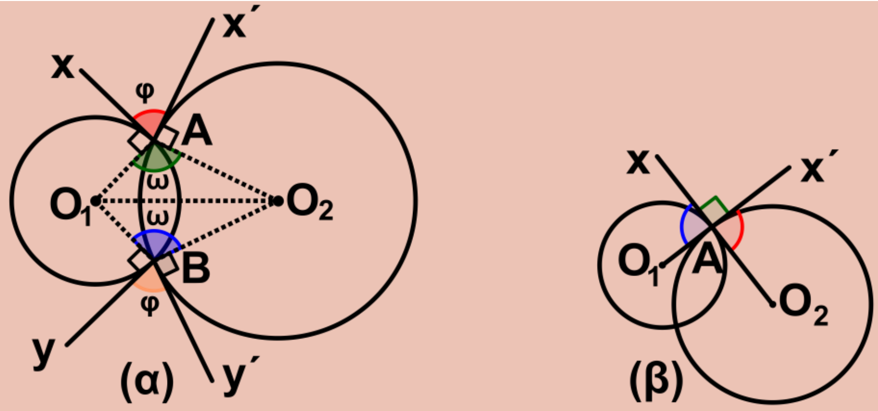
ΣΧΟΛΙΟ

$$x\hat{A}y = \frac{B_2\Gamma_2}{2} - \frac{B_1\Gamma_1}{2}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε δύο τεμνόμενους κύκλους και φέρουμε τις εφαπτόμενές τους σε καθένα από τα κοινά σημεία τους.
(i) Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των δύο κύκλων σε καθένα από τα κοινά σημεία τους σχηματίζουν ίσες γωνίες. Καθεμία από τις γωνίες αυτές λέγεται γωνία των δύο κύκλων.
(ii) Αν η γωνία των δύο κύκλων είναι ορθή, λέμε ότι οι κύκλοι τέμνονται ορθογώνια ή ότι είναι ορθογώνιοι. Να αποδειχθεί ότι, αν οι δύο κύκλοι είναι ορθογώνιοι, οι εφαπτόμενες του ενός κύκλου στα κοινά σημεία τους διέρχονται από το κέντρο του άλλου κύκλου.

Απόδειξη



Σχήμα 9

(i) Ας θεωρήσουμε δύο τεμνόμενους κύκλους με κέντρα O_1 και O_2 και A,B τα σημεία τομής τους. Από την ισότητα των τριγώνων O_1AO_2 και O_1BO_2 θα έχουμε ότι

$O_1\hat{A}O_2 = O_1\hat{B}O_2 = \omega$ (σχ.9α).

Ας φέρουμε τώρα τις εφαπτόμενες των δύο κύκλων στο σημείο A και στο σημείο B. Οι εφαπτόμενες στο A σχηματίζουν γωνία $x'\hat{A}x = 2\llcorner.\ \omega$ (γιατί $O_1\hat{A}x = O_2\hat{A}x' = 1\llcorner$) και όμοια οι εφαπτόμενες στο B σχηματίζουν γωνία $y'\hat{B}y = 2\llcorner.\ \omega$.

Επομένως, $x'\hat{A}x = y'\hat{B}y$.

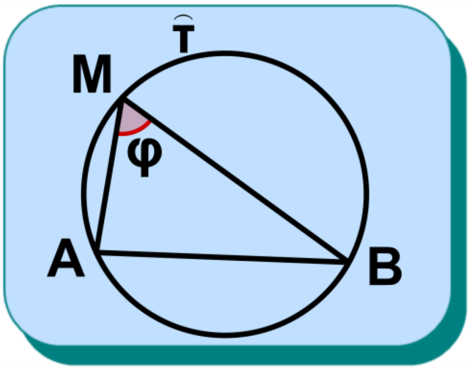
(ii) Αν δύο κύκλοι τέμνονται ορθογώνια, δηλαδή αν φ = $1\llcorner$ (σχ.9β), έχουμε ότι $O_1\hat{A}O_2 + O_1\hat{A}x = 2\llcorner$, οπότε οι ημιευθείες Ax και AO_2 είναι αντικείμενες.

6.4 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο. Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα σημείο M που δεν ανήκει στην ευθεία AB (σχ.10).

Αν φ είναι η γωνία $A\hat{M}B$ τότε λέμε ότι το σημείο M βλέπει το τμήμα AB υπό γωνία φ ή ισοδύναμα το AB φαίνεται από το σημείο M υπό γωνία φ.

Αν $\widehat{\tau}$ είναι ένα τόξο κύκλου που έχει χορδή την ΑΒ και διέρχεται από το Μ, τότε λέμε ότι το τόξο $\widehat{\tau}$ **δέχεται γωνία φ.**



Σχήμα 10

Θα δούμε τώρα πως κατασκευάζεται ένα τόξο που να δέχεται γωνία φ.

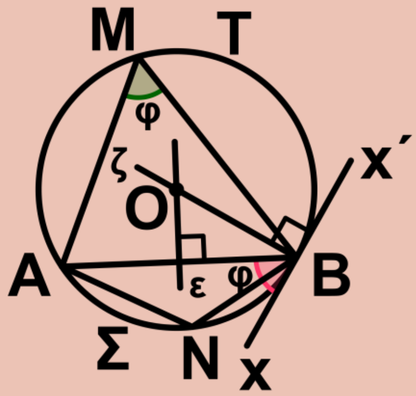
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίνεται ένα τμήμα ΑΒ και μία γωνία φ. Να κατασκευασθεί τόξο κύκλου που να έχει χορδή το ΑΒ και να δέχεται γωνία φ.

● Έστω φ < 1 ∟

Ανάλυση

Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ φαίνεται από ένα σημείο Μ υπό γωνία φ, δηλαδή $A\hat{M}B$ = φ, τότε αρκεί να προσδιορίσουμε το κέντρο και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΜΒ (βλ. Πόρισμα (iii), § 6.2). Έστω ΑΒ ένα τόξο κύκλου, κέντρου Ο, με χορδή την ΑΒ τέτοιο, ώστε για κάθε σημείο του Μ διαφορετικό των Α,Β να ισχύει $A\hat{M}B$ = φ (σχ.11). Αν φέρουμε την ημιευθεία Βx εφαπτόμενη του κύκλου στο Β θα έχουμε $A\hat{B}x$ = $A\hat{M}B$ = φ (γωνία χορδής και εφαπτομένης) και επομένως η Βx είναι μία σταθερή, ανεξάρτητη του Μ, ημιευθεία. Επειδή $O\hat{B}Bx$, το κέντρο Ο θα βρίσκεται στη σταθερή ευθεία ζ που είναι κάθετη στη Βx στο Β. Αλλά το Ο βρίσκεται επίσης και στη μεσοκάθετο ε του ΑΒ, άρα είναι η τομή των ε και ζ.



Σχήμα 11

Σύνθεση

Θεωρούμε το δοσμένο τμήμα ΑΒ και φέρουμε ημιευθεία Βx έτσι, ώστε $A\hat{B}x = \varphi$. Στη συνέχεια φέρουμε ευθεία ζ κάθετη της Βx στο Β, που τέμνει τη μεσοκάθετο ε του ΑΒ στο Ο. Γράφουμε τον κύκλο (Ο,ΟΑ) και το τόξο ΑΤΒ (σχ.11) (χωρίς τα άκρα του) είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Για κάθε σημείο Μ του τόξου ΑΤΒ έχουμε $A\hat{M}B = A\hat{B}x = \varphi$, αφού η $A\hat{B}x$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $A\hat{M}B$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, ενώ για κάθε σημείο Ν του τόξου ΑΣΒ έχουμε

$$A\hat{N}B = A\hat{B}x' = 2^{\llcorner} - A\hat{B}x = 2^{\llcorner} - \varphi,$$

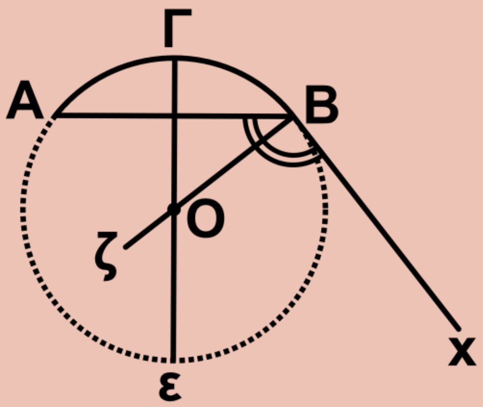
όπου Βx΄ η αντικείμενη ημιευθεία της Βx.

Διερεύνηση

Για να υπάρχει λύση πρέπει η ευθεία ζ να τέμνει την ε, το οποίο συμβαίνει πάντοτε, αφού $A\hat{B}x = \varphi \neq 0$.

● Έστω $\varphi > 1^{\llcorner}$

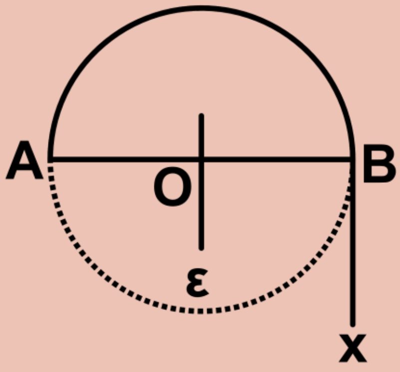
Τότε με τον ίδιο, όπως παραπάνω, τρόπο κατασκευάζουμε τον κύκλο κέντρου Ο και το τόξο ΑΓΒ (σχ.12) που είναι το ζητούμενο (χωρίς τα άκρα του).



Σχήμα 12

● Έστω $\varphi = 1^{\llcorner}$

Τότε το σημείο τομής των ευθειών ε, ζ είναι το μέσο Ο του ΑΒ (σχ.13).



Σχήμα 13

Επομένως, το ζητούμενο τόξο είναι καθένα από τα ημικύκλια διαμέτρου ΑΒ, χωρίς τα άκρα τους Α και Β.

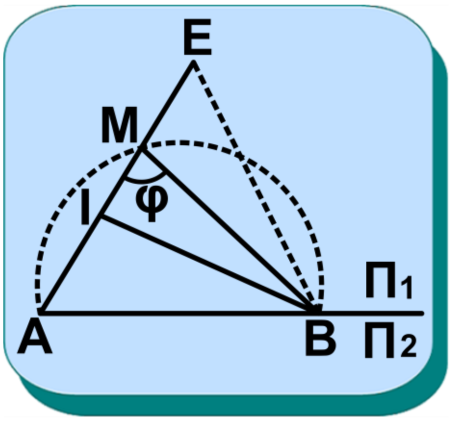
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω τόξο AB που δέχεται γωνία φ και $Π_1$ το ημιεπίπεδο στο οποίο περιέχεται (σχ.14). Για κάθε σημείο Μ του AB έχουμε $A\hat{M}B = φ$, ενώ για κάθε σημείο Ι του τμήματος ΑΜ ή σημείο Ε της προέκτασης του ΑΜ έχουμε αντίστοιχα $A\hat{I}B > φ$ και $A\hat{E}B < φ$.

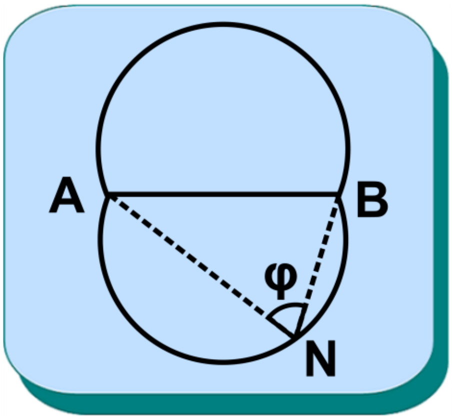
Άρα τα μοναδικά σημεία του $Π_1$ από τα οποία το AB φαίνεται υπό γωνία φ είναι τα σημεία του AB εκτός από τα άκρα του. Όμοια αποδεικνύεται ότι τα μοναδικά σημεία του $Π_2$ που βλέπουν το AB υπό γωνία φ είναι τα σημεία του τόξου ANB συμμετρικού του AB ως προς την ευθεία AB (σχ.15).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι: Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα AB φαίνεται υπό γωνία φ είναι δύο τόξα κύκλων, χορδής AB, χωρίς τα άκρα τους A,B, συμμετρικά ως προς την ευθεία AB, καθένα από τα οποία δέχεται γωνία φ.

Άμεση συνέπεια του προηγουμένου είναι ότι: Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα AB φαίνεται υπό ορθή γωνία είναι κύκλος με διάμετρο AB, χωρίς τα σημεία A και B.



Σχήμα 14



Σχήμα 15

ΣΧΟΛΙΟ

Στη λύση του παραπάνω προβλήματος, εκτός από τα γνωστά μας βήματα: κατασκευή, απόδειξη, διερεύνηση αναφέραμε πριν από αυτά και το βήμα της ανάλυσης. Το βήμα αυτό το κάνουμε όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή και περιλαμβάνει τα εξής: Υποθέτουμε ότι κατασκευάσαμε το ζητούμενο σχήμα και προσπαθούμε να εντοπίσουμε εκείνες τις ιδιότητές του που ανάγουν την κατασκευή του σε γεωμετρικές κατασκευές που μας είναι ήδη γνωστές. Στη σύνθεση ή αλλιώς κατασκευή έχοντας οδηγό την ανάλυση κάνουμε όλες εκείνες τις επιμέρους γεωμετρικές κατασκευές που τελικά θα μας οδηγήσουν στην κατασκευή του ζητούμενου σχήματος. Τα παραπάνω βήματα ακολουθούν, όπως είναι γνωστό, το βήμα της απόδειξης και το βήμα της διερεύνησης (§ 3.17).

Η μέθοδος αυτή των τεσσάρων βημάτων: ανάλυση, σύνθεση, απόδειξη και διερεύνηση είναι γνωστή ως αναλυτική - συνθετική μέθοδος και χρησιμοποιείται σε προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών και σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Πότε μια γωνία λέγεται εγγεγραμμένη;

2. Αν φ και ω είναι αντίστοιχα η εγγεγραμμένη και η επίκεντρη γωνία που βαίνουν στο ίδιο τόξο ενός κύκλου, τότε:

α. $φ = ω$, β. $φ = 2ω$, γ. $ω = 2φ$,

δ. $φ = 90°+ω$, ε. Τίποτα από τα προηγούμενα.

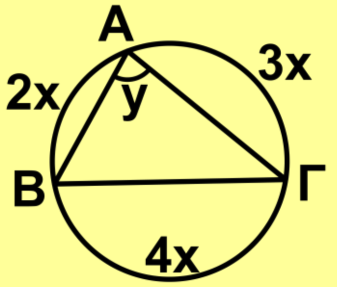
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

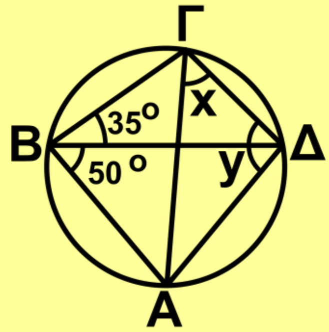
3. Συμπληρώστε το κενό στην επόμενη πρόταση: .Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με ……………. ……………………………………………………………………

4. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία βλέπουν ένα γνωστό τμήμα υπό γωνία φ < 1 └ ή φ = 1 └;

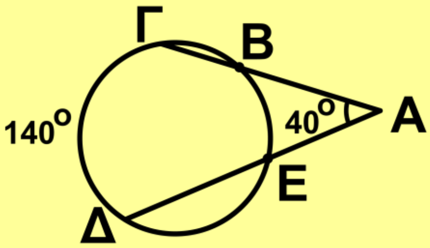
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y.

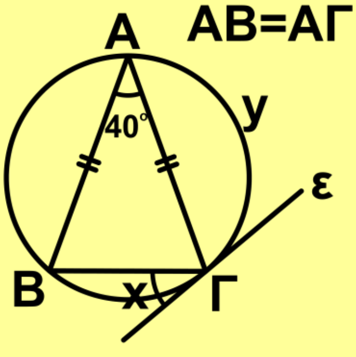


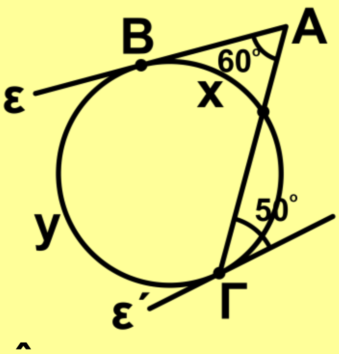


2. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 40°$, να βρείτε το μέτρο του τόξου ΒΕ.

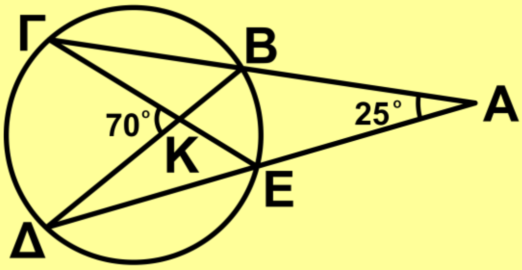


3. Αν στα παρακάτω σχήματα οι ευθείες ε και ε΄ είναι εφαπτόμενες να βρεθούν τα x και y.



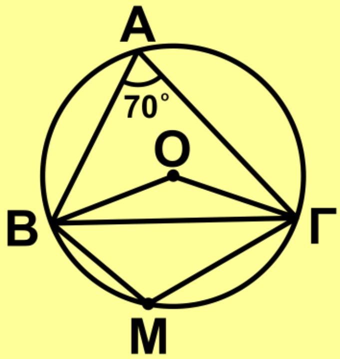


4. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 25°$, να βρείτε τα μέτρα των τόξων ΕΒ και ΓΔ.

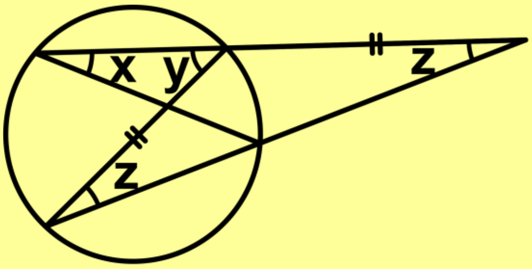


5. **Αν στο διπλανό σχήμα είναι**

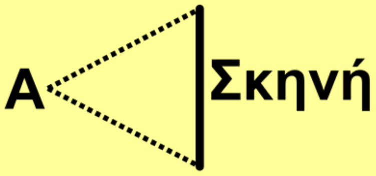
ΒΜ = ΜΓ και $\hat{A}$ = 70°, να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΟΒΓ και ΜΒΓ.



6. **Στο παρακάτω σχήμα, ποια σχέση είναι σωστή;**
i) $x - y - z = 0$, ii) $x - 2y + z = 0$,
iii) $x - y + z = 0$, iv) $x + y = 2z$,
v) καμία από τις παραπάνω.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



7. **Το καλύτερο κάθισμα σε έναν κινηματογράφο είναι το κάθισμα «Α».**



Να βρείτε ποια άλλα καθίσματα έχουν την ίδια οπτική γωνία με το θεατή που κάθεται στο κάθισμα Α .

Αποδεικτικές Ασκήσεις

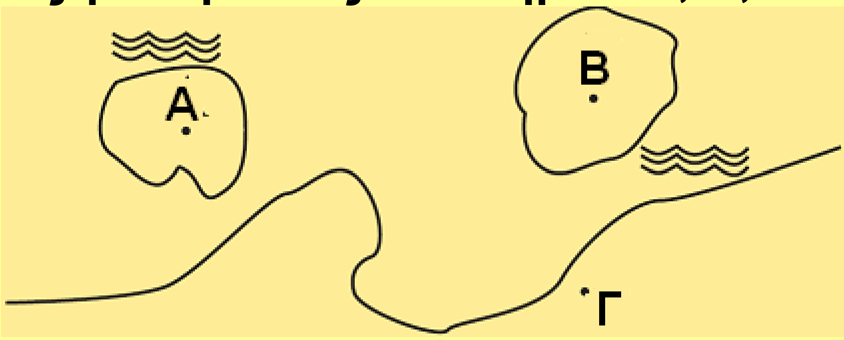
1. **Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή ΑΒ κύκλου (Κ) είναι παράλληλη στη χορδή ΑΒ και αντίστροφα.**

2. **Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύ-**

κλους, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το Β.

3. Δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Κ) τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΡΜ του τριγώνου ΡΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ.

4. Ο καπετάνιος ενός ιστιοπλούκού πλοίου Ι είδε τρεις σημαδούρες για υφάλους στα σημεία Α, Β, Γ.



Με μία πυξίδα διόπτευσης μέτρησε ότι $A\hat{I}B$ = 100°, $B\hat{I}\Gamma$= 125°, $\Gamma\hat{I}A$ = 135°. Εντόπισε τα σημεία Α, Β, Γ στο χάρτη και προσδιόρισε την ακριβή θέση του ιστιοπλούκού. Πώς τα κατάφερε;

Σύνθετα Θέματα

1. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά) στο σημείο Α και δύο ευθείες ε, ε΄ που διέρχονται από το Α τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Β, Β΄ και τον άλλο στα Γ και Γ΄ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΒ΄//ΓΓ΄.

2. Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Μία χορδή ΒΓ του μεγαλύτερου κύκλου εφάπτεται στο μικρότερο, στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

3. Δίνεται κύκλος (Κ), η εφαπτομένη ε σε ένα σημείο του Α και ένα σημείο Ρ της ε. Από το Ρ φέρουμε μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει τη χορδή ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι ΡΔ = ΡΑ.

Εγγεγραμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα

6.5 Το εγγεγραμένο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγεγραμμένο σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα τετράπλευρο λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου.

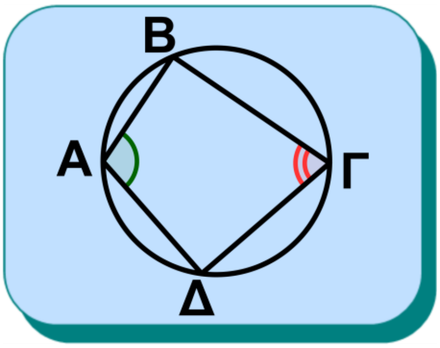
Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:
(i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
(ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

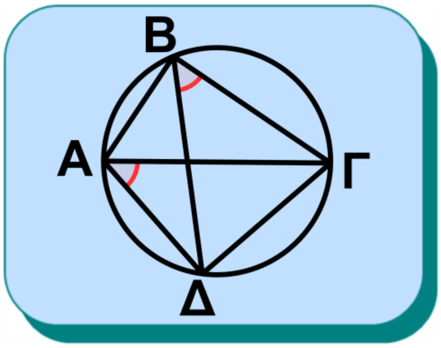
Απόδειξη

(i) Η γωνία $\hat{A}$ βαίνει στο τόξο ΒΓΔ, ενώ η $\hat{Γ}$ στο ΒΑΔ, με ΒΓΔ + ΒΑΔ = 4└ (σχ.16). Επομένως $\hat{A} + \hat{Γ}$ = 2└.

(ii) Δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές κορυφές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (π.χ. οι Α, Β) είναι και κορυφές δύο ίσων εγγεγραμμένων γωνιών ($Δ\hat{A}Γ$ και $Δ\hat{B}Γ$), που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΓΔ, που ορίζει η απέναντι πλευρά ΓΔ (σχ.17).



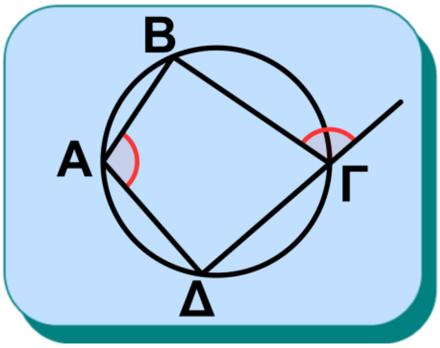
Σχήμα 16



Σχήμα 17

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.



Σχήμα 18

6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

Η μελέτη των εγγράψιμων τετραπλεύρων προέκυψε από το ερώτημα αν τέσσερα σημεία του επιπέδου (ανά τρία μη συνευθειακά) είναι ή όχι ομοκυκλικά.

Γνωρίζουμε βέβαια ότι τρία σημεία του επιπέδου μη συνευθειακά ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αυτό όμως δε συμβαίνει απαραίτητα και για τέσσερα σημεία, π.χ. οι κορυφές ενός τυχαίου παραλληλογράμμου, το οποίο δεν είναι ορθογώνιο, δεν είναι δυνατόν να ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αφού οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες και αν δεν είναι και οι δύο ορθές δεν θα είναι παραπληρωματικές.

Απομένει λοιπόν να καθορίσουμε κάτω από ποιες συνθήκες είναι τέσσερα σημεία ομοκυκλικά ή, ισοδύναμα, κάτω από ποιες προϋποθέσεις (κριτήρια) ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

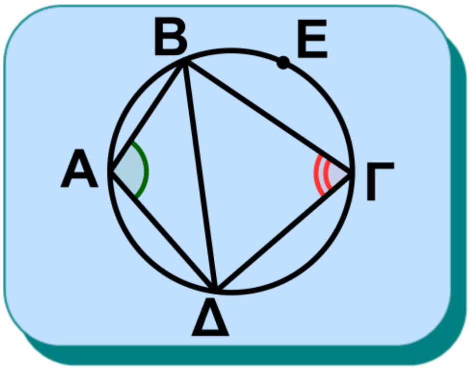
(i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

(ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

(iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

Απόδειξη

(i) Έστω $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2$∟. Φέρουμε τον κύκλο που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Δ και τη χορδή του ΒΔ. Τα σημεία Α, Γ βρίσκονται εκατέρωθεν της ΒΔ, οπότε κάθε εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο ΒΑΔ ισούται με τη $\hat{\Gamma}$, ενώ κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ΒΕΔ (σχ.19) ισούται με την παραπληρωματική της, δηλαδή την $\hat{A}$. Επομένως το Γ είναι σημείο του ΒΕΔ και ομοκυκλικό με τα Α, Β, Δ.

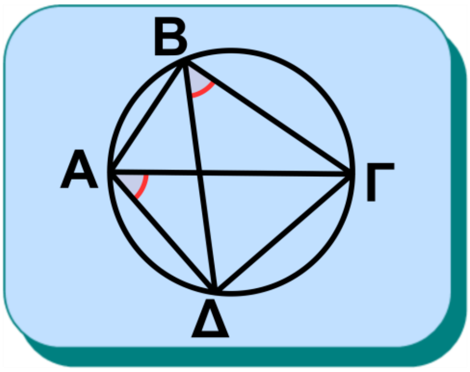


Σχήμα 19

(ii) Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε

$$\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma = \varphi.$$

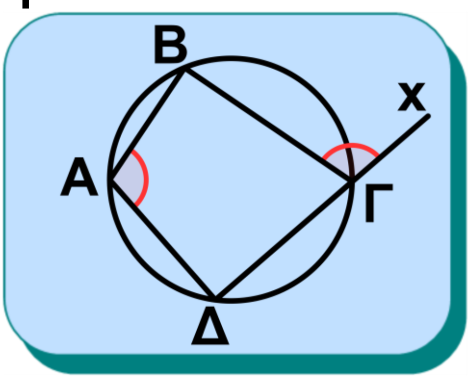
Τότε τα Α,Β ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου από τα οποία το τμήμα ΓΔ φαίνεται υπό ορισμένη γωνία φ.



Σχήμα 20

Ο γεωμετρικός αυτός τόπος είναι (βλ. § 6.4) δύο συμμετρικά τόξα ως προς το ΓΔ. Τα Α,Β όμως βρίσκονται στο ίδιο μέρος της ΓΔ, συνεπώς ανήκουν στο ίδιο τόξο, επομένως τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι ομοκυκλικά.

(iii) Έστω ότι $x\hat{\Gamma}B = \hat{A}$ (σχ. 21), τότε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2$∟, επομένως το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο γιατί έχει δύο απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές, λόγω του κριτηρίου (i).



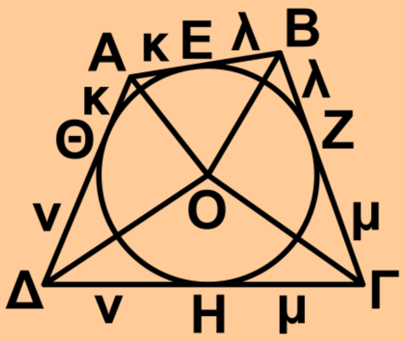
Σχήμα 21

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η Περιγεγραμμένο και περιγράψιμο τετράπλευρο σε κύκλο

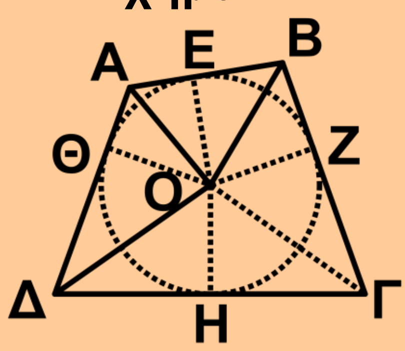
Ένα τετράπλευρο, του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον ίδιο κύκλο, λέγεται περιγεγραμμένο στον κύκλο αυτό, ενώ ο κύκλος λέγεται εγγεγραμμένος στο τετράπλευρο αυτό.
(Α) Να αποδειχθούν οι ιδιότητες ενός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ:
(i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.
(ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.
(Β) Να αποδείξετε ότι για να είναι ένα τετράπλευρο περιγράψιμο σε κύκλο αρκεί να ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις :
(i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
(ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Απόδειξη

(Α) Απλή (βλ. σχ.22).
(Β) (i) Από το σημείο τομής Ο των διχοτόμων φέρουμε τις κάθετες ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ, ΟΘ στις πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα (σχ. 23).
Το Ο ως σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$ ισαπέχει από τις πλευρές της ΑΒ, ΑΔ, συνεπώς ΟΕ=ΟΘ. Ανάλογα έχουμε ότι ΟΕ=ΟΖ=ΟΗ, οπότε τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ ανήκουν σε κύκλο (Ο,ΟΕ)και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγρά-



Σχήμα 22

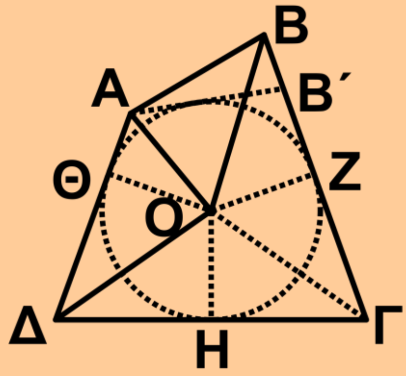


Σχήμα 23

ψιμο.

(ii) ΄Εστω ότι ΑΒ+ΓΔ = ΑΔ+ΒΓ (1).

Θεωρούμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{Γ}$, $\hat{Δ}$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ο και από το Ο φέρουμε τις κάθετες στις πλευρές των γωνιών αυτών, ΟΘ⊥ΑΔ, ΟΗ⊥ΓΔ και ΟΖ⊥ΒΓ (σχ.24). Τότε ΟΘ = ΟΗ = ΟΖ και ο κύκλος (Ο,ΟΘ) εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ΑΒΓΔ. ΄Εστω ότι δεν εφάπτεται στην ΑΒ. Φέρουμε την εφαπτομένη από το Α στον κύκλο (Ο,ΟΘ) η οποία τέμνει την ευθεία ΒΓ σε σημείο Β΄. Το τετράπλευρο ΑΒ΄ΓΔ είναι περιγεγραμμένο, οπότε ΑΒ΄ + ΓΔ = ΑΔ + Β΄Γ (2).



Σχήμα 24

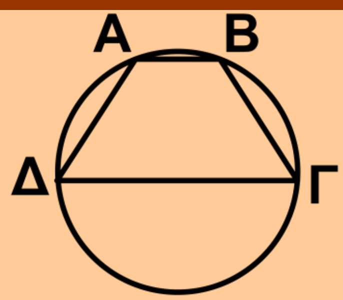
Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$ΑΒ – ΑΒ΄ = ΒΓ - Β΄Γ \text{ ή } ΑΒ = ΑΒ΄ + ΒΒ΄,$$

το οποίο είναι άτοπο, επομένως ο κύκλος εφάπτεται και στην πλευρά ΑΒ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να αποδειχθεί ότι κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 25

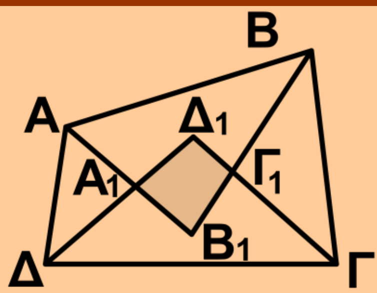
Απόδειξη

Αν το ΑΒΓΔ (σχ.25) είναι ισοσκελές τραπέζιο θα είναι $\hat{Α} = \hat{Β}$, $\hat{Γ} = \hat{Δ}$ και $\hat{Α} + \hat{Δ} = \hat{Β} + \hat{Γ} = 2$∟.

Επομένως θα είναι και $\hat{Α} + \hat{Γ} = 2$∟, οπότε είναι εγγράψιμο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τετραπλεύρου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.



Σχήμα 26

Απόδειξη

΄Εστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και

$A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών του (σχ. 26).

Τότε έχουμε ότι $B_1\hat{A}_1\Delta_1 = A\hat{A}_1\Delta = 2\llcorner - \left(\dfrac{\hat{A}+\hat{\Delta}}{2}\right)$ και

$\Delta_1\hat{\Gamma}_1B_1 = B\hat{\Gamma}_1\Gamma = 2\llcorner - \left(\dfrac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}\right)$.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι $B_1\hat{A}_1\Delta_1 + \Delta_1\hat{\Gamma}_1B_1 =$

$$= 4\llcorner - \left(\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2}\right) = 2\llcorner,$$

επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο:

i) Τα αθροίσματα των απέναντι γωνιών είναι ίσα. Σ Λ

ii) Κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες. Σ Λ

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. Αν ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο τότε:

α. $\hat{A} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\llcorner$ β. $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ γ. $\hat{A} = \hat{\Delta}_{\varepsilon\xi}$

δ. $\hat{A} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ ε. $\hat{B} = \hat{\Delta}$.

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. Από τέσσερα μη συνευθειακά σημεία διέρχεται πάντοτε ένας κύκλος;

4. i) Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο;

ii) Αν οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

5. Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο;

6. Ποια από τα τετράπλευρα: παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο και τραπέζιο είναι εγγράψιμα;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A}$ = 120° και $\hat{B}_{εξ}$ = 80°. Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$, $\hat{Γ}$ και $\hat{Δ}$ του τετραπλεύρου.

2. Αν ένας ρόμβος είναι εγγεγραμμένος σε κύκλο, να αποδείξετε ότι είναι τετράγωνο.

3. Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ΄και τον άλλο στα Δ και Δ΄ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΓΓ΄//ΔΔ΄.

2. Ένας κύκλος (Κ) διέρχεται από τις κορυφές Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη ε του περιγεγραμμένου κύκλου στο Α.

3. Να αποδείξετε ότι τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ενός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ.

4. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

Σύνθετα Θέματα

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (O,R). Αν ΒΔ και ΓΕ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι ΟÂ ΔΕ (Θεώρημα Nagel).

2. Δίνεται μία χορδή ΒΓ ενός κύκλου (O,R) και οι εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 στα άκρα της. Από ένα τυχαίο σημείο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΟΜ, που τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι ΔΜ = ΜΕ.

3. Να αποδείξετε ότι οι προβολές κάθε σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου πάνω στις πλευρές του είναι σημεία συνευθειακά (ευθεία Simson).

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΓΕ = ΒΖ.

Δραστηριότητα

Να εξετασθεί η ύπαρξη κύκλου που διέρχεται από:
i) δύο δοσμένα σημεία,
ii) τρία δοσμένα σημεία,
iii) τέσσερα δοσμένα σημεία, και η μοναδικότητά του σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

6.7 Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων

Σε προηγούμενα κεφάλαια συναντήσαμε ορισμένους βασικούς γεωμετρικούς τόπους, όπως ο κύκλος, η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος, η διχοτόμος μίας γωνίας, η μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων ευθειών και τέλος το τόξο γνωστής χορδής ΑΒ, τα σημεία του οποίου βλέπουν το τμήμα ΑΒ υπό δοσμένη γωνία φ.

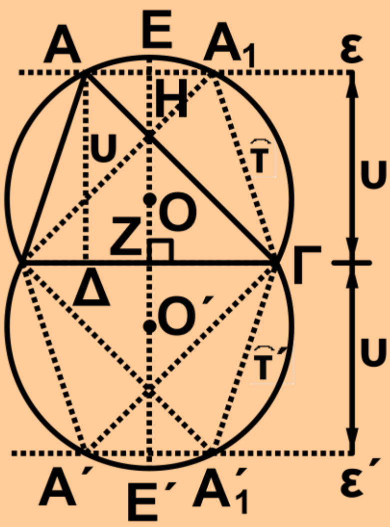
Οι γεωμετρικοί αυτοί τόποι μας είναι χρήσιμοι στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ που έχει ΒΓ=α, ύψος ΑΔ=υ και γωνία $\hat{A}$ = ω, όπου α, υ γνωστά τμήματα και ω γνωστή γωνία.

Λύση

● **Ανάλυση.** Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο (σχ.27) που έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{A}$ = ω. Επειδή $\hat{A}$ = ω η κορυφή Α βλέπει γνωστό τμήμα ΒΓ υπό γνωστή γωνία, άρα είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_1 που αποτελείται από τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$, που γράφονται με χορδή τη ΒΓ εκατέρωθεν αυτής και δέχονται το καθένα γωνία ω. Επίσης, αφού το Α απέχει από τη ΒΓ γνωστή απόσταση υ, είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_2 που αποτελείται από δύο ευθείες παράλληλες προς τη ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής σε απόσταση υ. Άρα η κορυφή Α είναι η τομή των γεωμετρικών τόπων T_1 και T_2.



Σχήμα 27

● **Σύνθεση.** Με χορδή τμήμα ΒΓ = α γράφουμε τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$ που δέχονται γωνία ω. Στη συνέχεια σε απόσταση ΖΗ = υ από τη ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής φέρουμε ευθείες ε, ε΄//ΒΓ που τέμνουν τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$. Αν Α είναι ένα από τα σημεία τομής των T_1, T_2, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

● **Απόδειξη.** Το τρίγωνο ΑΒΓ, από την κατασκευή έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{A}$ = ω, αφού το Α είναι σημείο π.χ. του τόξου $\overset{\frown}{\tau}$ τα σημεία του οποίου βλέπουν το ΒΓ υπό γωνία ω.

● **Διερεύνηση.** Για να υπάρχει λύση πρέπει οι γεωμετρικοί τόποι T_1 και T_2 να έχουν κοινά σημεία. Έτσι, αν ΑΔ<ΕΖ η ευθεία ε τέμνει το τόξο $\widehat{\tau}$ σε δύο σημεία Ακαι $Α_1$ και η ε΄ τέμνει το $\widehat{\tau}΄$ στα Α΄ και $Α΄_1$, οπότε έχουμε τέσσερα τρίγωνα τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους (τρεις πλευρές ίσες), οπότε θεωρούμε ότι έχουμε μία λύση. Αν ΑΔ=ΕΖ, η ε έχει ένα κοινό σημείο με το $\widehat{\tau}$, το Ε, οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ και η ε΄ έχει ένα κοινό σημείο με το $\widehat{\tau}΄$, το Ε΄ , οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο Ε΄ΒΓ. Τα τρίγωνα αυτά όμως είναι ίσα, οπότε έχουμε μία μόνο λύση. Τέλος, αν ΑΔ>ΕΖ δεν υπάρχουν κοινά σημεία των T_1, T_2 και το πρόβλημα είναι αδύνατο.

ΣΧΟΛΙΟ

Στο παραπάνω πρόβλημα, για να κατασκευάσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου γνωρίζουμε την πλευρά ΒΓ = α, πρέπει να προσδιορίσουμε ακόμα την κορυφή Α. Η κορυφή αυτή έχει δύο ιδιότητες:

(i) βλέπει το τμήμα ΒΓ υπό γνωστή γωνία ω και

(ii) απέχει από την πλευρά ΒΓ, γνωστή απόσταση υ.

Επομένως το Α είναι η τομή των δύο γεωμετρικών τόπων, τόξου και ευθείας αντίστοιχα.

Γενικά, όταν ένα πρόβλημα είναι ή ανάγεται στον προσδιορισμό ενός σημείου, τότε βρίσκουμε δύο γεωμετρικούς τόπους T_1, T_2 στους οποίους οφείλει, σύμφωνα με τα δεδομένα, να βρίσκεται το σημείο αυτό και η τομή των T_1, T_2 είναι το ζητούμενο σημείο.

Η μέθοδος της χρησιμοποίησης των γεωμετρικών τόπων στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών ανάγεται στον Πλάτωνα.

Δραστηριότητες

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών δοσμένου κύκλου που:
i) είναι παράλληλες σε δοσμένη ευθεία ή
ii) ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου ή
iii) συντρέχουν σε ένα σημείο.

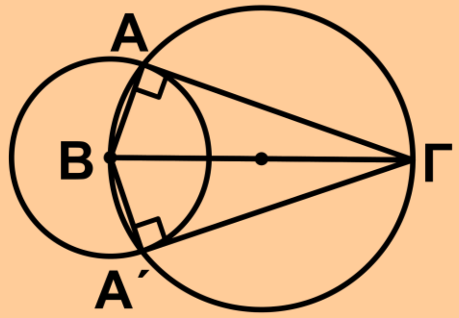
Στη συνέχεια δίνουμε ορισμένα ακόμα παραδείγματα γεωμετρικών κατασκευών με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται η υποτείνουσα ΒΓ=α και μία κάθετη πλευρά του ΑΒ = γ, όπου α και γ γνωστά τμήματα.

Λύση

• **Ανάλυση.** Ας υποθέσουμε ότι ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο με $\hat{A}$ = 1 └, ΒΓ = α και ΑΒ = γ (σχ.28). Ας θεωρήσουμε γνωστή την πλευρά ΒΓ. Το σημείο Α:



Σχήμα 28

(i) απέχει απόσταση γ από το Β, άρα ανήκει στον κύκλο (Β,γ), και
(ii) βλέπει το ΒΓ υπό ορθή γωνία, άρα ανήκει στον κύκλο διαμέτρου ΒΓ.

• **Σύνθεση.** Κατασκευάζουμε τους δύο κύκλους (σχ.28) οι οποίοι τέμνονται στα Α και Α΄.
Σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄ΒΓ που είναι λύσεις του προβλήματος σε διαφορετικές θέσεις.

• **Απόδειξη.** Το τρίγωνο που κατασκευάσαμε έχει $\hat{A}$ = 1 └, επειδή βαίνει σε ημικύκλιο, και ΑΒ = γ ως ακτίνα του κύκλου (Β,γ).

● **Διερεύνηση.** Για να υπάρχει λύση πρέπει οι δύο κύκλοι να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει όταν α > γ. Όταν α ≤ γ, είναι φανερό ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

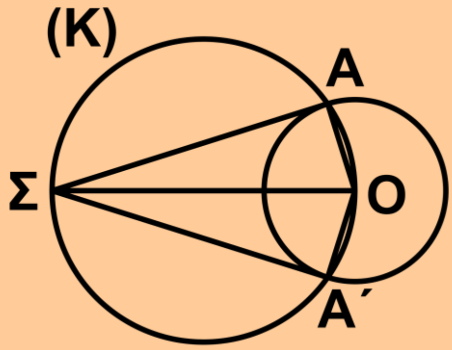
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται κύκλος (O,R) και σημείο Σ εκτός αυτού. Να κατασκευασθεί εφαπτομένη του κύκλου η οποία να διέρχεται από το Σ.

Λύση

● **Ανάλυση.** Ας υποθέσουμε ότι ΣΑ είναι μία εφαπτομένη του κύκλου από το Σ, όπου Α το σημείο επαφής (σχ.29).

Φέρουμε την ακτίνα ΟΑ, οπότε η γωνία $O\hat{A}\Sigma$ είναι ορθή και επομένως το Α είναι σημείο του γνωστού κύκλου (Κ) με διάμετρο το γνωστό τμήμα ΟΣ. Άρα το Α είναι κοινό σημείο του (O,R) και του (Κ).



Σχήμα 29

Επομένως το Α προσδιορίζεται, οπότε προσδιορίζεται και η ΣΑ.

● **Σύνθεση.** Με διάμετρο ΟΣ γράφουμε κύκλο (Κ), ο οποίος τέμνει τον (O,R) στα σημεία Α και Α΄. Φέρουμε τις ευθείες ΣΑ και ΣΑ΄ οι οποίες είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες.

● **Απόδειξη.** Είναι

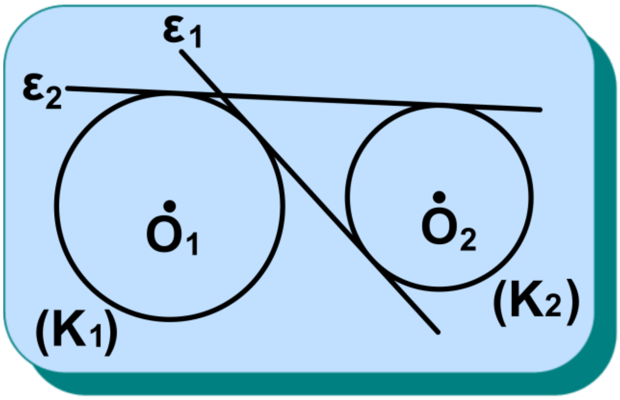
$O\hat{A}\Sigma = O\hat{A}'\Sigma = 1 \llcorner$, ως εγγεγραμμένες στον κύκλο (Κ) οι οποίες βαίνουν σε ημικύκλια. Άρα οι ακτίνες ΟΑ και ΟΑ΄ είναι κάθετες αντίστοιχα στις ΣΑ και ΣΑ΄ και επομένως οι ΣΑ και ΣΑ΄ είναι εφαπτόμενες του κύκλου (O,R).

● **Διερεύνηση.** Το πρόβλημα έχει πάντοτε δύο λύσεις, γιατί οι κύκλοι (Κ) και (O,R) τέμνονται αφού ο (Κ) διέρχεται από το εσωτερικό σημείο Ο και από το εξωτερικό σημείο Σ του (O,R).

Συμπέρασμα:
Από οποιοδήποτε εξωτερικό σημείο ενός κύκλου φέρονται ακριβώς δύο ευθείες εφαπτόμενες στον κύκλο.

• Κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων

Ας θεωρήσουμε δύο κύκλους (K_1) και (K_2). Μία ευθεία που εφάπτεται και στους δύο κύκλους λέγεται **κοινή εφαπτομένη** τους. Μία κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων (σχ.30) χαρακτηρίζεται ως **εξωτερική**, όπως



Σχήμα 30

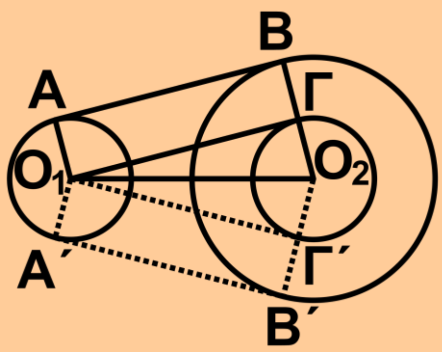
η ε_1, όταν οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της και ως **εσωτερική**, όπως η ε_2, όταν οι κύκλοι βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής.
Στο επόμενο πρόβλημα δίνουμε την κατασκευή των κοινών εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται δύο κύκλοι (O_1,ρ), (O_2,R) με $R>\rho$ και $O_1O_2>R-\rho$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενές τους.

Λύση

• Ανάλυση. Έστω ΑΒ μία κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων (O_1,ρ), (O_2,R), όπου Α, Β τα σημεία επαφής της με τους κύκλους αυτούς αντίστοιχα (σχ.31).



Σχήμα 30

Τότε οι ακτίνες O_1A, O_2B είναι κάθετες στην ΑΒ και επομένως παράλληλες. Από το O_1 φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ, που τέμνει την O_2B στο Γ, οπότε το τετράπλευρο $ΑΒΓO_1$ είναι ορθογώνιο.

Έτσι $O_1Γ \perp O_2Γ$ οπότε ο κύκλος κέντρου O_2 και ακτίνας $O_2Γ = O_2B - BΓ = O_2B - O_1A = R - ρ$ εφάπτεται στην $O_1Γ$ στο Γ.

● **Σύνθεση.** Με κέντρο O_2 και ακτίνα $R - ρ$ γράφουμε κύκλο και από το O_1 φέρουμε τις εφαπτόμενες του $O_1Γ$ και $O_1Γ'$ αντίστοιχα. Φέρουμε τις $O_2Γ$, $O_2Γ'$ που τέμνουν τον κύκλο (O_2,R) στα B, B΄ και στη συνέχεια φέρουμε τις ακτίνες O_1A, O_1A' του κύκλου $(O_1,ρ)$ παράλληλες προς τις O_2B, O_2B' αντίστοιχα. Τότε οι ευθείες AB και Α΄Β΄ είναι οι ζητούμενες κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων.

● **Απόδειξη.** Το τετράπλευρο $ΑΒΓO_1$ έχει, από την κατασκευή, O_1A // ΓΒ και $ΓΒ = O_2B - O_2Γ =$
$= R - (R - ρ) = O_1A$, δηλαδή $O_1A =$ // ΓΒ, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή η γωνία του $\hat{Γ}$ είναι ορθή, αφού η $O_1Γ$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $(O_2, R - ρ)$ το $ΑΒΓO_1$ είναι ορθογώνιο. Άρα οι ακτίνες O_1A και O_2B είναι κάθετες στην AB και επομένως η AB είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων. Η AB είναι εξωτερική εφαπτομένη αφού οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της. Όμοια αποδεικνύεται ότι και η Α΄Β΄ είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη.

● **Διερεύνηση.** Από την προηγούμενη κατασκευή προκύπτει ότι το πρόβλημα έχει λύση όταν είναι δυνατή η χάραξη των εφαπτομένων $O_1Γ$ και $O_1Γ'$ από το O_1 προς τον κύκλο $(O_2, R - ρ)$. Αυτό όμως είναι δυνατό όταν το O_1 είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου $(O_2, R - ρ)$, το οποίο ισχύει αφού από την υπόθεση έχουμε ότι
$O_1O_2 > R - ρ$.

Επομένως, όταν $O_1O_2 > R - ρ$ υπάρχουν δύο εξωτερικές κοινές εφαπτόμενες των κύκλων $(O_1,ρ)$ και (O_2,R).

Δραστηριότητα

Δίνονται δύο κύκλοι (O_1,ρ) και (O_2,R) με $O_1O_2 > R + \rho$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εσωτερικές εφαπτόμενές τους. Στη συνέχεια να εξετάσετε το πλήθος των κοινών εσωτερικών και εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων ανάλογα με τις σχετικές θέσεις τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που
i) έχουν απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο Ο,
ii) ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία Α και Β,
iii) έχουν απόσταση λ από μία ορισμένη ευθεία ε,
iv) ισαπέχουν από τις πλευρές μίας γωνίας,
v) ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες,
vi) ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες,
vii) βλέπουν ένα δοσμένο τμήμα ΑΒ υπό ορισμένη γωνία ω.

2. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζεται όταν δίνονται:
i) δύο κάθετες πλευρές του. Σ Λ
ii) μία κάθετη πλευρά του και η υποτείνουσα. Σ Λ
iii) μία οξεία γωνία του. Σ Λ
iv) η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του. Σ Λ
v) η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και η υποτείνουσα. Σ Λ

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων:
i) του δρομέα που κινείται σε ένα ευθύγραμμο διάδρομο ισαπέχοντας από τις πλευρές του,

ii) ενός τεχνητού δορυφόρου της Γης που κινείται σε απόσταση 10km πάνω από αυτή.

2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων γνωστής ακτίνας:

i) που κυλίονται στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου γνωστού κύκλου,

ii) που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.

3. Το σημείο στο οποίο είναι κρυμμένος ένας θησαυρός απέχει 4m από ένα δέντρο Δ και ισαπέχει από δύο άλλα δέντρα Α και Β. Να βρεθεί η θέση του θησαυρού.

4. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των ακτίνων δοσμένου κύκλου.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Α της ορθής γωνίας ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ που έχει δοσμένη υποτείνουσα.

2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των προβολών του δοσμένου σημείου Α πάνω στις ευθείες που διέρχονται από δοσμένο σημείο Β.

3. Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α στο εσωτερικό της. Οι κορυφές Β και Γ ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 1$ └) κινούνται πάνω στις Oy και Ox αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της υποτείνουσας ΒΓ.

4. Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1$ └) του οποίου δίνονται:

i) η διάμεσος ΑΜ=μ και μία κάθετη πλευρά.

ii) η διάμεσος ΑΜ=μ και το ύψος ΑΔ = λ.

Σύνθετα Θέματα

1. Από ένα μεταβλητό σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΖΕ.

2. **Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται:**
i) η πλευρά ΒΓ=λ, η γωνία $\hat{A}$ = ω και η διάμεσος ΑΜ = μ.
ii) η πλευρά ΒΓ=λ, η γωνία $\hat{A}$ = ω και η διάμεσος ΒΝ = μ.
3. **Να κατασκευάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που έχει πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ ίσες με τα γνωστά τμήματα κ, λ, μ, ν αντίστοιχα, και η γωνία του $\hat{A}$ είναι ίση με δοσμένη γωνία ω.**

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α. Από τα άκρα Β,Γ της υποτείνουσας ΒΓ φέρουμε κάθετες Βx και Βy στη ΒΓ και προς το ίδιο μέρος της ΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΑΓ, που τέμνει την Γy στο Ε και κάθετη στην ΑΒ που τέμνει την Βx στο Δ. Να αποδειχθεί ότι:**
i) τα σημεία Δ,Α,Ε είναι συνευθειακά,
ii) τα τετράπλευρα ΑΔΒΜ και ΑΜΓΕ είναι εγγράψιμα σε κύκλο,
iii) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΔΜΕ εφάπτεται στη ΒΓ.
2. **Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει σταθερή την πλευρά ΒΓ και η κορυφή Α μεταβάλλεται έτσι, ώστε η διαφορά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ να είναι σταθερή. Αν Μ είναι η προβολή της κορυφής Β πάνω στη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ.**
3. **Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ από τις γωνίες $\hat{B}$ = ω, $\hat{\Gamma}$ = φ και την περίμετρό του δ.**
4. **Δίνεται κύκλος (Ο,R) και σημείο Α εκτός αυτού. Από το Α να φέρετε ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στα Β,Γ ώστε το Β να είναι μέσο του ΑΓ.**
5. **Δίνεται εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Με χορδές τις πλευρές του γράφουμε μέσα σε αυτό τόξα, που τέμνο-**

νται ανά δύο στα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ. Να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο. (Οι έξι κύκλοι του Miquel).

6. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΖΕ, ΒΖΔ και ΓΕΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

7. Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος και Ε, Ζ σημεία των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΒΕ, ΔΕ, ΓΖ και ΑΖ σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ορθόκεντρο του Η. Αν M_1, M_2, M_3 είναι τα μέσα των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα, AH_1, BH_2, ΓH_3 τα ύψη του και Z_1, Z_2, Z_3 τα μέσα των ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) το τετράπλευρο $H_1M_1M_2M_3$ είναι εγγράψιμο,

ii) το τετράπλευρο $Z_1H_1M_1M_2$ είναι εγγράψιμο,

iii) τα σημεία M_i, H_i, Z_i, $i = 1, 2, 3$ είναι ομοκυκλικά (Κύκλος των 9 σημείων ή κύκλος του Euler).

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Εγγεγραμμένη γωνία

i) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.

ii) Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

Εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Ιδιότητες

i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

iii) Κάθε εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

Εγγράψιμο τετράπλευρο

Κριτήρια

Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

Περιγεγραμμένο τετράπλευρο

Ιδιότητες

i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Περιγράψιμο τετράπλευρο

Κριτήρια

Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

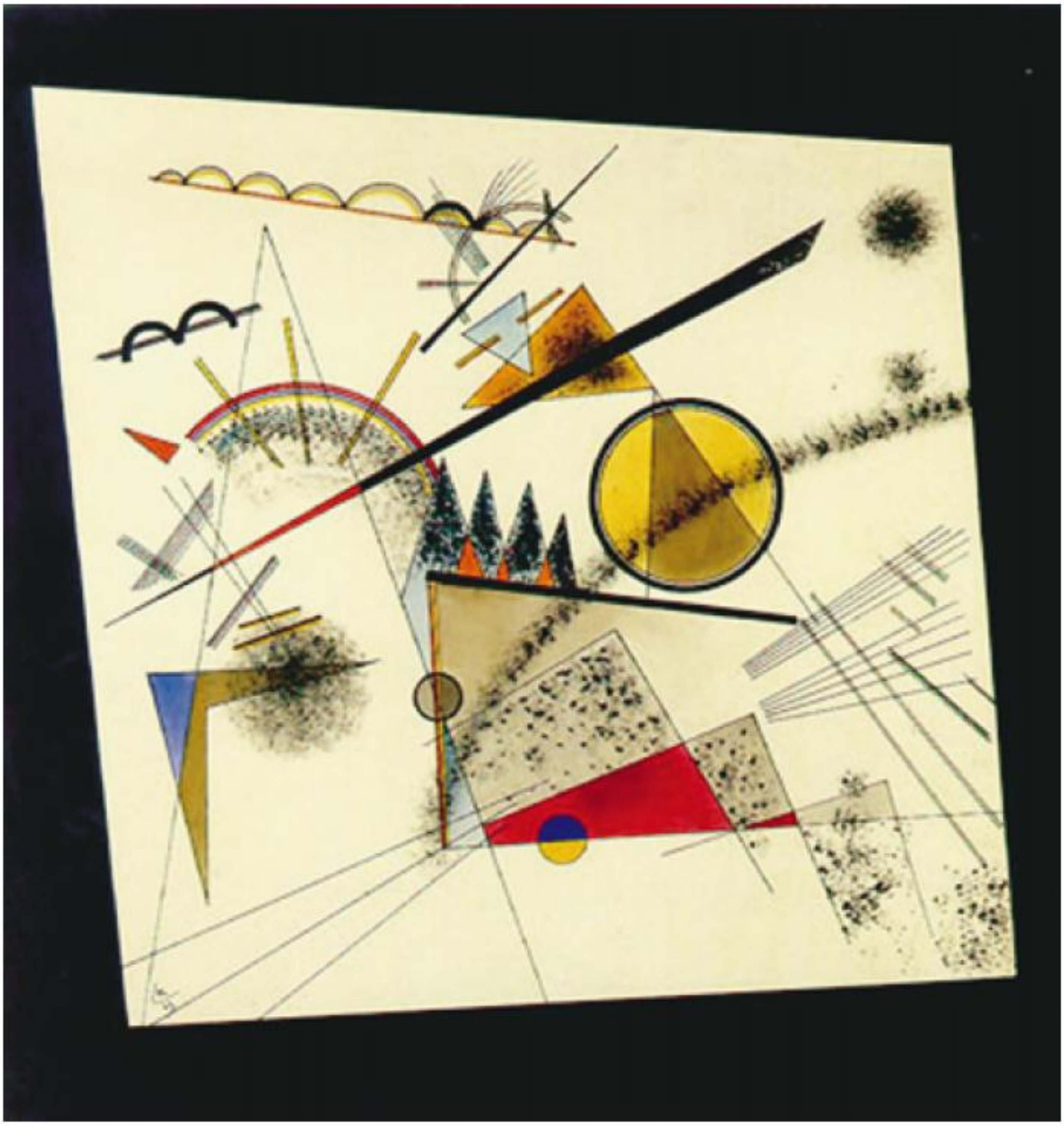
Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Αναλογίες

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αρχικά τα ευθύγραμμα τμήματα. Θα εισάγουμε την έννοια του λόγου ευθύγραμμων τμημάτων, απ' όπου θα προκύψει η έννοια της μέτρησης και του μέτρου ευθύγραμμου τμήματος.

Στη συνέχεια θα αποδειχθούν οι βασικές προτάσεις του κεφαλαίου που είναι το θεώρημα του Θαλή και το θεώρημα των Διχοτόμων ενός τριγώνου.



Βασίλη Καντίνσκυ, (Ρώσος, 1866 - 1944), «Μέσα στο μαύρο τετράγωνο» 1923.

7.1 Εισαγωγή

Μέγεθος γενικά λέγεται οτιδήποτε επιδέχεται αύξηση ή ελάττωση. Γεωμετρικά μεγέθη λέγονται τα μεγέθη που εξετάζονται από τη Γεωμετρία. Τέτοια είναι τα ευθύγραμμα τμήματα, οι γωνίες, τα τόξα, οι επιφάνειες επίπεδων σχημάτων, οι όγκοι των στερεών κτλ.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα απλούστερα γεωμετρικά μεγέθη, τα ευθύγραμμα τμήματα.

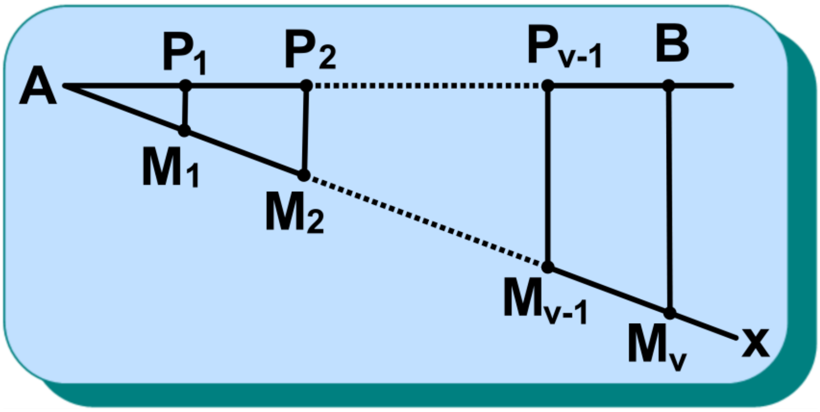
Αρχικά θα διαιρέσουμε δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα μέρη.

7.2 Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε ν ίσα μέρη

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το οποίο θέλουμε να διαιρέσουμε σε ν ίσα μέρη (ν ≥ 2).

Φέρουμε τυχαία ημιευθεία Αx, διαφορετική από την ΑΒ και παίρνουμε με το διαβήτη πάνω σε αυτή ν διαδοχικά ίσα τμήματα

$AM_1 = M_1M_2 = ... = M_{ν-1}M_ν$.



Σχήμα 1

Έπειτα φέρουμε το τμήμα ΜνΒ και από τα σημεία M_1, M_2, ..., $M_{ν-1}$ φέρουμε παράλληλες προς τη $M_νB$ που τέμνουν το ΑΒ στα σημεία

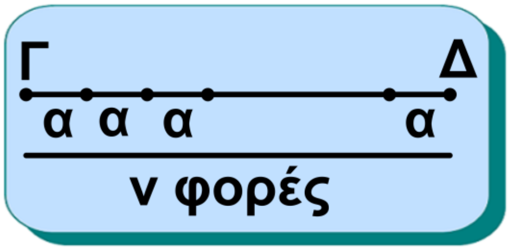
P_1, P_2, ..., $P_{ν-1}$ αντίστοιχα. Οι παράλληλες αυτές, σύμφωνα με το θεώρημα ΙΙΙ, § 5.6, ορίζουν ν ίσα τμήματα πάνω στην ΑΒ. Επομένως τα ν ίσα ευθύγραμμα τμήματα AP_1, P_1P_2, ... , $P_{ν-1}B$ είναι τα ζητούμενα.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε, γενικά, το γινόμενο ευθύ-

γραμμου τμήματος με οποιοδήποτε ρητό αριθμό και το λόγο δύο ευθύγραμμων τμημάτων.

7.3 Γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με αριθμό . Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων.

● Όπως είδαμε στην §2.8, αν ΑΒ=α ευθύγραμμο τμήμα και ν φυσικός αριθμός, ονομάζουμε γινόμενο του τμήματος ΑΒ επί το φυσικό αριθμό ν το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο είναι το άθροισμα ν ευθύγραμμων τμημάτων ίσων προς το ΑΒ=α.



Σχήμα 2

Γράφουμε ΓΔ = ν·ΑΒ.

● Αν χωρίσουμε, όπως παραπάνω, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = α σε ν ίσα μέρη καθένα από τα ν ίσα τμήματα τα παριστάνουμε με $\frac{AB}{\nu}$ ή $\frac{1}{\nu}\cdot AB$. Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ λέγεται **υποδιαίρεση** (ή **υποπολλαπλάσιο**) του ΑΒ αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν ώστε $EZ=\frac{AB}{\nu}$.

Σχήμα 3

● Αν μ είναι ένας θετικός ακέραιος και προσθέσουμε μ τέτοια τμήματα προκύπτει το τμήμα

$$\Gamma\Delta=\mu\left(\frac{1}{\nu}AB\right)=\frac{\mu}{\nu}AB.$$

Ονομάζουμε λοιπόν **γινόμενο** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ επί το θετικό ρητό αριθμό $q=\frac{\mu}{\nu}$ το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο είναι το άθροισμα μ ευθύγραμμων

τμημάτων ίσων με $\frac{1}{\nu}$ΑΒ.

Γράφουμε ΓΔ = q · ΑΒ.

Ορίζουμε ότι το γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος επί τον αριθμό q = 0 είναι το μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα.

Αποδεικνύεται ότι για ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα θετικό άρρητο αριθμό ρ υπάρχει πάντοτε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ τέτοιο, ώστε ΓΔ = ρ·ΑΒ.

Η κατασκευή όμως, τέτοιων ευθύγραμμων τμημάτων με τον κανόνα και το διαβήτη δεν είναι πάντοτε δυνατή.

● Έστω δύο μη μηδενικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ. Αν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και φυσικοί αριθμοί μ, ν τέτοιοι ώστε να ισχύει: ΑΒ = ν · ΚΛ και ΓΔ = μ · ΚΛ τα δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται σύμμετρα. Το ΚΛ λέγεται κοινό μέτρο των ΑΒ και ΓΔ.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι αν τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι σύμμετρα, τότε θα υπάρχει ένας θετικός ρητός αριθμός $q = \frac{\mu}{\nu}$ τέτοιος, ώστε ΓΔ = q · ΑΒ. Ο αριθμός q λέγεται λόγος των δύο τμημάτων και γράφεται με μορφή κλάσματος, δηλαδή $q = \frac{\Gamma\Delta}{AB}$

ΣΧΟΛΙΟ

Η γραφή $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ δεν σημαίνει διαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων αλλά είναι συμβολική γραφή της ισότητας ΓΔ = q · ΑΒ.

Σημαίνει διαίρεση όταν τα θεωρήσουμε πάνω στην ίδια ευθεία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το κοινό μέτρο δεν είναι μοναδικό γιατί κάθε υποδιαίρεση του ΚΛ είναι κοινό υποπολλαπλάσιο των ΑΒ και

ΓΔ. Επίσης είναι φανερό ότι δύο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα είναι (ακέραια) πολλαπλάσια κάθε κοινού τους μέτρου.

Δύο ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι σύμμετρα λέγονται **ασύμμετρα.** Θα λέμε επίσης ότι ο λόγος τους είναι **άρρητος** αριθμός.

Τέτοιες περιπτώσεις δεν είναι σπάνιες. Θα δούμε αργότερα ότι η πλευρά και η διαγώνιος ενός τετραγώνου δεν έχουν κοινό μέτρο.

7.4 Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα - Αναλογίες

Δύο ευθύγραμμα τμήματα α, γ λέγονται **ανάλογα** προς δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα β, δ όταν ο λόγος του α προς το β ισούται με το λόγο του γ προς το δ, δηλαδή όταν ισχύει: $\frac{α}{β}=\frac{γ}{δ}$ (1). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει θετικός αριθμός λ, ώστε να ισχύει α = λ·β και γ = λ·δ.

Η παραπάνω ισότητα (1) λέγεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ και δ. Τα τμήματα α και β λέγονται **ομόλογα** ή **αντίστοιχα**. Το ίδιο και τα γ και δ.

Τα α, δ λέγονται **άκροι όροι,** ενώ τα β, γ **μέσοι όροι** της αναλογίας. Ο τέταρτος όρος δ της αναλογίας λέγεται και **τέταρτη ανάλογος** των α, β και γ.

Στην αναλογία $\frac{α}{β}=\frac{β}{γ}$ οι μέσοι όροι είναι ίσοι. Αυτή η αναλογία λέγεται **συνεχής** και ο β λέγεται **μέση ανάλογος** των α και γ. Το β λέγεται επίσης **γεωμετρικός μέσος** των α και γ. Συχνά είναι χρήσιμο να αντικαταστήσουμε μια αναλογία με μια ισοδύναμη έκφραση. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των αναλογιών, που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, τις οποίες παίρνουμε χωρίς απόδειξη. Οι σπουδαιότερες από αυτές είναι οι εξής:

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma$, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}\Leftrightarrow \beta^2=\alpha\gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}$,

  $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\pm\beta}=\frac{\gamma}{\gamma\pm\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\cdots=\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\alpha+\gamma+\cdots+\kappa}{\beta+\delta+\cdots+\lambda}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν εφαρμόζουμε ιδιότητες σε αναλογίες με όρους ευθύγραμμα τμήματα, θεωρούμε ότι έννοιες που δεν έχουν οριστεί για ευθύγραμμα τμήματα (π.χ. "πολλαπλασιασμός ευθύγραμμων τμημάτων"), αναφέρονται αποκλειστικά στα μήκη τους.

7.5 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Όταν λέμε ότι θα μετρήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σημαίνει ότι θα το συγκρίνουμε με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο παίρνουμε ως μονάδα μέτρησης. Η επιλογή της μονάδας μέτρησης είναι αυθαίρετη. Στο 2ο κεφάλαιο αναφέραμε την έννοια του μήκους ευθύγραμμου τμήματος. Εδώ θα διατυπώσουμε τον ορισμό με τη βοήθεια του λόγου ευθύγραμμων τμημάτων.

Ορισμός

Μέτρο ή μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο λόγος του προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, που παίρνουμε ως μονάδα μέτρησης.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού του μέτρου τμήματος εί-

ναι οι παρακάτω προτάσεις:
● Δύο ίσα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντίστροφα, ως προς οποιαδήποτε μονάδα μέτρησης.
● Ο λόγος των μέτρων δύο τμημάτων, που μετρώνται με την ίδια μονάδα μέτρησης, ισούται με το λόγο των δύο τμημάτων και είναι ανεξάρτητος από τη μονάδα μέτρησης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

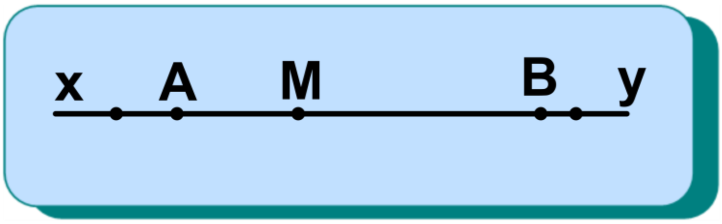
● Το μέτρο του τμήματος είναι μη αρνητικός αριθμός και θα συμβολίζεται όπως και το τμήμα. Έτσι, **με το σύμβολο ΑΒ θα εννοούμε και το μέτρο του τμήματος ΑΒ.**

● Όσα αναφέραμε για το **λόγο** και το **μέτρο** τμήματος ισχύουν γενικά και για άλλα γεωμετρικά μεγέθη, όπως η γωνία, το τόξο κτλ.

7.6 Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο

Είδαμε στην § 7.2 πώς διαιρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα μέρη. Θα δούμε στη συνέχεια πότε ένα σημείο Μ διαιρεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δοσμένο λόγο.

Σε ευθεία xy δίνονται δύο ορισμένα σημεία Α και Β.
Έστω σημείο Μ της ευθείας xy, διαφορετικό του Β.



Σχήμα 4

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
1) Αν το Μ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ τότε ο λόγος των αποστάσεών του από τα Α και Β ισούται με $\frac{MA}{MB}$. Λέμε ότι το Μ **διαιρεί εσωτερικά** το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, αν και μόνο αν

$\frac{MA}{MB}=\lambda$. Για το σημείο Μ ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση

Το σημείο Μ είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Πράγματι, αν Μ΄ εσωτερικό σημείο του ΑΒ ώστε $\frac{M'A}{M'B}=\lambda$, τότε έχουμε:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{M'A}{M'B}\Leftrightarrow\frac{MA}{MA+MB}=\frac{M'A}{M'A+M'B}\Leftrightarrow$$

$$\frac{MA}{AB}=\frac{M'A}{AB}\Leftrightarrow MA=M'A,$$

οπότε το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Μ΄.

Αν $\frac{MA}{MB}=\lambda$, τότε

$$\frac{MA}{MB}=\frac{\lambda}{1}\Leftrightarrow\frac{MA}{MA+MB}=\frac{\lambda}{\lambda+1}\Leftrightarrow$$

$$MA=\frac{\lambda}{\lambda+1}AB \text{ και}$$

$$MB=AB-MA=AB-\frac{\lambda}{\lambda+1}AB\Leftrightarrow$$

$$MB=\frac{1}{\lambda+1}AB.$$

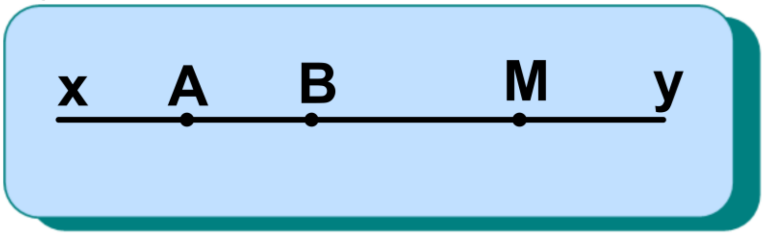
2) Αν Μ σημείο στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε πάλι ο λόγος των αποστάσεών του από τα Α και Β ισούται με $\frac{MA}{MB}$. Λέμε ότι το Μ **διαιρεί εξωτερικά** το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, αν και μόνο αν $\frac{MA}{MB}=\lambda$.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και σε αυτή την περίπτωση, το σημείο Μ είναι μοναδικό.

Διερεύνηση

(i) Αν λ=1, τότε προφανώς δεν υπάρχει σημείο Μ που να διαιρεί εξωτερικά το ΑΒ σε λόγο λ=1, αφού ΜΑ ≠ ΜΒ. Στην περίπτωση αυτή το Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος.

Σχήμα 5



(ii) Αν λ>1, τότε $\frac{MA}{MB} > 1 \Leftrightarrow MA > MB$, οπότε το Μ βρίσκεται στην προέκταση του ΑΒ, προς το μέρος του Β (σχ.5). Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\frac{MA}{MB} = \lambda \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow$$

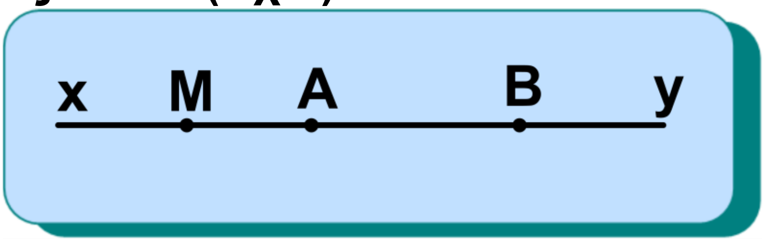
$$\frac{MA}{MA - MB} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \Leftrightarrow \boxed{MA = \frac{\lambda}{\lambda - 1} AB}$$ και

$$MB = MA - AB = \frac{\lambda}{\lambda - 1} AB - AB \Leftrightarrow$$

$$\boxed{MB = \frac{1}{\lambda - 1} AB}.$$

(iii) Αν λ < 1 τότε $\frac{MA}{MB} < 1 \Leftrightarrow$ $MA < MB$, οπότε το Μ βρίσκεται στην προέκταση του ΑΒ, προς το μέρος του Α (σχ.6).

Σχήμα 6



Όπως παραπάνω βρίσκουμε ότι

$$\boxed{MA = \frac{\lambda}{1 - \lambda} AB} \quad \text{και} \quad \boxed{MB = \frac{1}{1 - \lambda} AB}.$$

(iv) Οριακές θέσεις

α) Όταν το σημείο Μ τείνει στο Α, το τμήμα ΜΑ τείνει στο μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, οπότε ο λόγος λ τείνει στο μηδέν.

β) Όταν το σημείο Μ τείνει στο Β, το τμήμα ΜΒ τείνει στο μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, οπότε ο λόγος λ τείνει στο άπειρο.

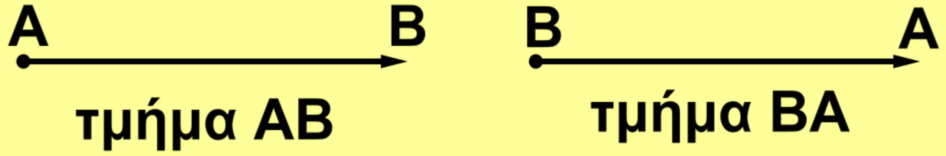
γ) Όταν το σημείο Μ απομακρύνεται απεριόριστα, τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ τείνουν να ταυτιστούν, οπότε ο λόγος λ τεί-νει στη μονάδα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Δεχόμαστε συμβατικά πως, όταν λέμε ότι το σημείο Μ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, εννοούμε $\frac{MA}{MB}=\lambda$ και όχι $\frac{MB}{MA}=\lambda$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

- **Αν Ο είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε το σημείο Μ τέτοιο ώστε $\frac{MA}{MB}=\lambda$ βρίσκεται μεταξύ Ο και Α όταν λ<1 και μεταξύ Ο και Β όταν λ>1.**
- **Αν $\frac{MB}{MA}=\lambda$, λέμε ότι το Μ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΒΑ σε λόγο λ. Δηλαδή θεωρούμε ότι τα άκρα Α και Β του τμήματος είναι διατεταγμένα. Ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα λέγεται προσανατολισμένο.**



Σχήμα 7

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να ορίσετε τους παρακάτω λόγους:

i) της υποτείνουσας ορθογώνιου τριγώνου προς την αντίστοιχη διάμεσο,

ii) μιας εγγεγραμμένης γωνίας προς την αντίστοιχη επίκεντρη,

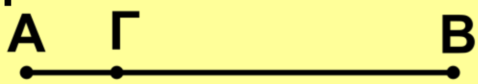
iii) της διαμέτρου ενός κύκλου, προς την ακτίνα του,

iv) μιας ορθής γωνίας προς μια γωνία ισόπλευρου τριγώνου.

2. Στο παρακάτω σχήμα είναι

ΑΒ = 10α και ΑΓ = 2α.

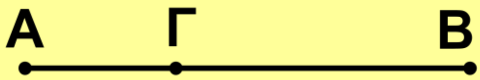
Να βρεθούν οι λόγοι:



i) ΑΒ προς ΑΓ, ii) ΑΓ προς ΑΒ,

iii) ΒΓ προς ΑΒ, iv) ΑΓ προς ΒΓ.

3. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο του Γ έτσι ώστε $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{1}{2}$



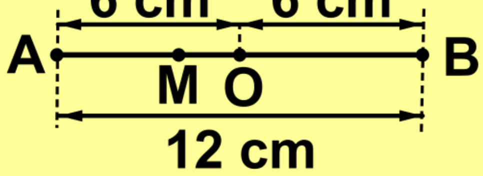
Τότε ο λόγος $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$ είναι:

i) 2 ii) 3 iii) $\frac{3}{2}$ iv) $\frac{2}{3}$

v) κανένα από τα παραπάνω.

(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 12 cm και το μέσο του Ο. Να βρεθεί σημείο Μ του ΑΟ, ώστε τα σημεία Μ και Β να διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά αντίστοιχα το τμήμα ΑΟ στον ίδιο λόγο.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 3, 2. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου σε μοίρες.
2. Ο λόγος μιας γωνίας ω προς την παραπληρωματική της είναι $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η γωνία ω.
3. Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3, 4. Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 65cm, να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Οι εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3 και 4. Να υπολογισθούν οι εσωτερικές του γωνίες.
2. Σε ευθεία ε παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε ΑΒ = 6cm, ΒΓ = 12cm, ΓΔ = 2cm. Να βρεθεί σημείο Μ του ΒΓ, το οποίο διαιρεί εσωτερικά τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ στον ίδιο λόγο.
3. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των αναλογιών, να διαιρέσετε δοσμένο τμήμα ΑΒ = α σε δύο τμήματα, τα οποία έχουν λόγο $\frac{3}{4}$.

7.7 Θεώρημα του Θαλή

Είδαμε στην § 5.6 ότι αν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν ίσα τμήματα πάνω στη μία, θα ορίζουν ίσα τμήματα και πάνω στην άλλη. Τα παραπάνω γενικεύονται για οποιονδήποτε λόγο στο επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό ως θεώρημα του Θαλή.

Θεώρημα

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

Δηλαδή:

Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$,τότε

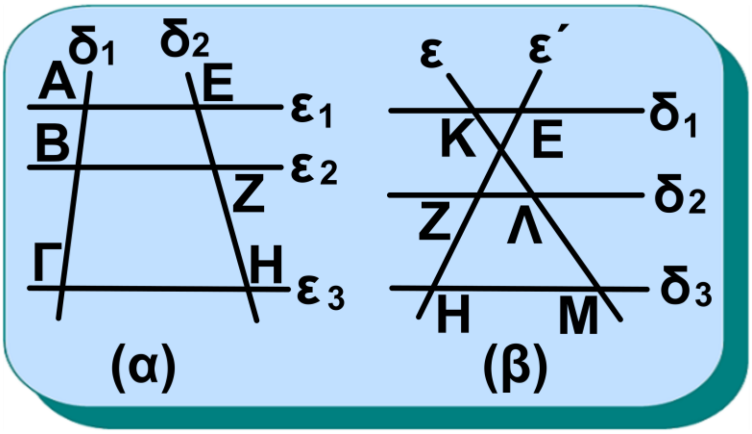
$$\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}$$

(σχ.8α).

Αν $\delta_1 // \delta_2 // \delta_3$,τότε

$$\frac{K\Lambda}{EZ} = \frac{\Lambda M}{ZH} = \frac{KM}{EH}$$

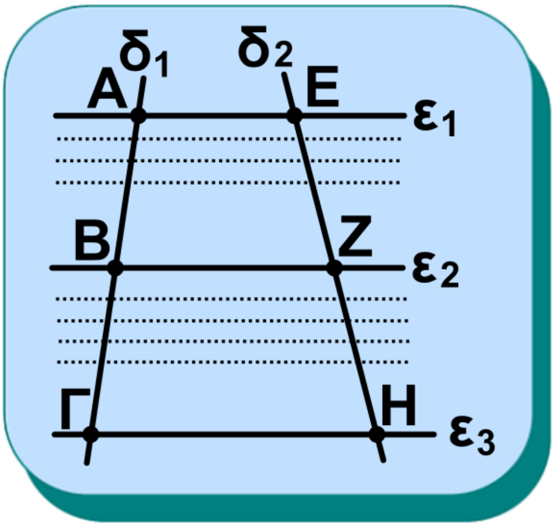
(σχ.8β)



Σχήμα 8

Απόδειξη

(i) Αν τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ (σχ.9) είναι σύμμετρα, υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα μ τέτοιο, ώστε ΑΒ = κμ και ΒΓ = λμ (1), όπου κ, λ φυσικοί αριθμοί. Διαιρούμε το τμήμα ΑΒ σε κ τμήματα ίσα με το μ και το ΒΓ σε λ τμήματα ίσα με το μ. Από τα σημεία που ορίζονται με τον παραπάνω τρόπο φέρουμε ευθείες παράλληλες προς την ε_1, οι οποίες τέμνουν τη δ_2.



Σχήμα 9

Επειδή τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη δ_1 είναι ίσα μεταξύ τους, τότε και τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη δ_2 θα είναι ίσα τμήματα, που το μήκος του καθενός ας είναι ν. Τότε θα έχουμε ΕΖ = κν και ΖΗ = λν (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι: $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\kappa\mu}{\lambda\mu} = \frac{\kappa}{\lambda}$ **και**

$\frac{EZ}{ZH} = \frac{\kappa\nu}{\lambda\nu} = \frac{\kappa}{\lambda}$, **οπότε** $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{EZ}{ZH}$ **ή** $\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH}$ **(3).**

Από την αναλογία (3) παίρνουμε:

$$\frac{AB}{EZ}=\frac{B\Gamma}{ZH}=\frac{AB+B\Gamma}{EZ+ZH} \text{ ή } \frac{AB}{EZ}=\frac{B\Gamma}{ZH}=\frac{A\Gamma}{EZ}$$

(ii) Αν τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ είναι ασύμμετρα, ο λόγος $\frac{AB}{B\Gamma}$ είναι ασύμμετρος αριθμός. Αποδεικνύεται ότι και σε αυτή την περίπτωση ισχύει η προηγούμενη αναλογία.

Ισχύει και το **αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή**.

Θεώρημα

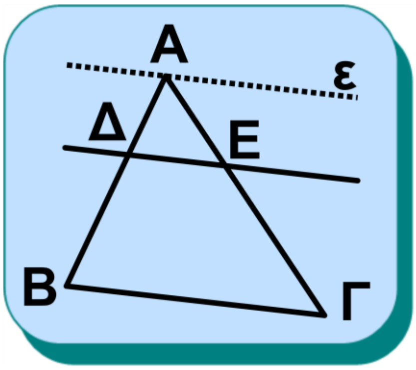
Θεωρούμε δύο ευθείες δ_1 και δ_2 που τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία Α, Β και Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν Γ και Η είναι σημεία των ευθειών δ_1 και δ_2 αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{EZ}{ZH}$, τότε η ευθεία ΓΗ είναι παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 (σχ.9).

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.

Απόδειξη

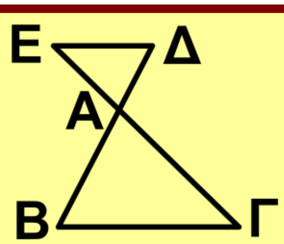
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΔΕ//ΒΓ (σχ.10). Φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία ε//ΒΓ//ΔΕ, οπότε από το θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι $\frac{A\Delta}{AE}=\frac{\Delta B}{E\Gamma}$.



Σχήμα 10

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το παραπάνω πόρισμα ισχύει και στην περίπτωση που η ΔΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 11

Μια σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή είναι το επόμενο θεώρημα.

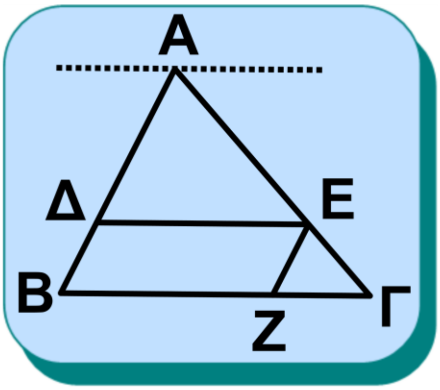
Θεώρημα

Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΔΕ//ΒΓ (σχ.12). Θα αποδείξουμε ότι:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}.$$



Σχήμα 12

Επειδή ΔΕ//ΒΓ, από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ} \quad (1)$$

Φέρουμε την ΕΖ παράλληλη της ΑΒ, οπότε το ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΔΕ=ΒΖ (2).

Επειδή ΕΖ//ΑΒ, από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΒΖ}{ΒΓ} \quad ή \quad \frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ} \quad (3).$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

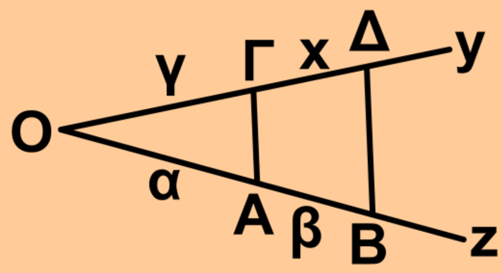
● Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Θαλή γίνονται ορισμένες γεωμετρικές κατασκευές. Δύο από τις σπουδαιότερες είναι τα παρακάτω προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 (Κατασκευή τέταρτης αναλόγου)

Αν δοθούν τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ, να κατασκευασθεί το τμήμα x, που ορίζεται από την αναλογία $\frac{α}{β}=\frac{γ}{x}$

Λύση

Έστω μια γωνία $z\hat{O}y$. Πάνω στη μία πλευρά της Oz παίρνουμε διαδοχικά τα τμήματα ΟΑ = α, ΑΒ = β και πάνω στην Oy το τμήμα ΟΓ = γ.



Σχήμα 13

Από το Β φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΓ, που τέμνει την Oy στο Δ. Τότε ΓΔ = x γιατί

$$\frac{ΟΑ}{ΑΒ} = \frac{ΟΓ}{ΓΔ} \quad ή \quad \frac{α}{β} = \frac{γ}{x}.$$

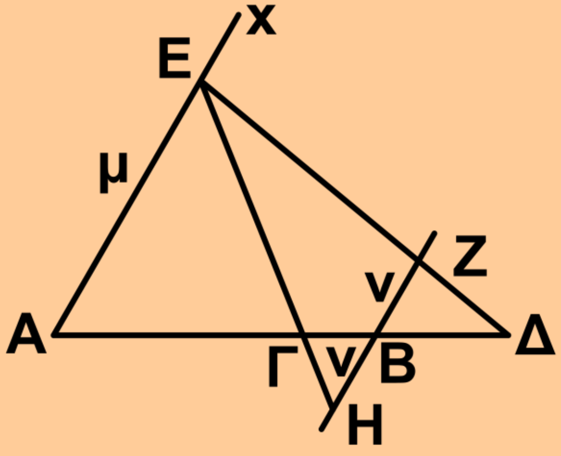
Είναι φανερό ότι με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζεται το τμήμα x αν $\frac{x}{α} = \frac{β}{γ}$ ή $\frac{α}{x} = \frac{β}{γ}$ ή $\frac{α}{β} = \frac{x}{γ}$, αρκεί κάθε φορά να γράφουμε το x ως τέταρτο όρο της αναλογίας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2 (Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε δοσμένο λόγο)

Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, εσωτερικά και εξωτερικά, σε δοσμένο λόγο $\frac{μ}{ν}$, όπου μ,ν γνωστά τμήματα.

Λύση

Από το Α φέρουμε μια ημιευθεία Αx, πάνω στην οποία παίρνουμε τμήμα ΑΕ=μ. Από το Β φέρουμε ευθεία παράλληλη της Αx και παίρνουμε πάνω σε αυτή εκατέρωθεν του Β τμήματα ΒΖ=ΒΗ=ν.



Σχήμα 14

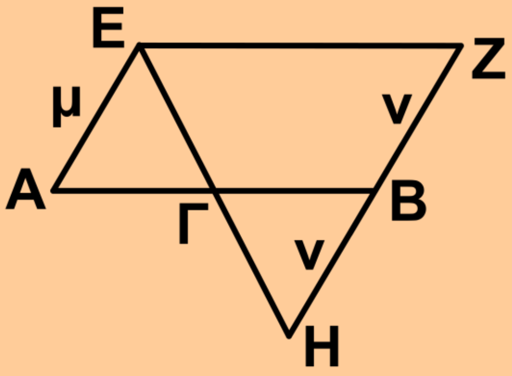
Τα σημεία Γ και Δ στα οποία οι ευθείες ΕΗ και ΕΖ τέμνουν την ευθεία ΑΒ είναι τα ζητούμενα. Πράγματι, τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΓΗΒ έχουν ανάλογες πλευρές, οπότε:

$$\frac{ΓΑ}{ΓΒ}=\frac{ΑΕ}{ΒΗ}=\frac{μ}{ν}.$$

Όμοια τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΒΖ έχουν ανάλογες πλευρές, οπότε:

$$\frac{ΔΑ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ}{ΒΖ}=\frac{μ}{ν}.$$

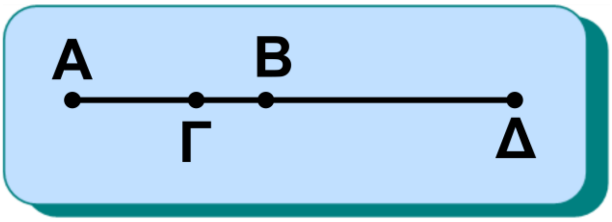
Αν μ=ν, το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε η ΕΖ δε δίνει σημείο Δ πάνω στην ΑΒ, ενώ το Γ είναι το μέσο του ΑΒ.



Σχήμα 15

Δύο σημεία Γ και Δ, που διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο, λέγονται **συζυγή αρμονικά** των Α και Β (σχ.16).

Δηλαδή τα Γ και Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β, αν τα τέσσερα σημεία είναι συνευθειακά και $\frac{ΓΑ}{ΓΒ}=\frac{ΔΑ}{ΔΒ}$.



Σχήμα 16

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε την αναλογία

$$\frac{ΓΑ}{ΔΑ}=\frac{ΓΒ}{ΔΒ} \quad ή \quad \frac{ΑΓ}{ΑΔ}=\frac{ΒΓ}{ΒΔ},$$

από την οποία προκύπτει ότι και τα Α και Β είναι συζυγή αρμονικά των Γ και Δ. Τα τέσσερα σημεία (Α,Β) και (Γ,Δ) λέμε ότι αποτελούν **αρμονική τετράδα.**

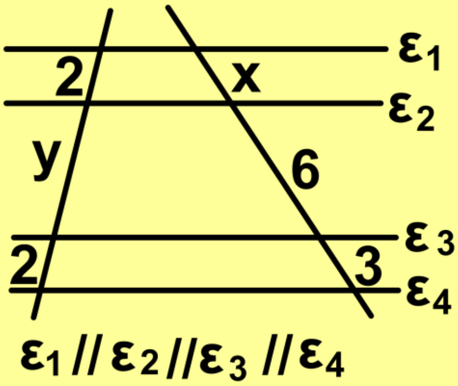
Σημείωση

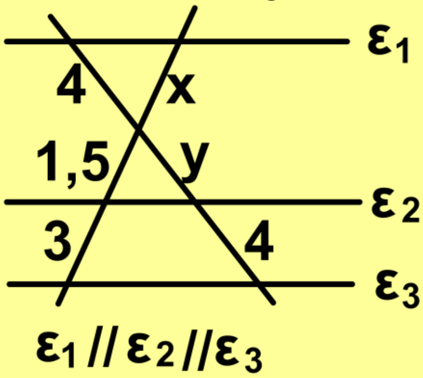
Το Δ λέγεται **αρμονικό συζυγές** του Γ ως προς τα Α και Β. Όπως είδαμε παραπάνω, αν το Γ είναι το μέσο του ΑΒ, το Δ **δεν** υπάρχει.

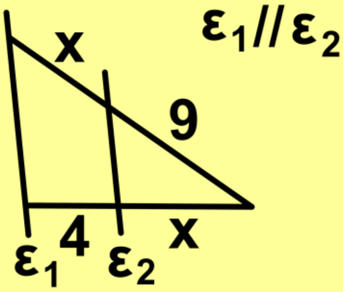
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

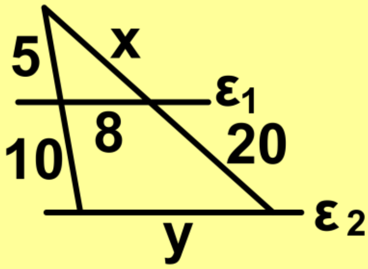
Ερωτήσεις Κατανόησης

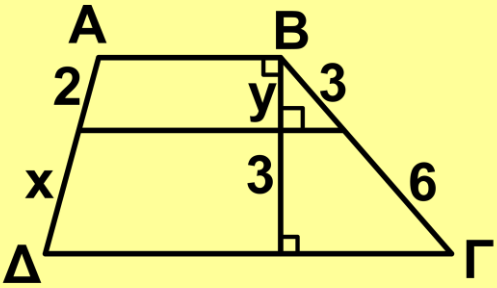
1. **Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y.**



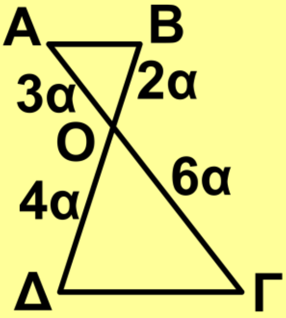


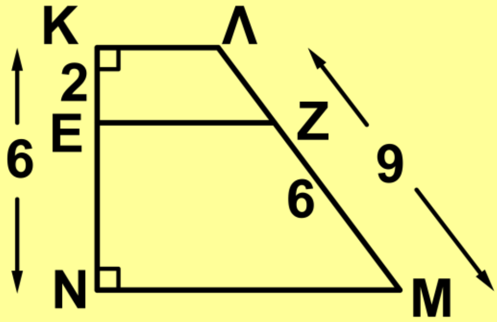






2. **Να δικαιολογήσετε γιατί ΑΒ//ΓΔ και ΕΖ//ΚΛ//ΜΝ στα παρακάτω σχήματα.**

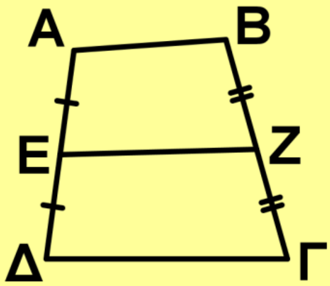




3. **Στο διπλανό σχήμα είναι:**

i) $\frac{ΑΕ}{ΕΔ} = \frac{ΒΖ}{ΖΓ}$ **Σ Λ**

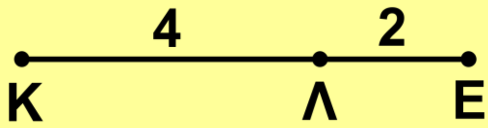
ii) ΕΖ//ΓΔ **Σ Λ**



Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες σχέσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

4. Δίνεται τμήμα ΑΒ και δυο σημεία Γ και Δ ώστε $\frac{ΓΑ}{ΓΒ}=\frac{ΔΑ}{ΔΒ}$. Αρκεί η προηγούμενη σχέση ώστε τα Γ και Δ να είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β;

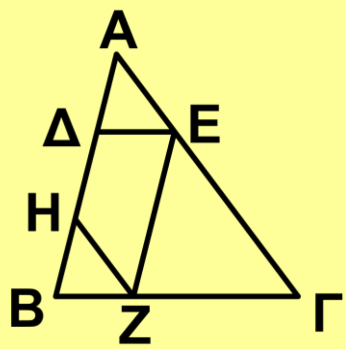
5. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΚΛ = 4, ΛΕ = 2. Να βρεθεί σημείο Ζ τέτοιο, ώστε τα σημεία (Ζ,Ε) να είναι συζυγή αρμονικά των (Κ,Λ).



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ//ΒΓ, ΕΖ//ΑΒ και ΖΗ//ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΑ}{ΔΒ}=\frac{ΗΒ}{ΗΑ}$.



2. Από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ε, την πλευρά ΒΓ στο Ζ και την προέκταση της ΔΓ στο Η.

Να αποδείξετε ότι i) $\frac{ΑΖ}{ΑΗ}=\frac{ΑΒ}{ΔΗ}$, ii) $ΑΕ^2=ΕΖ\cdot ΕΗ$.

3. Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ, ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο. Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την ΑΔ στο Ε. Να αποδείξετε ότι το ΟΑ είναι μέσο ανάλογο των ΟΔ και ΟΕ.

4. Από σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε την παράλληλη προς τη διάμεσό του ΑΜ, που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΕ}{ΑΖ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

5. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της διαγωνί-

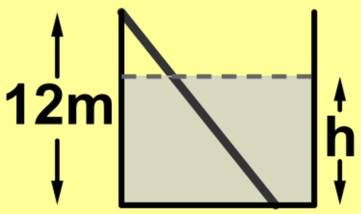
ου ΑΓ. Οι παράλληλες από το Ε προς τις ΒΓ, ΓΔ τέμνουν τις ΑΒ, ΑΔ στα Ζ και Η αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΔΒ.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε της πλευράς ΒΓ, ώστε $ΒΔ = ΓΕ < \frac{ΒΓ}{2}$. Οι παράλληλες από τα Δ και Ε προς τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα τέμνουν την ΑΒ στο Ζ και την ΑΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΒΓ.

7. Από τυχαίο σημείο Κ της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΒ και ΑΓ, που τέμνουν τη ΒΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι
ΜΔ = ΜΕ .

8. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Ε το μέσο της μικρής βάσης ΑΒ. Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την προέκταση της ΓΒ στο Η, να αποδείξετε ότι τα Ζ, Η είναι συζυγή αρμονικά των Δ, Ε.

9. Δεξαμενή ύψους υ = 12m περιέχει νερό που φτάνει σε ύψος h. Ράβδος μήκους 15m τοποθετείται στη δεξαμενή, όπως στο διπλανό σχήμα. Βγάζουμε τη ράβδο και παρατηρούμε ότι το τμήμα που βρέχτηκε έχει μήκος 10m. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος h του νερού;



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β και Ο είναι το μέσο του ΑΒ, να αποδείξετε ότι τα Γ και Δ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Ο.

2. Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = α σε τμήματα x, y, ω τέτοια, ώστε 4x = 6y = 3ω.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και έστω Δ η τομή της διαμέτρου ΑΕ με τη ΒΓ. Αν Ζ και Η είναι οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να

αποδείξετε ότι ΖΗ//ΒΓ.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της ΔΒ τέτοιο, ώστε $ΔΕ = \frac{1}{5}ΔΒ$. Αν η ΓΕ τέμνει την ΑΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΑΖ = 3ΔΖ.

5. Από την κορυφή Β παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε, που τέμνει την πλευρά ΑΔ στο Ε και την προέκταση της ΓΔ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΑ}{ΔΕ} - \frac{ΔΓ}{ΔΖ} = 1$.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε της ΒΓ ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τη διάμεσο ΑΜ στο Κ. Να αποδείξετε ότι:

i) Το Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

ii) ΚΕ//ΑΓ.

7. Τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο Ο. Από το Ο φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΔ, ΒΓ που τέμνουν τη ΔΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΓΖ.

Σύνθετα θέματα

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΕΓ}{ΕΑ}$.

Να αποδείξετε ότι τα μέσα Κ, Λ, Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα, είναι συνευθειακά σημεία.

2. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τυχαία ευθεία, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΖΑ \cdot ΗΓ = ΗΑ \cdot ΖΒ$.

3. Δίνεται ευθεία ε, τέσσερα διαδοχικά σημεία της Α, Γ, Β, Δ και σημείο Ο εκτός αυτής. Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΟΑ, η οποία τέμνει τις ΟΓ, ΟΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β, αν και μόνο αν ΒΕ = ΒΖ.

4. Αν ένα σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ σε λόγο λ και ένα σημείο Ε χωρίζει εσωτερικά το ΑΔ σε λόγο κ, να υπολογισθεί ο λόγος στον οποίο χωρίζει η ευθεία ΒΕ την πλευρά ΑΓ.

5. Η εφαπτομένη ενός κύκλου σε σημείο του Μ τέμνει τις εφαπτόμενες στα άκρα Α, Β μιάς διαμέτρου του ΑΒ, στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΓ, ΑΔ, να αποδείξετε ότι ΜΚ⊥ΑΒ.

7.8 Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου

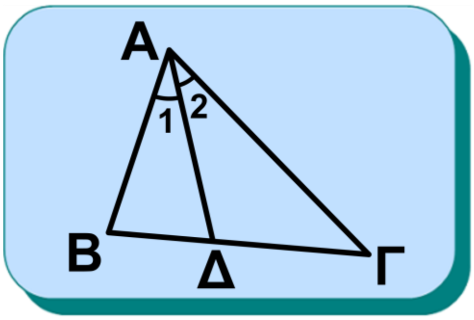
Θα μελετήσουμε εδώ, ως εφαρμογές του θεωρήματος του Θαλή, βασικές ιδιότητες της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου γωνίας τριγώνου.

Θεώρημα (εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου)

Η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί την απέναντι πλευρά εσωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

Δηλαδή, αν ΑΔ διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}.$$



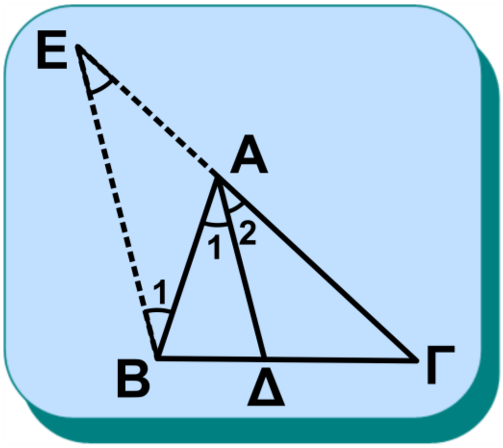
Σχήμα 17

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ (σχ.18). Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Ε.

Από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΕΒ έχουμε $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ (1).

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΕ = ΑΒ.



Σχήμα 18

Πράγματι:

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΕ), $\hat{A}_2 = \hat{E}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΔ και ΒΕ), $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΑΔ διχοτόμος), οπότε $\hat{B}_1 = \hat{E}$ άρα ΑΕ = ΑΒ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}.$$

Επειδή το σημείο Δ που διαιρεί την πλευρά ΒΓ σε λόγο $\frac{AB}{A\Gamma}$ είναι μοναδικό, το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Αν το Δ είναι σημείο της πλευράς ΒΓ και ισχύει $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ τότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

● Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων, στα οποία διαιρεί η διχοτόμος την απέναντι πλευρά ως συνάρτηση των α,β,γ.

Στο σχ.18 θέλουμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις του Δ από τα Β και Γ.

Η προηγούμενη αναλογία γράφεται: $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$ ή

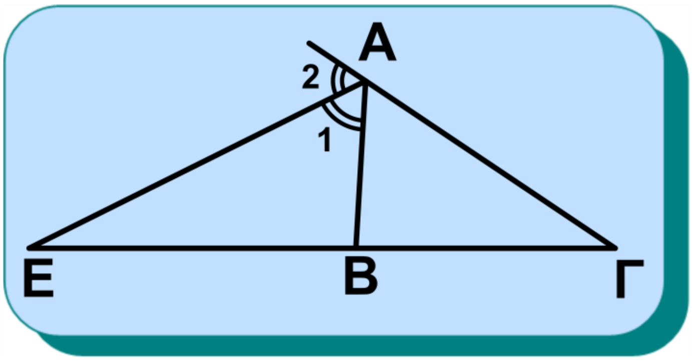
$$\frac{\Delta B}{\Delta B + \Delta \Gamma} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \text{ ή } \frac{\Delta B}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \text{ οπότε } \Delta B = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}.$$

Όμοια βρίσκουμε $\Delta \Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma}$.

Θεώρημα (εξωτερικής διχοτόμου τριγώνου)

Η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, το οποίο διαιρεί εξωτερικά την πλευρά αυτή σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

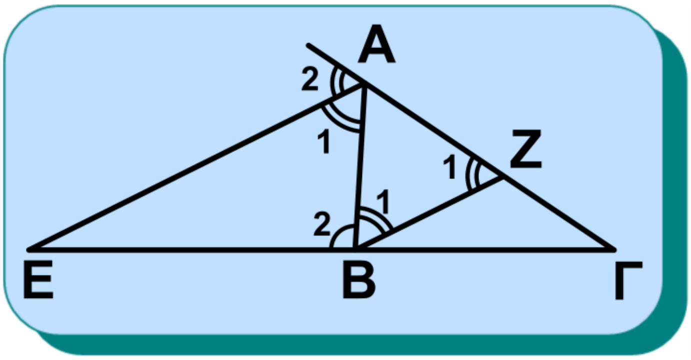
Δηλαδή, αν η ΑΕ είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι: $\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.



Σχήμα 19

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η εξωτερική διχοτόμος του ΑΕ (σχ.20). Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΑΕ, που τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΑΕ



Σχήμα 20

έχουμε $\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AZ}{A\Gamma}$ (1).

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΖ = ΑΒ. Πράγματι:

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ και ΒΖ), $\hat{A}_2 = \hat{Z}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΕ και ΒΖ), $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΑΕ εξωτερική διχοτόμος), οπότε $\hat{B}_1 = \hat{Z}_1$ άρα ΑΖ = ΑΒ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το σημείο Ε βρίσκεται προς το μέρος της **μικρότερης** πλευράς.

Πράγματι αν $\beta > \gamma$ τότε $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ οπότε $\hat{\Gamma} = \varphi > 0$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A}_1 + \hat{B}_2 < 180°$.

Έχουμε $\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}_{εξ}}{2} = \frac{\hat{B}+\hat{Γ}}{2}$ και

$\hat{B}_2 = 180^o - \hat{B}$, οπότε

$\hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180^o - \hat{B} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{Γ}}{2} =$

$= 180^o - \left(\frac{\hat{B}-\hat{Γ}}{2}\right) = 180^o - \frac{φ}{2} < 180^o.$

Αν ΑΒ = ΑΓ, τότε το Ε **δεν** υπάρχει.

(Εφαρμογή 1 . § 4.8)

Το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Αν το Ε είναι σημείο της προέκτασης της πλευράς ΒΓ και ισχύει $\frac{BE}{ΕΓ} = \frac{AB}{ΑΓ}$, τότε η ΑΕ είναι η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

● **Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων στα οποία διαιρεί η εξωτερική διχοτόμος την απέναντι πλευρά ως συνάρτηση των α,β,γ.**

Στο σχ.20 θέλουμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις του Ε από τα Β και Γ.

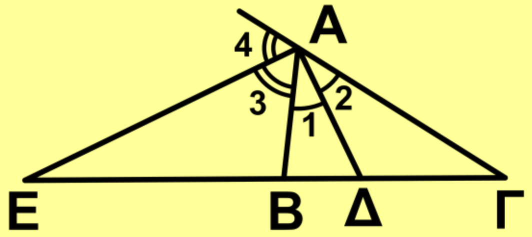
Η προηγούμενη αναλογία γράφεται: $\frac{EB}{ΕΓ} = \frac{γ}{β}$ ή

$\frac{EB}{ΕΓ - EB} = \frac{γ}{β-γ}$ ή $\frac{EB}{α} = \frac{γ}{β-γ}$, οπότε $EB = \frac{αγ}{β-γ}$. Όμοια

βρίσκουμε ότι $ΕΓ = \frac{αβ}{β-γ}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν Δ και Ε είναι τα ίχνη της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τριγώνου ΑΒΓ, στην απένα- ντι πλευρά, θα είναι



Σχήμα 21

$\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ **και** $\frac{ΕΒ}{ΕΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$**, οπότε** $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΕΒ}{ΕΓ}$**. Δηλαδή τα ίχνη Δ και Ε των δύο διχοτόμων είναι σημεία συζυγή αρμονικά ως προς τις κορυφές Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.**

7.9 Απολλώνιος Κύκλος

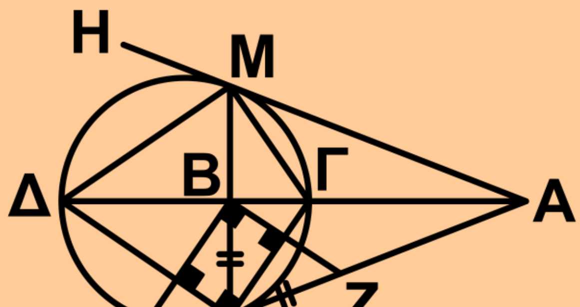
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που οι αποστάσεις τους από δύο ορισμένα σημεία Α και Β του επιπέδου έχουν γνωστό λόγο $\frac{μ}{ν}\neq 1$

Λύση

Έστω δύο δεδομένα σημεία Α, Β και Μ τυχαίο σημείο του τόπου με την ιδιότητα $\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=\frac{μ}{ν}$ (1).

Φέρουμε την εσωτερική δι- χοτόμο ΜΓ και την εξωτερι- κή διχοτόμο ΜΔ του τριγώ- νου ΜΑΒ.



Σχήμα 22

Τότε $\frac{ΓΑ}{ΓΒ}=\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=\frac{μ}{ν}$ **(2) και** $\frac{ΔΑ}{ΔΒ}=\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=\frac{μ}{ν}$ **(3).**

Δηλαδή, τα σημεία Γ και Δ είναι ορισμένα, αφού χωρί- ζουν το ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{μ}{ν}$. Ακόμα

είναι $\Gamma\hat{M}\Delta = 90°$, επειδή οι ΜΓ και ΜΔ είναι διχοτόμοι των δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών $A\hat{M}B$ και $B\hat{M}H$.
Άρα το Μ ανήκει σε κύκλο με διάμετρο το τμήμα ΓΔ.
Αντίστροφα: Έστω Ν ένα σημείο του κύκλου με διάμετρο το τμήμα ΓΔ. Τότε $\Gamma\hat{N}\Delta = 90°$.
Θα αποδείξουμε ότι $\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$.
Από το Β φέρουμε ΒΕ//ΓΝ, οπότε στο τρίγωνο ΑΒΕ είναι $\frac{NA}{NE} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$ ή λόγω της (2) $\frac{NA}{NE} = \frac{\mu}{\nu}$ (4).
Επίσης φέρουμε ΒΖ//ΔΝ, οπότε στο τρίγωνο ΑΔΝ είναι $\frac{NA}{NZ} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$ ή λόγω της (3) $\frac{NA}{NZ} = \frac{\mu}{\nu}$ (5).
Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει ότι , οπότε ΝΕ=ΝΖ, δηλαδή το Ν είναι μέσο του ΕΖ.
Επειδή $\Gamma\hat{N}\Delta = 90°$ και ΒΕ//ΓΝ, ΒΖ//ΔΝ, θα είναι και $E\hat{B}Z = 90°$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ορθογώνιο στο $\hat{B}$ με διάμεσο ΒΝ, οπότε ΝΒ = ΝΕ = ΝΖ (6).
Από τις σχέσεις (4) και (6) έχουμε $\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$.
Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με διάμετρο ΓΔ.

Κατασκευή

Αν δοθούν τα σημεία Α και Β και ο λόγος $\frac{\mu}{\nu}$, διαιρούμε το τμήμα ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, όπως στο πρόβλημα 2, § 7.7 και βρίσκουμε τα Γ και Δ. Στη συνέχεια γράφουμε τον κύκλο με διάμετρο ΓΔ.

Διερεύνηση

Αν είναι $\frac{\mu}{\nu} = 1$, τότε $\frac{MA}{MB} = 1$ ή ΜΑ = ΜΒ. Άρα το Μ ισαπέ-

χει από τα Α και Β, οπότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο προηγούμενος γεωμετρικός τόπος λέγεται Απολλώνιος κύκλος, από το όνομα του Έλληνα μαθηματικού Απολλωνίου που πρώτος μελέτησε το θέμα.
Γενικά υπάρχουν άπειροι απολλώνιοι κύκλοι ως προς δύο σημεία Α και Β. Για να ορισθεί κάποιος από αυτούς, όταν δοθούν τα Α και Β, χρειάζεται να δοθεί ο λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ ή ένα από τα σημεία Γ, Δ, ή ισοδύναμα, ένα τυχαίο σημείο του απολλώνιου κύκλου, ώστε ο λόγος να είναι προσδιορισμένος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

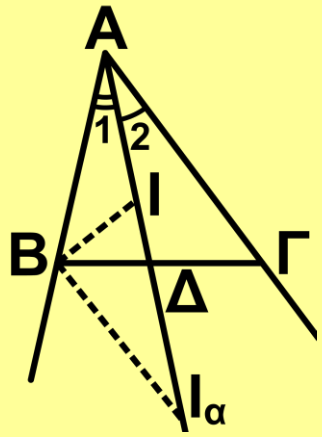
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. **Να εξηγήσετε γιατί τα ίχνη Δ, Ε της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τριγώνου ΑΒΓ, είναι συζυγή αρμονικά των Β και Γ.**

2. **Αν ΑΔ είναι η διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ και $\Delta B = \frac{\gamma}{2}$, να δικαιολογήσετε γιατί β + γ = 2α.**

3. **Τι ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος ως προς δυο σημεία Α και Β;**
Πόσοι τέτοιοι Απολλώνιοι κύκλοι υπάρχουν;
Με ποιους τρόπους μπορεί να ορισθεί κάποιος από αυτούς;

4. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΔ η διχοτόμος, Ι το έγκεντρο και $I_α$ το παράκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.
Τα σημεία (Α,Δ) και (I,$I_α$) αποτελούν αρμονική τετράδα;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



5. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που οι αποστάσεις τους από δύο ορισμένα σημεία Α και Β έχουν λόγο λ=1 είναι:
i) Κύκλος διαμέτρου ΑΒ
ii) Η μεσοκάθετος του ΑΒ
iii) Το μέσο Μ του ΑΒ
iv) Κανένα από τα παραπάνω.
(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΕ}{ΕΜ}=2\frac{ΑΔ}{ΔΓ}$.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6, ΒΓ=10, ΑΓ=9. Αν ΑΔ, ΑΕ η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$, να υπολογισθεί το ΔΕ.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} > 90°$ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Μ}Β$ τέμνει την ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ε, να αποδείξετε ότι $ΕΑ \cdot ΔΒ = ΕΓ \cdot ΑΔ$

4. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ και οι διχοτόμοι των γωνιών $Α\hat{Μ}Β$ και $Α\hat{Μ}Γ$ τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.

5. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι: $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}\cdot\frac{ΕΒ}{ΕΓ}\cdot\frac{ΖΒ}{ΖΓ}=1$.

Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για τις εξωτερικές διχοτόμους.

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Αν Δ τυχαίο σημείο του τόξου ΒΓ και η ΑΔ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι $ΕΒ \cdot ΔΓ = ΕΓ \cdot ΔΒ$

7. Σε ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ φέρουμε τις εφαπτόμενες στα άκρα της διαμέτρου, καθώς και μία εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο του Ε, που τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ζ και τις άλλες δύο εφαπτόμενες στα Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ,Δ είναι συζυγή αρμονικά των Ε,Ζ.

8. Δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι 20m και 36m. Η διχοτόμος της γωνίας, η οποία περιέχεται μεταξύ των δύο αυτών πλευρών, διαιρεί την τρίτη πλευρά σε δύο μέρη, τα οποία διαφέρουν κατά 12m. Να υπολογισθεί η τρίτη πλευρά.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $x\hat{O}y = y\hat{O}z = z\hat{O}t = 45°$ και τα σημεία Α, Δ των Ox, Ot αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ = ΟΔ. Αν Β, Γ είναι τα σημεία τομής της ΑΔ με τις Oy, Oz αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΑΔ$.

2. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε την παράλληλη στη διχοτόμο του ΑΔ, που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και το έγκεντρό του Ι.

i) Να υπολογισθεί ο λόγος $\frac{ΑΙ}{ΙΔ}$, ως συνάρτηση των πλευρών α, β, γ του τριγώνου.

ii) Αν β + γ = 2α και Κ το βαρύκεντρο του τριγώνου, τότε:

α) ΙΚ//ΒΓ β) $ZE = \frac{\beta+\gamma}{3}$, όπου Ζ, Ε τα σημεία τομής των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία ΙΚ.

4. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ ενός τριγώνου ΑΒΓ, τέμνουν τη διάμεσό του ΑΜ στα Δ και Ε αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\frac{A\Delta}{\Delta M} + \frac{AE}{EM} > 2$.

5. Οι μη παράλληλες πλευρές τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) τέμνονται στο Ο. Αν η διχοτόμος της γωνίας τέμνει τις ΑΒ, ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) $Z\Delta \cdot B\Gamma = Z\Gamma \cdot A\Delta$,

ii) $EA \cdot B\Gamma = EB \cdot A\Delta$.

Σύνθετα θέματα

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Αν η κάθετη διάμετρος ΚΛ στη ΒΓ τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ είναι συζυγή αρμονικά των Κ, Λ.

2. Αν οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται πάνω στη διαγώνιο που ενώνει τις δύο άλλες κορυφές του, τότε είναι $AB \cdot \Gamma\Delta = A\Delta \cdot B\Gamma$. Να εξετασθεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

3. Δίνεται τόξο $\overset{\frown}{AB}$ κύκλου (O,R). Να ορίσετε σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, τέτοιο ώστε $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν δοσμένα τμήματα.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ των πλευρών του ΑΔ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε ΔΕ = ΒΖ. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΒΕ και ΔΖ, να αποδείξετε ότι η ΓΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Gamma}\Delta$.

5. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ=α, ύψος ΑΗ=υ και $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$, όπου μ,ν δοσμένα τμήματα.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Φέρουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα τους ΔΕ και την ΑΒ κάθετη στη ΔΕ . Να αποδείξετε ότι

$$AB = \frac{2R\rho}{R+\rho}.$$

2. Μια μεταβλητή ευθεία ε, διέρχεται από το βαρύκεντρο Θ ενός τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta B}{\Delta A} + \frac{E\Gamma}{EA} = 1.$

3. i) **Θεώρημα Μενελάου**. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που τέμνει τις ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ στα Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{EB}{E\Gamma} \cdot \frac{Z\Gamma}{ZA} = 1.$$

ii) **Θεώρημα Ceva**. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των ευθειών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, αντίστοιχα. Αν
οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ συντρέχουν, τότε ισχύει:

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} \cdot \frac{E\Gamma}{EA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1.$$

Να εξετασθεί και για τα δύο θεωρήματα, αν ισχύει το αντίστροφο.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει τη ΒΔ στο Ε και τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι

$$\frac{EA}{EZ} - \frac{A\Gamma}{AB} = 1.$$

5. Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΓΔ κάθετη στην ΑΒ. Αν Μ είναι σημείο της χορδής και οι ευθείες ΜΑ και ΜΒ τέμνουν τον κύκλο στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $EZ \cdot Z\Delta = E\Delta \cdot Z\Gamma$.

6. Αν τα σημεία (Α,Β) και (Γ,Δ) αποτελούν αρμονική τετράδα και το Β είναι μεταξύ των Γ, Δ, να αποδείξετε ότι:
i) $OA^2 = O\Gamma \cdot O\Delta$, όπου Ο το μέσο του ΑΒ.

ii) $\frac{2}{AB}=\frac{1}{A\Gamma}+\frac{1}{A\Delta}$.

7. Να κατασκευαστεί εσωτερική ημιευθεία Αx της γωνίας $\hat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ τέτοια, ώστε αν Δ, Ε είναι οι προβολές των Β, Γ στην Αx αντίστοιχα, να είναι, $\frac{A\Delta}{AE}=\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν είναι γνωστά τμήματα.

8. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σταθερό σημείο Α στο εσωτερικό της γωνίας. Να κατασκευασθεί ευθεία, που να διέρχεται από το Α και να τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία Β και Γ, ώστε:
i) το Α να είναι μέσο του ΒΓ,
ii) να είναι $AB=\frac{2}{3}B\Gamma$ και
iii) να είναι $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν είναι γνωστά τμήματα.

9. Δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) τέμνονται στα σημεία Α και Α΄. Να κατασκευασθεί ευθεία, που να διέρχεται από το Α και να τέμνει τους κύκλους στα σημεία Β και Γ, ώστε να είναι: i) ΑΒ = ΑΓ, ii) $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{3}{4}$.

10. Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι οι διχοτόμοι ενός τριγώνου ΑΒΓ και Ι είναι το έγκεντρο του τριγώνου, να αποδείξετε ότι $\frac{IA}{I\Delta}+\frac{IB}{IE}+\frac{I\Gamma}{IZ}\geq 6$.

Δραστηριότητες

1. Να αποδείξετε το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή.

2. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και τυχαίο σημείο Α του επιπέδου, διαφορετικό των Β και Γ. Να κατασκευάσετε τον Απολλώνιο κύκλο ως προς τα Β και Γ, ο οποίος διέρχεται από το Α.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Να εξε-

τάσετε αν τα Β και Γ ανήκουν στον ίδιο Απολλώνιο κύκλο ως προς τα Δ και Α. Να κατασκευάσετε τον παραπάνω κύκλο

και να βρείτε το λόγο $\frac{MΔ}{MA}$ ως συνάρτηση των πλευρών α, β, γ του τριγώνου, όπου Μ τυχαίο σημείο του κύκλου.

Εργασία

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο Γ της ευθείας ΑΒ. Να βρεθεί το αρμονικό συζυγές του Γ ως προς τα Α και Β (δύο περιπτώσεις).

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μέτρηση

Στα πρώτα στάδια ανάπτυξης της κοινωνίας η μέτρηση γινόταν «με το μάτι», αφού το μέτρο δεν είχε διακριθεί ως ανεξάρτητη ιδιότητα ενός αντικειμένου. Στην πορεία ανάπτυξης της κοινωνίας, όταν τέτοιου είδους «ποιοτικά» μέτρα κρίθηκαν ανεπαρκή, εμφανίσθηκαν κάποια φυσικά μέτρα, που ήταν συνήθως μέρη του ανθρώπινου σώματος, όπως το μήκος του ποδιού, το πλάτος της παλάμης κ.ά. Για την ύπαρξη τέτοιων μέτρων μαρτυρούν και οι ονομασίες των μέτρων μήκους που διατηρήθηκαν μέχρι σήμερα, όπως «πόδι», «δάκτυλος», «παλάμη» κ.α. Τα μέτρα αυτά χρησιμοποιούνταν αρχικά για τον προσδιορισμό της ισότητας των μετρούμενων μεγεθών ή της ισοδυναμίας των σχημάτων. Το μέτρο ενός μεγέθους Α ήταν το πλησιέστερο ακέραιο πολλαπλάσιο της μονάδας Ε.

Η ανάγκη για πιο ακριβείς μετρήσεις οδήγησε στη χρήση υποδιαιρέσεων της μονάδας μέτρου. Έτσι εμφανίστηκαν τα πρώτα «συγκεκριμένα κλάσματα», ως μέρη των συγκεκριμένων μέτρων από όπου προήλθαν. Η ιστορική διαδικασία γένεσης των συγκεκριμένων κλασμάτων ως αποτέλεσμα της ανάγκης μέτρησης επιβεβαιώνεται από την ανομοιομορφία του συμβολισμού των κλασμάτων αυτού του τύπου. Στη Βαβυλώνα τα σύμβολα για το 1/2, το 1/3 και το 2/3 είναι ταυτόχρονα και σύμβολα δοχείων, δηλαδή συγκεκριμένων μέτρων όγκου. Στην αρχαία Αίγυπτο διακρίνονται τα φυσικά κλάσματα (1/2, 1/3, 1/4 και 2/3), που διαμορφώθηκαν από άμεσες πρακτικές ανάγκες και έχουν ιδιάζουσα ονοματολογία και ιερογλυφικό συμβολισμό, και τα αλγοριθμικά κλάσματα, που ήταν της μορφής 1/ν, και εμφανίσθηκαν ως προϊόν μαθηματικής επεξεργασίας.

Η ανεξαρτητοποίηση του κλάσματος από το συνυφασμένο πεδίο μεγεθών ήταν πολύ πιο αργή από τη διαμόρφωση της έννοιας του φυσικού αριθμού. Δεν έγινε γρήγορα αντιληπτό ότι οι αριθμητικές ιδιότητες των κλασμάτων δεν εξαρτώνται από τις ιδιότητες του πεδίου μεγεθών, στο οποίο ανήκουν.

Η πρώτη Ελληνική θεωρία μέτρησης. Μία από τις σημαντικές διαφορές της Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης από την Αιγυπτιακή και τη Βαβυλωνιακή είναι ότι τα προβλήματα της μέτρησης συνεχών μεγεθών τίθενται σε νέα θεωρητική βάση. Οι μαθηματικοί αρχίζουν να αναζητούν μεθόδους μέτρησης με βάση κάποια αφηρημένη μονάδα μέτρου μήκους, επιφανείας ή όγκου. Και εδώ δεν εννοούμε εμπειρικές μεθόδους (προσεγγιστικού) προσδιορισμού του μέτρου που να ικανοποιούν πρακτικές ανάγκες. Απαιτείται η απόδειξη της ύπαρξης ενός τέτοιου μέτρου. Η νέα αυτή προσέγγιση απαιτούσε την εισαγωγή νέων θεωρητικών εννοιών και νέων τρόπων συλλογισμού. Κάθε συγκεκριμένο είδος μεγεθών είναι συνυφασμένο με ορισμένο τρόπο σύγκρισης των φυσικών αντικειμένων ή σωμάτων. Τα ευθύγραμμα τμήματα, π.χ. μπορούν να συγκριθούν με τη βοήθεια της έννοιας της «εφαρμογής» του ενός επί του άλλου, η οποία οδηγεί στην έννοια του μήκους: δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν το ίδιο μήκος αν με τη μεταφορά του ενός επί του άλλου «εφαρμόζουν», ενώ το ένα υπολείπεται του άλλου τότε το πρώτο είναι μικρότερο του δεύτερου. Τα βάρη είναι μεγέθη άλλου είδους. Δεν έχει νόημα το ερώτημα αν το βάρος του σώματος είναι μεγαλύτερο, ίσο, ή μικρότερο από το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος. Έτσι, τα μήκη, τα εμβαδά, οι όγκοι, είναι διαφορετικά είδη μεγεθών. Το πρόβλημα της μέτρησης ενός μεγέθους Α με τη βοήθεια της μονάδας Ε συνίσταται αρχικά, στην αρχαία Ελλάδα στο να βρεθεί πόσες φορές περιέχεται η μονάδα στο Α, δηλαδή ζητείται ο αριθμός α τέτοιος, ώστε Α= αΕ, όπου Α και Ε είναι μεγέθη του αυτού είδους. Ένα μέγεθος Χ είναι κοινό μέτρο δύο μεγεθών Α και Β, όταν περιέχεται ακέραιο αριθμό φορών στα μεγέθη αυτά, δηλ. Α= αΧ, Β = βΧ. Τότε τα μεγέθη λέγονται **σύμμετρα**.

Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες είχαν βρει μια αποτελεσματική διαδικασία με την οποία μπορούσαν να βρουν το κοινό μέτρο δύο μεγεθών Α και Β, αν υπάρχει. Πρόκειται για τη διαδικασία της **ανθυφαίρεσης** ή **ανταναίρεσης** (γνωστής σήμερα ως **αλγόριθμος του Ευκλείδη**), η οποία εκτίθεται στις δύο πρώτες προτάσεις του Βιβλίου VII των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Αν υποθέσουμε ότι Α>Β, τότε αφαιρούμε το Β από το Α όσες φορές γίνεται. Αν δεν περισσεύει υπόλοιπο, τότε το Β μετρά ακριβώς το Ακαι είναι το κοινό μέτρο. Ειδεμή έχουμε υπόλοιπο Β1, με $Β>Β_1$.

Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία στα Β, $Β_1$. Αν δεν προκύπτει υπόλοιπο, το $Β_1$ είναι το κοινό μέτρο, ειδεμή έχουμε ένα νέο υπόλοιπο $Β_2$. Αν η επανάληψη αυτής της διαδικασίας τερματιστεί σε κάποιο $Β_ν$ που μετρά ακριβώς το Αν τότε το $Β_ν$ είναι το ζητούμενο κοινό μέτρο. Αν ο αλγόριθμος δεν τερματίζεται τα δύο μεγέθη είναι ασύμμετρα. Πιθανότατα στο Θεαίτητο να ανήκει η ιδέα να εφαρμοστεί η ανθυφαίρεση ως κριτήριο ασυμμετρίας δύο τμημάτων. Το κριτήριο αυτό αποδεικνύεται στην Πρόταση 2 του Βιβλίου Χ των «Στοιχείων».

Η ανακάλυψη ότι δεν υπάρχει κοινό μέτρο της διαγωνίου και της πλευράς του τετραγώνου αποδίδεται στον Πυθαγόρα. Το πώς ακριβώς έγινε αυτή η ανακάλυψη παραμένει θέμα ανοικτό για το οποίο έχουν προταθεί ποικίλες ερμηνείες. Όμως η ανακάλυψη αυτή, καθώς και οι δυσκολία λύσης του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου (βλ. Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας) έδωσαν νέα ώθηση στα μαθηματικά των μετρούμενων μεγεθών.

Η γενική θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου. Η ύπαρξη ασύμμετρων μεγεθών οδήγησε στη διατύπωση μιας νέας θεωρίας από τον Εύδοξο τον Κνίδιο που εκτίθεται στο Βιβλίο V των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Η νέα θεωρία των αναλογιών στηρίζεται στη γενική έννοια του μεγέθους, περιλαμβάνοντας έτσι και τους αριθμούς και τα άλλα συνεχή μεγέθη (μήκη, επιφάνειες, όγκοι). Η έννοια αυτή εισάγεται αξιωματικά με τη βοήθεια των Κοινών Εννοιών στο Βιβλίο I που ορίζουν τις σχέσεις ισότητας και ανισότητας.

Ο Εύδοξος ορίζει πότε δύο ζεύγη Αρχιμήδειων μεγεθών α,β και γ,δ έχουν τον ίδιο λόγο με τη βοήθεια των πολλαπλασίων αυτών των μεγεθών, δηλαδή όταν: 1) $\mu\alpha > \nu\beta$ και $\mu\gamma > \nu\delta$ ή 2) $\mu\alpha = \nu\beta$ και $\mu\gamma = \nu\delta$, ή 3) $\mu\alpha < \nu\beta$ και $\mu\gamma < \nu\delta$. Στην περίπτωση αυτή τα μεγέθη α, β, γ, δ λέγονται ανάλογα. Η σχέση της αναλογίας είναι σχέση τύπου ισότητας, δηλαδή συμμετρική και μεταβατική, και έτσι τα ζεύγη μεγεθών διαμερίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας ζευγών που έχουν τον ίδιο λόγο. Έτσι, ο λόγος μπορεί να εισαχθεί ως το κοινό χαρακτηριστικό που έχουν τα ζεύγη μεγεθών μιας κλάσης.

Η γενική θεωρία των αναλογιών αποτελεί τη βάση της μεθόδου της εξάντλησης, η οποία εφαρμόστηκε από τους αρχαίους Έλληνες στη μέτρηση (μη στοιχειωδών) επιφανειών και όγκων. Στηρίζεται στην ιδέα ότι αν από κάποιο μέγεθος αφαιρέσουμε περισσότερο από το μισό, από το υπόλοιπο επίσης κ.ο.κ., τότε μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων παίρνουμε υπόλοιπο μικρότερο από οποιοδήποτε δεδομένο μέγεθος («Στοιχεία», Βιβλίο X, Πρόταση 1). Με άλλα λόγια, η διαφορά ανάμεσα σε μιά μεταβλητή ποσότητα που τείνει σε ένα όριο, και στο όριο αυτό, μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε με υποδιπλασιασμό της.

Με τη βοήθεια της μεθόδου της εξάντλησης ο

Εύδοξος απέδειξε τα παρακάτω θεωρήματα:
1.Τα εμβαδά δύο κύκλων έχουν λόγο ίσο προς το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους.
2. Ο όγκος πυραμίδας ισούται με το 1/3 του όγκου του πρίσματος με την ίδια βάση και ύψος.
3. Ο όγκος του κώνου ισούται με το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου με την ίδια βάση και ύψος.
Με την ίδια μέθοδο ο Αρχιμήδης βρήκε ένα πλήθος νέων εμβαδών και όγκων, όπως το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου και κώνου, το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας, τον όγκο της σφαίρας κ.ά.
Αρχιμήδεια και μη Αρχιμήδεια μεγέθη. Για να ισχύει η θεωρία των αναλογιών πρέπει να ορίζεται ο λόγος ανάμεσα στα συγκρινόμενα μεγέθη α,β. Αυτό εξασφαλίζεται αν υπάρχουν ακέραιοι μ και ν τέτοιοι, ώστε μα>β και νβ>α («Στοιχεία», Βιβλίο V, Ορισμός 4). Η συνθήκη αυτή ονομάζεται σήμερα **αξίωμα του Ευδόξου** (ή, συχνότερα, **αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου**). Τα μεγέθη για τα οποία ικανοποιείται το αξίωμα αυτό λέγονται σήμερα Αρχιμήδεια.
Ας σημειωθεί πως μη Αρχιμήδεια μεγέθη ήταν γνωστά στην Ελληνική αρχαιότητα, όπως οι λεγόμενες **κερατοειδείς γωνίες**. Πρόκειται για τη γωνία που σχηματίζεται π.χ. από το τόξο περιφέρειας και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της, δηλαδή το μέρος του επιπέδου που περιέχεται μεταξύ του τόξου και της εφαπτομένης στο σημείο επαφής. Οσοδήποτε και αν μεγαλώσει μια τέτοια γωνία δεν μπορεί ποτέ να υπερβεί τη γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη και οποιαδήποτε τέμνουσα του τόξου στο σημείο τομής. Ένα τέτοιο μέγεθος α, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο επί οποιονδήποτε πεπερασμένο αριθμό ν παραμένει μικρότερο του μεγέθους β, ονομάζεται **ενεργεία απειροστό** ως προς το β, ή αντίθετα, το β λέγεται **ενεργεία άπειρο** μέγεθος ως

προς το α.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

● Μέγεθος λέγεται οτιδήποτε επιδέχεται αύξηση ή ελάττωση. Στη Γεωμετρία έχουμε τα **γεωμετρικά μεγέθη.**

● Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ λέγεται **υποδιαίρεση** του ΑΒ, αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν, ώστε $ΓΔ = \frac{ΑΒ}{ν}$.

● Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ λέγεται **γινόμενο** του ΑΒ επί το **θετικό ρητό** αριθμό $q = \frac{μ}{ν}$(μ>0,ν>0), αν είναι άθροισμα μ ευθύγραμμων τμημάτων ίσων με $\frac{ΑΒ}{ν}$.

● Αν για δυο μη μηδενικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ υπάρχει ρητός $q = \frac{μ}{ν}$ τέτοιος, ώστε $ΓΔ = qΑΒ$, τα δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται **σύμμετρα** και ο αριθμός $q = \frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ λέγεται **λόγος** των δύο τμημάτων.

● Μια κοινή υποδιαίρεση $ΚΛ = \frac{ΑΒ}{ν} = \frac{ΓΔ}{μ}$ λέγεται και **κοινό μέτρο** των ΑΒ και ΓΔ. Δύο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ακέραια πολλαπλάσια κάθε κοινού τους μέτρου.

● Δύο ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι σύμμετρα λέγονται **ασύμμετρα** και ο λόγος τους είναι ένας **άρρητος** αριθμός.

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ, λέγονται **ανάλογα** προς τα τμήματα β, δ όταν είναι $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$

● **Αναλογία** τμημάτων λέγεται κάθε ισότητα της μορφής $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, όπου α, β, γ, δ είναι ευθύγραμμα τμήματα.

● **Μέτρο** ενός ευθύγραμμου τμήματος α είναι ο λόγος του α προς ένα άλλο τμήμα που παίρνουμε αυθαίρετα ως **μονάδα μέτρησης**. Έτσι:

- Δύο ίσα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντίστροφα.
- Ο λόγος των μέτρων δύο τμημάτων, που μετρώνται με την ίδια μονάδα μέτρησης, ισούται με το λόγο των δύο τμημάτων.

● Αν για τα διαφορετικά συνευθειακά σημεία Α, Β, Μ ισχύει $\frac{MA}{MB} = \lambda$, τότε λέμε ότι το **Μ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ** σε λόγο λ.

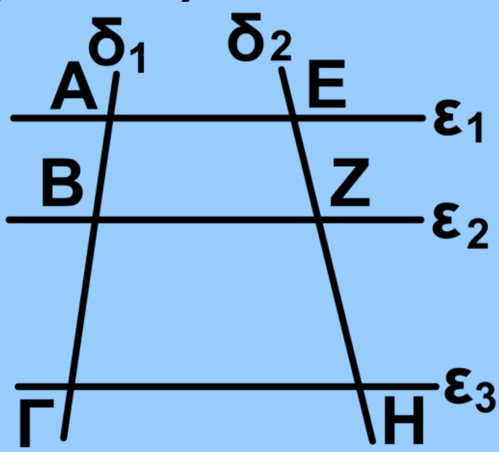
- Το Μ διαιρεί εσωτερικά ή εξωτερικά το τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, αν το Μ είναι αντίστοιχα μεταξύ των Α και Β ή στην προέκταση του ΑΒ.
- Το σημείο Μ που διαιρεί ή εσωτερικά ή εξωτερικά το τμήμα ΑΒ σε λόγο λ είναι **μοναδικό**.

● **Θεώρημα Θαλή**

- Τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες:

Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$,τότε

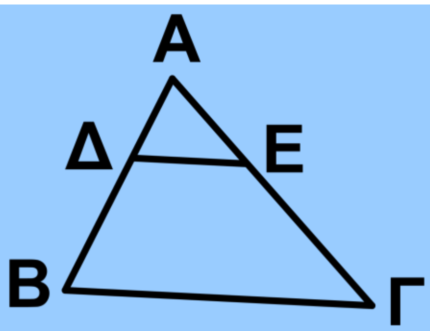
$$\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}.$$

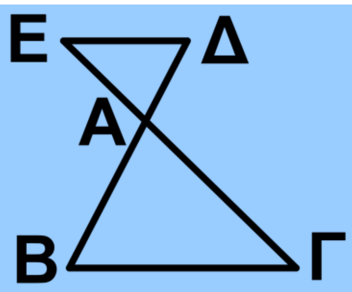


Αντίστροφο:

Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{EZ}{ZH}$, τότε $\Gamma H // \varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

- Στο τρίγωνο





Αν ΔΕ//ΒΓ, τότε $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΓ}$ και $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

Αντίστροφο: Αν $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΓ}$, τότε ΔΕ//ΒΓ.

● Γεωμετρικές κατασκευές

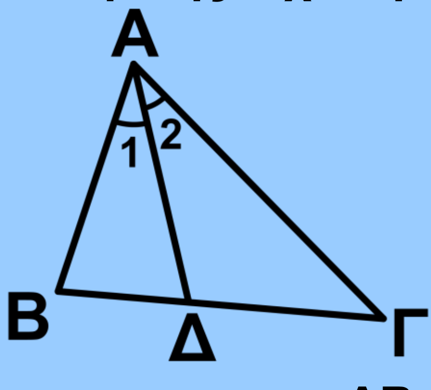
- Κατασκευή τετάρτης αναλόγου
- Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά σε δοσμένο λόγο

● Συζυγή αρμονικά

Δύο σημεία Γ και Δ που διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο, λέγονται συζυγή αρμονικά των Α και Β.

● Θεωρήματα διχοτόμων

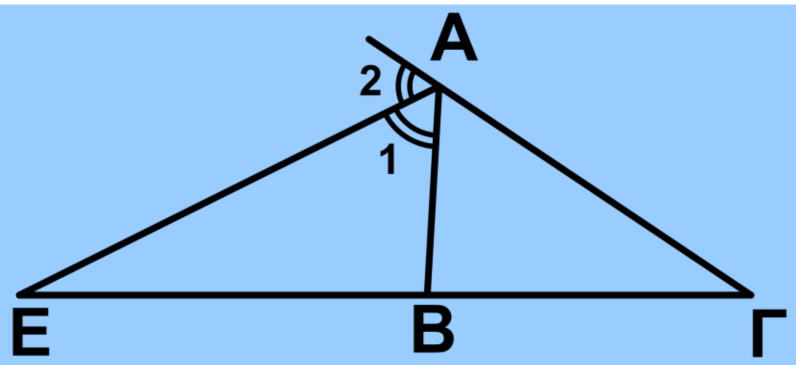
Εσωτερικής διχοτόμου.



ΑΔ διχοτόμος $\Leftrightarrow \frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

$ΔΒ = \frac{αγ}{β+γ}$, $ΔΓ = \frac{αβ}{β+γ}$

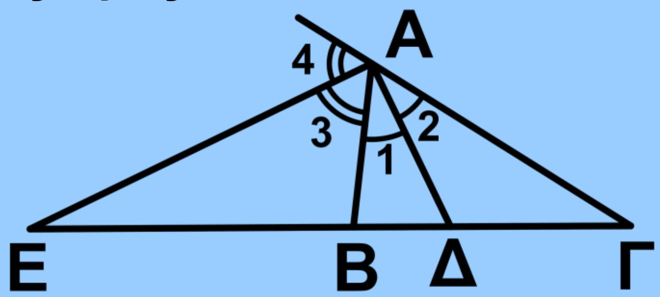
Εξωτερικής διχοτόμου



ΑΕ εξωτ. διχοτόμος $\Leftrightarrow \frac{ΕΒ}{ΕΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

$ΕΒ = \frac{αγ}{β-γ}$, $ΕΓ = \frac{αβ}{β-γ}$

● Τα ίχνη Δ και Ε της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{Α}$, τριγώνου ΑΒΓ, είναι σημεία συζυγή αρμονικά ως προς τα Β και Γ.



● **Απολλώνιος κύκλος** ως προς τα σημεία Α και Β λέγεται κάθε κύκλος διαμέτρου ΓΔ, όπου τα Γ και Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

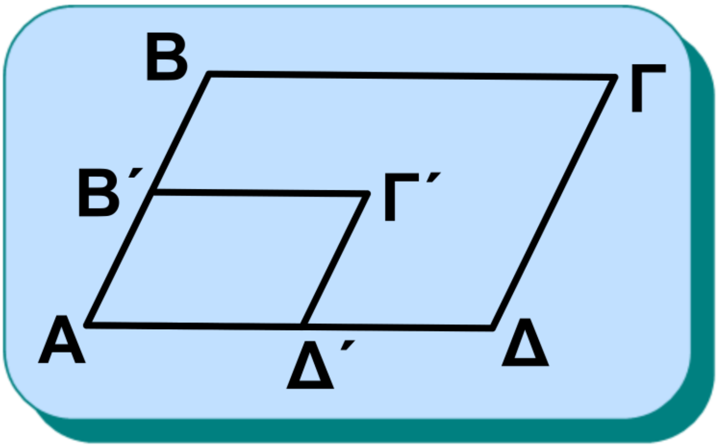
Ομοιότητα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται οι ιδιότητες των όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων και ειδικότερα των όμοιων τριγώνων για τα οποία διατυπώνονται κατάλληλα κριτήρια ομοιότητας. Η ομοιότητα επεκτείνεται στο σύνολο των στοιχείων των ευθύγραμμων σχημάτων ενώ δίνονται πρακτικές εφαρμογές σε πραγματικά προβλήματα και σημειώνεται ότι αποτελεί βασικό συνδετικό κρίκο Άλγεβρας και Γεωμετρίας. Τέλος, παρουσιάζεται η στενή σχέση της ομοιότητας με την τριγωνομετρία.

Ναός στο Khajuraho της Βορειοκεντρικής Ινδίας, 10ος - 11ος αιώνας.

8.1 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από τα μέσα Β΄ και Δ΄ των πλευρών ΑΒ και ΑΔ

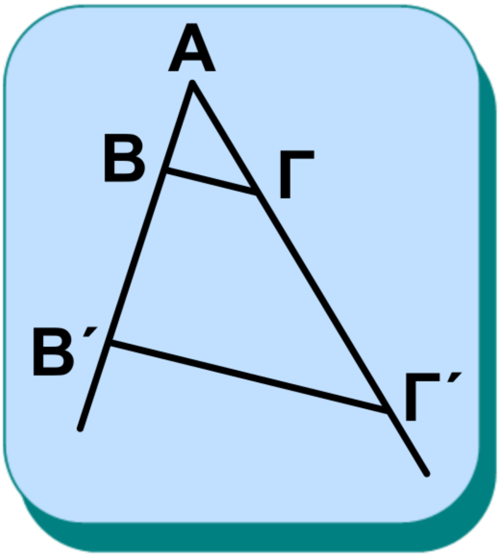


Σχήμα 1

αντίστοιχα, ας φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΔ και ΑΒ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ΄. Τότε το παραλληλόγραμμο ΑΒ΄Γ΄Δ΄ έχει τις γωνίες του ίσες με τις αντίστοιχες γωνίες του ΑΒΓΔ, ενώ ισχύει ότι

$$\frac{ΑΒ΄}{ΑΒ}=\frac{Β΄Γ΄}{ΒΓ}=\frac{Γ΄Δ΄}{ΓΔ}=\frac{ΑΔ΄}{ΑΔ}=\frac{1}{2}.$$

Ας θεωρήσουμε κατόπιν ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ας προεκτείνουμε τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ προς τα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Θεωρούμε σημείο Β΄ στην προέκταση της ΑΒ, έτσι, ώστε ΑΒ΄ = 3ΑΒ. Από το Β΄ φέρουμε παράλληλη προς την τρίτη πλευρά ΒΓ, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Γ΄. Τότε παρατηρούμε ότι τα



Σχήμα 2

τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ΄Γ΄ έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, ενώ επιπλέον ισχύει ότι

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{A\Gamma'}{A\Gamma}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=3.$$

Τα δύο παραλληλόγραμμα, όπως και τα δύο τρίγωνα που κατασκευάσθηκαν προηγουμένως λέγονται όμοια, ενώ ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους (δηλαδή των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες) λέγεται λόγος ομοιότητας.

Γενικότερα για τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Ο λόγος των ομόλογων πλευρών δύο ευθύγραμμων σχημάτων, λέγεται λόγος ομοιότητας αυτών και συμβολίζεται με λ. Η ομοιότητα μεταξύ δύο ευθύγραμμων σχημάτων συμβολίζεται με ≈ .

Θεώρημα

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

Απόδειξη

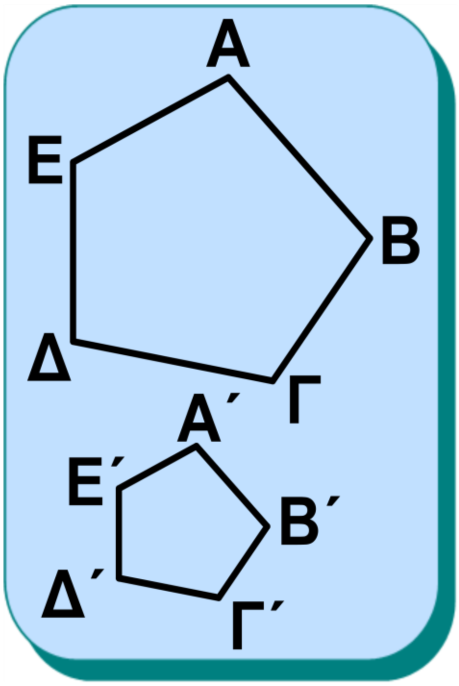
Ας θεωρήσουμε δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα ΑΒΓΔΕ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ (ανάλογα αποδεικνύεται για ευθύγραμμα σχήματα με περισσότερες κορυφές).

Λόγω της ομοιότητας θα έχουμε ότι

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\frac{\Delta'E'}{\Delta E}=\frac{E'A'}{EA}=\lambda$$

και από τις ιδιότητες των αναλογιών, το άθροισμα των αριθμητών προς το άθροισμα των παρανομαστών ισούται με λ, δηλαδή:

$$\frac{A'B'+B'\Gamma'+\Gamma'\Delta'+\Delta'E'+E'A'}{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta E+EA}=\lambda$$



Σχήμα 3

.

8.2 Κριτήρια ομοιότητας

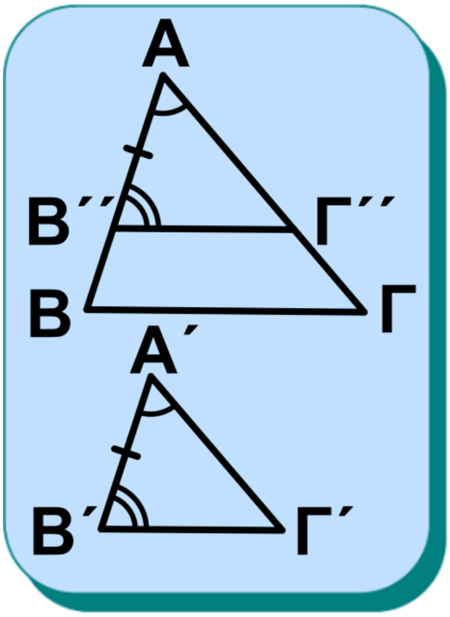
Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την ομοιότητα των τριγώνων, καθώς αποδεικνύεται (εφαρμογή 3) ότι δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα χωρίζονται σε ισάριθμα όμοια τρίγωνα.

Θεώρημα Ι (1ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με $\hat{Α} = \hat{Α}΄$, $\hat{Β} = \hat{Β}΄$, οπότε και $\hat{Γ} = \hat{Γ}΄$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι



Σχήμα 4

Α΄Β΄ < ΑΒ, επομένως υπάρχει σημείο Β΄΄ στην ΑΒ τέτοιο, ώστε ΑΒ΄΄= Α΄Β΄. Από το Β΄΄ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Γ΄΄. Τότε τα τρίγωνα ΑΒ΄΄Γ΄΄ και ΑΒΓ είναι όμοια, αφού ισχύει ότι Β΄΄Γ΄΄ // ΒΓ, οπότε $\frac{ΑΒ΄΄}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ΄΄}{ΑΓ} = \frac{Β΄΄Γ΄΄}{ΒΓ}$ και η $\hat{Α}$ είναι κοινή, ενώ $\hat{Β}΄΄= \hat{Β}$ οπότε και $\hat{Γ}΄΄= \hat{Γ}$.

Όμως τα τρίγωνα ΑΒ΄΄Γ΄΄ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα, καθώς έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες.

Συνεπώς τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

(i) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση.

(ii) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.

(iii) Δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.

Θεώρημα ΙΙ (2ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γω-

νίες ίσες, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ (σχ.4) έτσι, ώστε $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $A'B' < AB$, επομένως θα υπάρχει σημείο Β΄΄ στην ΑΒ, με Α Β΄΄ = Α΄Β΄. Από το Β΄΄ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Γ΄΄. Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒ΄΄Γ΄΄ και ΑΒΓ είναι όμοια.

Επειδή $AB\Gamma \approx AB''\Gamma''$ είναι

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} \text{ ή } \frac{A'B'}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma}.$$

Όμως, από την υπόθεση ισχύει ότι $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$. Επομένως καταλήγουμε ότι $\frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$ ή ΑΓ΄΄= Α΄Γ΄.

Τελικά τα τρίγωνα ΑΒ΄΄Γ΄΄ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα, καθώς έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

Θεώρημα ΙΙΙ (3ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 4), ώστε

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $A'B' < AB$, επομένως θα υπάρχει σημείο Β΄΄ στην ΑΒ, με ΑΒ΄΄= Α΄Β΄. Από το Β΄΄ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Γ΄΄, οπότε τα τρίγωνα ΑΒ΄΄Γ΄΄ και ΑΒΓ είναι όμοια.

Επειδή $AB\Gamma \approx AB''\Gamma''$ είναι

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma} \text{ ή } \frac{A'B'}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma}.$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\frac{Α΄Β΄}{ΑΒ}=\frac{Α΄Γ΄}{ΑΓ}=\frac{Β΄Γ΄}{ΒΓ}.$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\frac{ΑΓ΄΄}{ΑΓ}=\frac{Α΄Γ΄}{ΑΓ} \text{ και } \frac{Β΄΄Γ΄΄}{ΒΓ}=\frac{Β΄Γ΄}{ΒΓ},$$

οπότε ΑΓ΄΄= Α΄Γ΄ και Β΄΄Γ΄΄= Β΄Γ΄.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒ΄΄Γ΄΄ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες.

ΣΧΟΛΙΟ

Το θεώρημα που εκφράζει ότι δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελούν τους βασικούς συνδετικούς κρίκους της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα. Η σύνδεση της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα είναι ιδιαίτερα εποικοδομητική, καθώς μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε την εποπτεία της Γεωμετρίας σε αλγεβρικά προβλήματα και την ευχέρεια των πράξεων της Άλγεβρας σε γεωμετρικά προβλήματα. Τα όμοια τρίγωνα και το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτέλεσαν τα θεμέλια της Τριγωνομετρίας. Χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα μπορούμε να υπολογίσουμε τις διαστάσεις ενός αντικειμένου μετρώντας τις διαστάσεις ενός μικρότερου μοντέλου του.

Το μοντέλο αυτό θα έχει τις ίδιες γωνίες με το αρχικό, επομένως οι διαστάσεις του αρχικού προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις αντίστοιχες διαστάσεις του μοντέλου με το λόγο ομοιότητας των δύο σχημάτων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

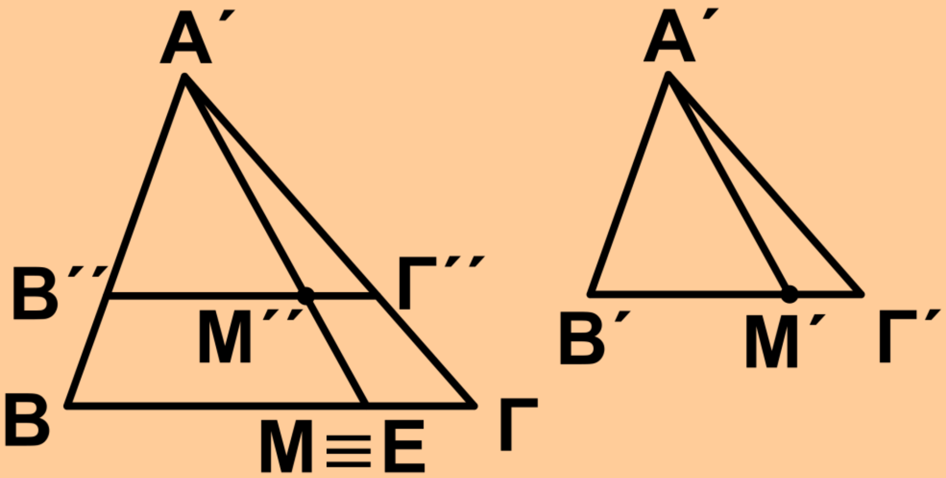
Ας θεωρήσουμε δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ με λόγο ομοιότητας λ και σημεία Μ της ΒΓ, Μ΄ της Β΄Γ΄ τέτοια, ώστε $\frac{ΒΜ}{ΜΓ}=\frac{Β'Μ'}{Μ'Γ'}$.

Τότε ισχύει ότι $\dfrac{AM}{A'M'}=\dfrac{BM}{B'M'}=\dfrac{\Gamma M}{\Gamma' M'}=\lambda$.

Απόδειξη

Έστω ότι $A'B' < AB$, οπότε θα υπάρχει σημείο B΄΄ της AB τέτοιο, ώστε AB΄΄ = A΄B΄ και σημείο Γ΄΄ της ΑΓ τέτοιο, ώστε ΑΓ΄΄= Α΄Γ΄, με Β΄΄Γ΄΄//ΒΓ. Έστω σημείο Μ΄΄ της Β΄΄Γ΄΄ τέτοιο, ώστε Β΄΄Μ΄΄= Β΄Μ΄.

Προεκτείνουμε την ΑΜ΄΄ ώστε να τμήσει τη ΒΓ σε σημείο Ε. Τότε τα τρίγωνα ΑΒ΄΄Μ΄΄ και ΑΒΕ είναι όμοια, οπότε $\dfrac{AB''}{AB}=\dfrac{B''M''}{BE}=\dfrac{AM''}{AE}$ **ή** $\lambda=\dfrac{B'M'}{BE}=\dfrac{A'M'}{AE}$.



Σχήμα 5

Όμοια έχουμε ότι $\lambda=\dfrac{M'\Gamma'}{E\Gamma}=\dfrac{A'M'}{AE}$.

Οπότε $\dfrac{B'M'}{M'\Gamma'}=\dfrac{BE}{E\Gamma}=\dfrac{BM}{M\Gamma}$, **συνεπώς τα Ε και Μ ταυτίζονται.**

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

(i) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων υψών τους.

(ii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διχοτόμων τους.

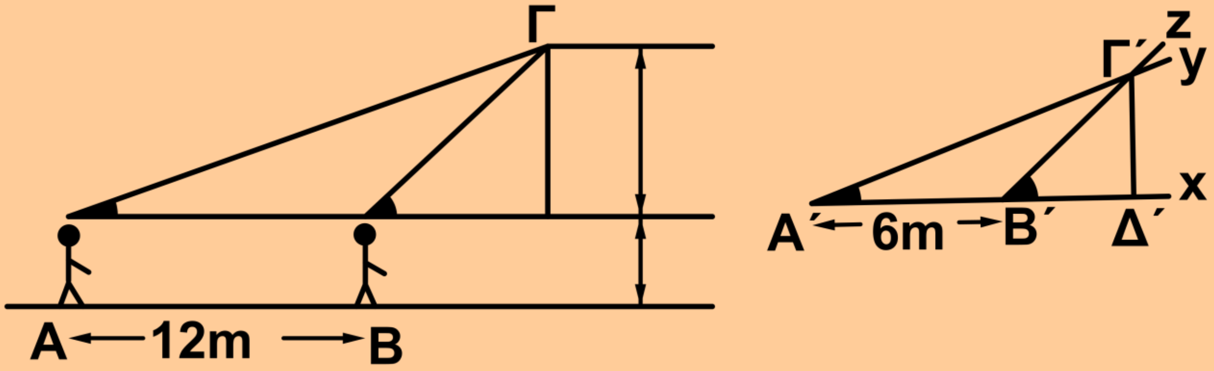
(iii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι

ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διαμέσων τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Πόσο ύψος έχει το σχολείο σας;

Λύση



Σχήμα 6

Ένας μαθητής βλέπει την κορυφή Γ του σχολείου από δύο σημεία Α και Β στο έδαφος (σχ. 6). χρησιμοποιώντας έναν εξάντα (βλ. επόμενη παράγραφο) μετράει τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ με τις οποίες φαίνεται το σχολείο, π.χ. $\hat{A}$ = 19° και $\hat{B}$ = 43°.

Κατόπιν μετράει την απόσταση από το σημείο Αως το Β, π.χ. ΑΒ=12 μέτρα . Η μέτρηση των γωνιών έγινε από κάποια απόσταση από το έδαφος ίση με το ύψος του μαθητή, ας υποθέσουμε ότι έχει ύψος 1,8 μέτρα. Για να υπολογίσουμε το ύψος του σχολείου κατασκευάζουμε σε μία κόλλα χαρτί το αντίστοιχο μοντέλο. Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα Α΄Β΄=6 cm. Προεκτείνουμε την Α΄Β΄ προς το μέρος του Β΄ και σχηματίζουμε στο ίδιο ημιεπίπεδο δύο γωνίες $x\hat{A}'y$ = 19° και xΒ΄z = 43°. Οι ημιευθείες Α΄y και Β΄z τέμνονται στο σημείο Γ΄. Από το σημείο Γ΄ φέρουμε την κάθετη Γ΄Δ΄ στην Α΄Β΄ και έχουμε κατασκευάσει το μοντέλο μας. Μετράμε ότι το Γ΄Δ΄ ισούται με 3,3 cm.

Ο λόγος ομοιότητας είναι

$$\lambda = \frac{AB}{A'B'} = 200.$$

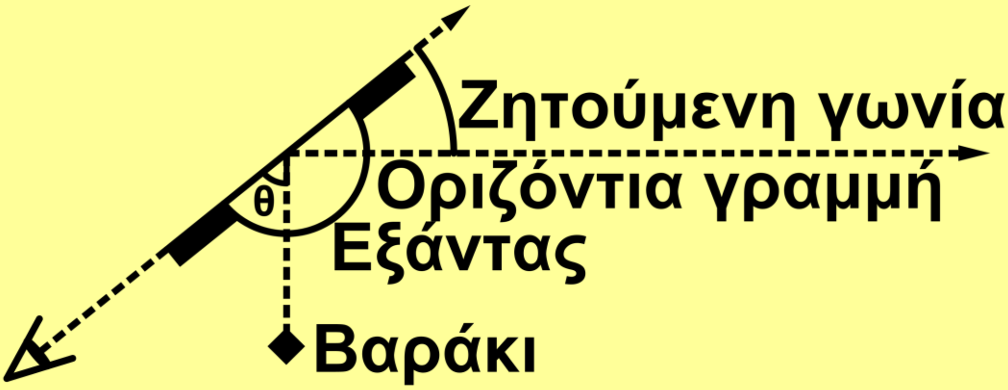
Επομένως το πραγματικό μήκος του ΓΔ είναι ΓΔ = λΓ΄Δ΄ = 6,6 μέτρα. Προσθέτοντας και το ύψος του μαθητή, έχουμε ότι το πραγματικό ύψος του σχολείου είναι 8,4 μέτρα.

ΣΧΟΛΙΟ

Με τη χρήση της ομοιότητας μπορούμε να μετρήσουμε μήκη ευθύγραμμων τμημάτων που είναι απρόσιτα.

Ο ΕΞΑΝΤΑΣ

Το διπλανό σχήμα εκφράζει τη λειτουργία του εξάντα, δηλαδή μας

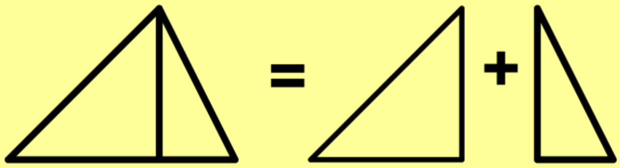


Σχήμα 7

παρουσιάζει έναν απλό μηχανισμό για να μετράμε τις γωνίες υπό τις οποίες φαίνεται ένα σχήμα. Για να κατασκευασθεί χρειάζεται ένα ίσιο ξύλο, ένα μοιρογνωμόνιο, μία χορδή (κιθάρας) ή πετονιά, ένα βαράκι (νήμα της στάθμης) και δύο ανθρώπους, έναν για να βλέπει το αντικείμενο και έναν για να διαβάζει τη μέτρηση.

ΣΧΟΛΙΟ

Παλιά οι μαθηματικοί συνειδητοποίησαν ότι για



Σχήμα 8

τέτοιου είδους προβλήματα ήταν να

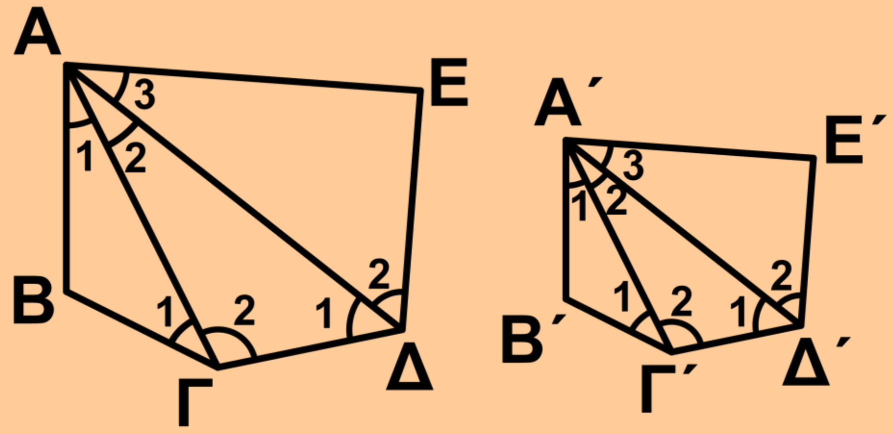
επιλύουν αρκετό να έχουν έναν πίνακα με τρίγωνα και

τις διαστάσεις τους, οπότε θα αρκούσε να μελετούν τον πίνακα παρά να κατασκευάζουν μοντέλα των τριγώνων που προέκυπταν από φυσικά προβλήματα.
Παρατήρησαν ότι αρκεί ο πίνακας αυτός να έχει μόνο ορθογώνια τρίγωνα αφού κάθε τρίγωνο διαμερίζεται σε δύο ορθογώνια (σχ. 8). Ένας τέτοιος πίνακας είναι οι τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων : τα ημίτονα και συνημίτονα των γωνιών ενός ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα 1. Πρακτικά τα αποτελέσματα από την τριγωνομετρία είναι ακριβέστερα από αυτά που προκύπτουν από μέτρηση και κατασκευή μοντέλου, όπως προηγουμένως. Ωστόσο οι τριγωνομετρικοί πίνακες δεν είναι τίποτε
άλλο, παρά πίνακες όμοιων τριγώνων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Να αποδείξετε ότι δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα χωρίζονται σε ισάριθμα όμοια τρίγωνα.

Απόδειξη



Σχήμα 9

Θα αποδείξουμε την εφαρμογή για δύο πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄, καθώς η απόδειξη είναι ανάλογη για κάθε πολύγωνο.
Ας υποθέσουμε ότι τα δύο πεντάγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ. Από τις κορυφές Α, Α΄ των πενταγώνων φέρουμε τις διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ και Α΄Γ΄, Α΄Δ΄ αντίστοιχα, οπότε καθένα πεντάγωνο χωρίσθηκε σε

τρία τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ και Α΄Β΄Γ΄, Α΄Γ΄Δ΄, Α΄Δ΄Ε΄ αντίστοιχα.

Τότε έχουμε ότι ΑΒΓ ≈ Α΄Β΄Γ΄ και ΑΔΕ ≈ Α΄Δ΄Ε΄. Επομένως, θα είναι και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}'_1$ και $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{Α΄Γ΄}} = \lambda$. Τότε όμως θα έχουμε ότι $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}'_2$ (αφού $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$) και $\frac{\text{ΓΔ}}{\text{Γ΄Δ΄}} = \lambda$.

Επομένως και τα τρίγωνα ΑΓΔ και Α΄Γ΄Δ΄ θα είναι όμοια.

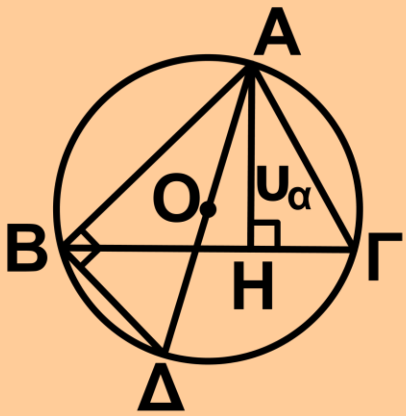
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του $υ_α$=ΑΗ. Να αποδείξετε ότι

βγ = 2R$υ_α$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη διάμετρο ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΑΒΔ είναι όμοια, αφού $\hat{B} = \hat{H} = 1^{\llcorner}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.



Σχήμα 10

Επομένως είναι $\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΔ}}$ ή $βγ = 2Rυ_α$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 1^{\llcorner}$, τότε είναι

$$βγ = αυ_α = 2Rυ_α .$$

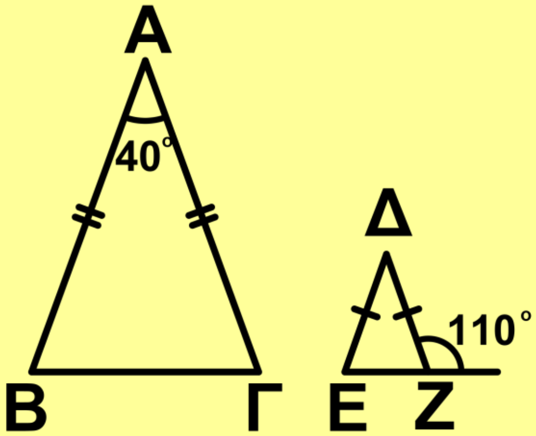
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

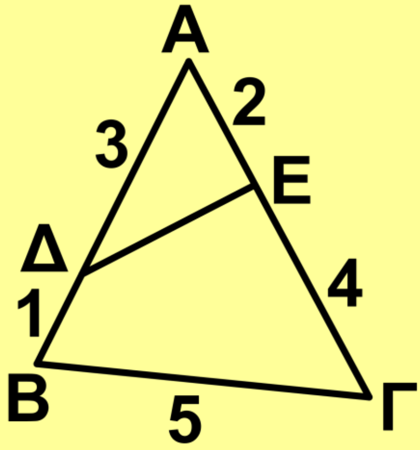
1. i) Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε είναι όμοια;
ii) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια με ένα τρίτο τρίγωνο, τότε είναι και μεταξύ τους όμοια;

2. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντα όμοια;

3. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = 3ΔΕ. Να βρεθεί ο λόγος $\frac{ΕΖ}{ΒΓ}$.

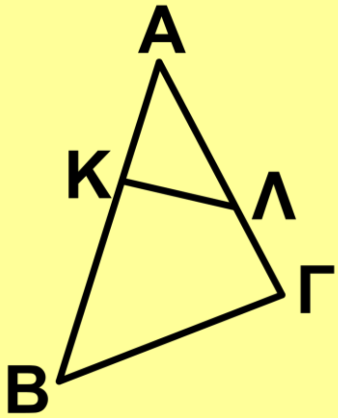


4. Στο παρακάτω σχήμα να βρεθεί το μήκος του ΔΕ.

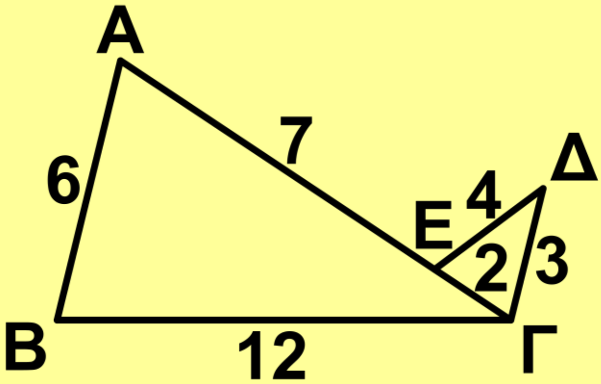


5. Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι 3cm, 4cm και 5cm. Ένα τρίγωνο όμοιο με αυτό έχει περίμετρο 24cm. Ποια είναι τα μήκη των πλευρών του;

6. Αν στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΒΚΛΓ είναι εγγράψιμο, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΚΛ είναι όμοια; Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές τους;



7. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1$ ∟). Από τυχαίο σημείο Δ της ΑΓ φέρουμε ΔΕ⊥ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια,

ii) ΑΓ·ΕΔ = ΑΒ·ΕΓ.

2. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΓΕ = \frac{2}{3}ΑΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια,

ii) ΒΓ = 3ΔΕ.

3. Μία μεταλλική πλάκα έχει σχήμα ορθογώνιου τριγώνου με πλευρές α,β,γ. Η πλάκα θερμαίνεται και από τη διαστολή αυξάνεται κάθε πλευρά της κατά το $\frac{1}{15}$ της. Θα παραμείνει ορθογώνιο τρίγωνο το σχήμα της πλά-

κας;

4. Ένα δέντρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά μήκους 24m. Στο ίδιο σημείο, την ίδια στιγμή, μια κατακόρυφη ράβδος μήκους 2m ρίχνει σκιά μήκους 3m. Να βρεθεί το ύψος του δέντρου.

5. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι :

i) $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$,

ii) $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$,

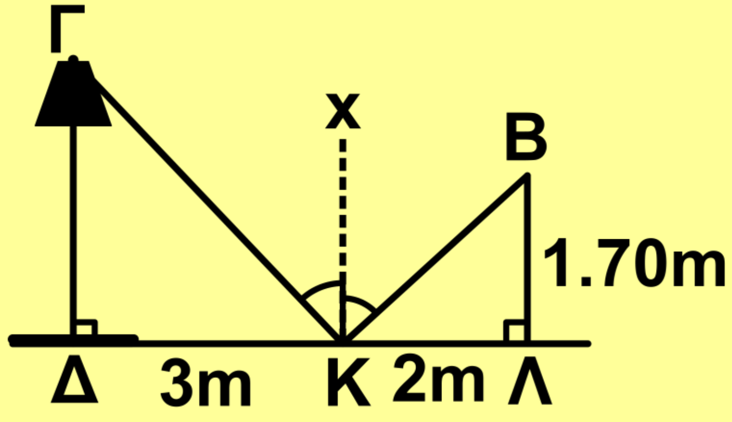
iii) $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ \cdot ΒΓ$.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και οι ευθείες Αx και Αy που σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις ΑΒ και ΑΓ και τέμνουν τη ΒΓ και τον κύκλο αντίστοιχα στα Δ και Ε. Να αποδείξετε ότι

$ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ \cdot ΑΓ$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Ο παρατηρητής ΑΒ βλέπει το φως του λαμπτήρα Γ μέσα από τον καθρέπτη Κ. Να υπολογίσετε το ύψος του φανοστάτη ΔΓ, όταν είναι ΔΚ=3m, ΑΚ=2m και το ύψος του παρατηρητή 1,70m. (Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης).



2. Να αποδείξετε ότι:

i) δύο παραλληλόγραμμα είναι όμοια, αν δύο διαδοχικές πλευρές του ενός είναι ανάλογες προς δύο διαδοχικές πλευρές του άλλου και οι γωνίες των πλευρών αυτών

είναι ίσες,
ii) δύο ορθογώνια με ίση τη γωνία των διαγωνίων τους είναι όμοια.

3. Θεωρούμε τους κύκλους (O_1,R_1) και (O_2,R_2) που τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν οι εφαπτόμενες στο Α τέμνουν τους κύκλους στα A_1 και A_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AB^2 = BA_1 \cdot BA_2$.

4. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι τα ύψη και Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι
$H\Delta \cdot HA = HB \cdot HE = H\Gamma \cdot HZ$.

5. Από το μέσο Μ του τόξου ΑΒ φέρουμε τις χορδές ΜΔ και ΜΖ, που τέμνουν τη χορδή ΑΒ στα Δ΄ και Ζ΄ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι
$M\Delta \cdot M\Delta' = MZ \cdot MZ'$.

6. Σε ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 1 \llcorner$) οι διαγώνιοι είναι κάθετες. Να αποδείξετε ότι το ύψος του είναι μέσο ανάλογο των βάσεων.

Σύνθετα Θέματα

1. Να αποδείξετε ότι δύο τραπέζια με ανάλογες βάσεις και τις προσκείμενες σε δύο ομόλογες βάσεις τους γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.

2. Έστω δοσμένη γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Μ. Ο τυχαίος κύκλος που διέρχεται από τα Ο και Μ τέμνει τις πλευρές Ox, Oy στα Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{d}{d'}$, όπου d, d΄ είναι οι αποστάσεις του Μ από τις Ox, Oy , αντίστοιχα.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1 \llcorner$) και το ύψος του ΑΔ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει το ΑΔ στο Ζ και η διχοτόμος της $\Delta\hat{A}B$ τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΖΕ//ΑΒ.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 1 \llcorner$ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$.

5. Η διχοτόμος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε. Να αποδείξετε ότι :
i) ΑΒ·ΑΓ = ΑΔ·ΑΕ,
ii) $ΕΒ^2$ = ΕΑ·ΕΔ .

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω δοσμένος κύκλος (O,R) και σημείο Α στο εξωτερικό του κύκλου. Από το Α φέρουμε την εφαπτομένη ΑΤ και την τέμνουσα ΑΒΓ. Να αποδειχθεί ότι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{TB^2}{T\Gamma^2}$.

2. Από σημείο Α φέρουμε τις εφαπτόμενες ΑΒ και ΑΓ κύκλου (O,R) και τυχαία τέμνουσα ΑΔΕ. Να αποδειχθεί ότι ΒΔ·ΓΕ = ΒΕ·ΓΔ.

3. Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές των κορυφών Β, Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ (με β ήγ) στη διχοτόμο του ΑΔ να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Δ.

4. Σε κάθε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να αποδειχθεί ότι οι αποστάσεις τυχαίου σημείου της διαγωνίου ΑΓ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τις πλευρές αυτές.

5. Αν Μ τυχαίο σημείο κύκλου (O,R), να αποδείξετε ότι :
i) η απόσταση d του Μ από χορδή ΑΒ του κύκλου είναι
$$d = \frac{MA \cdot MB}{2R},$$
ii) η απόσταση d΄ του Μ από την εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο Α του κύκλου είναι $d' = \frac{MA^2}{2R}$,
iii) αν d, d_1, d_2 οι αποστάσεις του Μ από μία χορδή ΓΔ του κύκλου και από τις εφαπτόμενες στα Γ, Δ αντίστοιχα, τότε $d^2 = d_1 \cdot d_2$.

6. Θεώρημα Πτολεμαίου: Σε κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών είναι ίσο με το γινόμενο των διαγωνίων του.

Δραστηριότητες

1. Να κατασκευασθούν δύο τετράπλευρα των οποίων οι πλευρές είναι παράλληλες μία προς μία, αλλά δεν είναι όμοια.

2. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Να κατασκευασθεί τετράπλευρο Α΄Β΄Γ΄Δ΄ το οποίο να αποτελείται από τρίγωνα ίσα με τα τρίγωνα στα οποία χωρίζει η διαγώνιος ΑΓ το ορθογώνιο έτσι, ώστε το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ να μην είναι όμοιο με το ΑΒΓΔ.

Εργασία

Κατασκευάστε έναν εξάντα και υπολογίστε το ύψος μίας πολυκατοικίας στη γειτονιά σας ακολουθώντας τη διαδικασία της εφαρμογής 2.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

● Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

- **Ανάλογες πλευρές**
- **Ίσες γωνίες**

● Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

● Κριτήρια Ομοιότητας τριγώνων

- **Δύο ίσες γωνίες**
- **Δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες**
- **Τρεις πλευρές ανάλογες**

● Σε δύο όμοια τρίγωνα ο λόγος δύο ομόλογων στοιχείων τους ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 3ου ΤΟΜΟΥ

151