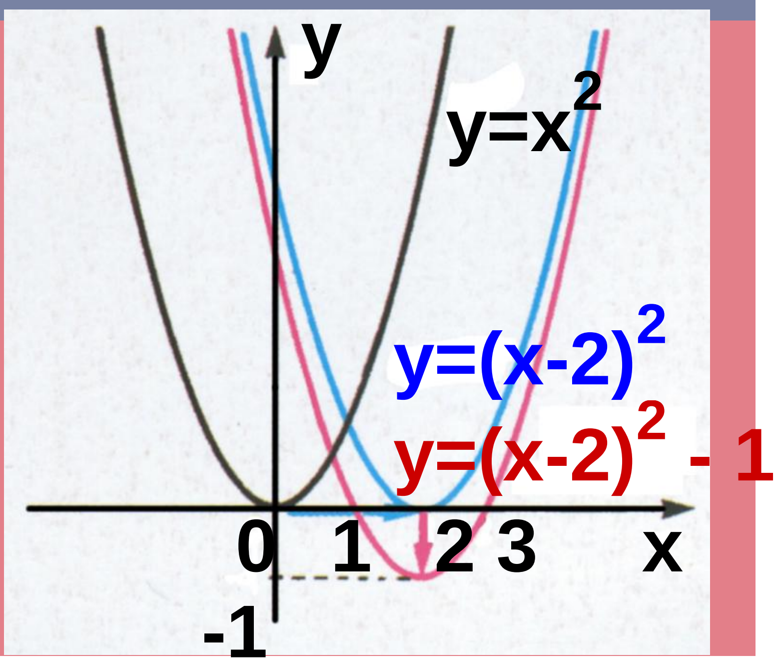
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Άλγεβρα και στοιχεία Πιθανοτήτων

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

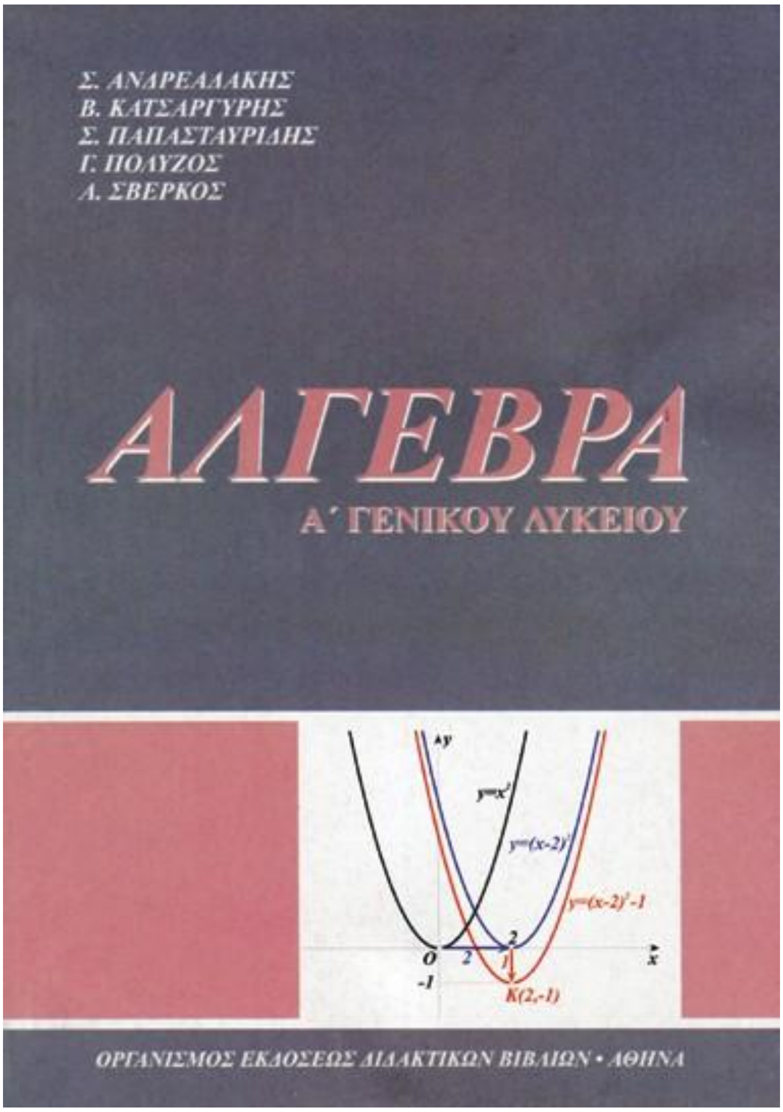


Τόμος 4ος

Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 4ος
1η έκδοση



ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός,

Κατσαργύρης Βασίλειος,

Παπασταυρίδης Σταύρος,

Πολύζος Γεώργιος,

Σβέρκος Ανδρέας

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Ομοτ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος, Καθηγητής Βαρβακείου, Πειραματικού Λυκείου

Παπασταυρίδης Σταύρος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος, Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.

Σβέρκος Ανδρέας, Καθηγητής 2ου Πειραματικού Λυκείου Αθηνών

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ Π. Ι.

Σκούρας Αθανάσιος,
Σύμβουλος του Π. Ι.
Πολύζος Γεώργιος,
Μόνιμος Πάρεδρος του Π. Ι.

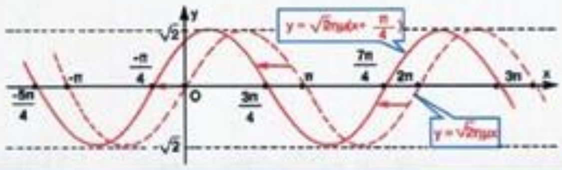
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Ελευθερόπουλος Ιωάννης
Καθηγητής Μαθηματικών,
Αποσπασμένος στο Π. Ι.
Ζώτος Ιωάννης
Καθηγητής Μαθηματικών,
Αποσπασμένος στο Π. Ι.
Καλλιπολίτου Ευρυδίκη
Καθηγήτρια Μαθηματικών,
Αποσπασμένη στο Π. Ι.

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ • ΑΘΗΝΑ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός,
Ομοτ. Καθηγητής
Πανεπιστημίου Αθηνών
Κατσαργύρης Βασίλειος,
Καθηγητής Βαρβακείου
Πειραματικού Λυκείου
Παπασταυρίδης Σταύρος,
Καθηγητής Πανεπιστημίου
Πάτρας
Πολύζος Γεώργιος, Μόνιμος
Πάρεδρος του Π.Ι.
Σβέρκος Ανδρέας, Καθηγητής 2ου
Πειραματικού Λυκείου Αθηνών

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ: 1991

ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ:

1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998

Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ
Αδαμόπουλος Λεωνίδας,
Επ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Δαμιανού Χαράλαμπος,
Αναπλ. Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών
Σβέρκος Ανδρέας,
Σχολικός Σύμβουλος

ΚΡΙΤΕΣ:

Κουνιάς Στρατής,

Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Μακρής Κωνσταντίνος,

Σχολικός Σύμβουλος

Τσικαλουδάκης Γεώργιος,

Καθηγητής Β/θμιας

Εκπαίδευσης

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

Μπουσούνη Λία Καθηγήτρια

Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΔΑΚΤΥΛΟΓΡΑΦΗΣΗ:

Μπολιώτη Πόπη

ΣΧΗΜΑΤΑ:

Μπούτσικας Μιχάλης

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

Ομάδα Εργασίας του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ

Γραμμένος Νικόλαος, Εκπαιδευτικός

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Νικόπουλος Ιωάννης, Εκπαιδευτικός

5 ΠΡΟΟΔΟΙ

5.1 Ακολουθίες

Η έννοια της ακολουθίας

Ας υποθέσουμε ότι καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο 10000 ευρώ με ανατοκισμό ανά έτος και με επιτόκιο 2%. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα χρόνο οι τόκοι που θα αποδώσει το κεφάλαιο προστίθενται σε αυτό και το ποσό που προκύπτει ξανατοκίζεται για τον επόμενο χρόνο με το ίδιο επιτόκιο. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί όσα χρόνια θέλουμε. Επομένως, το κεφάλαιο των 10000 ευρώ θα γίνει:

Σε ένα χρόνο:

$$10000+0,02\cdot 10000=$$

$$10000\cdot(1+0,02)$$

$$=10200 \varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}$$

Σε δύο χρόνια:

$$10000\cdot 1,02+0,02\cdot(10000\cdot 1,02)=$$

$$=10000\cdot 1,02\cdot(1+0,02)=$$

$$=10000\cdot(1,02)^2=$$

$$=10404 \varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το ποσό των 10000 ευρώ θα γίνει:

Σε 3 χρόνια 10000 $(1,02)^3$ ευρώ, σε 4 χρόνια $10000 \cdot (1,02)^4$ ευρώ κτλ. και σε ν χρόνια θα γίνει $10000(1,02)^ν$ ευρώ.

Έτσι έχουμε τον πίνακα:

Χρόνια ν	Κεφάλαιο σε ν χρόνια
1	$10000 \bullet 1,02$
2	$10000 \bullet (1,02)^2$
3	$10000 \bullet (1,02)^3$
…	…
ν	$10000 \bullet (1,02)^ν$
….	….

Παρατηρούμε ότι κάθε θετικός ακέραιος ν αντιστοιχίζεται στον πραγματικό αριθμό $10000\cdot(1{,}02)^{\nu}$. Η παραπάνω αντιστοίχιση ονομάζεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.
Γενικά ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1,2,3,…,ν,… στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται πρώτος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_1, ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται δεύτερος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_2 κ.λ.π. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός ν καλείται ν-οστός ή γενικός όρος της ακολουθίας και το συμβολίζουμε συνήθως με α_ν. Δηλαδή, $1\rightarrow \alpha_1$, $2\rightarrow$

α_2, 3→α_3, …, ν→α_ν, … Την ακολουθία αυτή τη συμβολίζουμε (α_ν).

Παραδείγματα.

i. **Η αντιστοίχιση 1→1^2, 2→2^2,... ν→ν^2,... είναι η ακολουθία (α_ν) πρώτο όρο $\alpha_1=1^2$, δεύτερο όρο $\alpha_2=2^2$ κλπ. και γενικό όρο $\alpha_\nu=\nu^2$.**

ii. **Η ακολουθία (α_ν) με γενικό όρο $\alpha_\nu= (-1)^\nu$ έχει όρους: $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3= -1$,…**

iii. **Η ακολουθία (α_ν) με ν-οστό όρο**

$$a_\nu = \frac{1}{\nu}$$

έχει όρους:

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1, a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \quad ,....$$

Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά

Στην ακολουθία $1^2, 2^2, 3^2, ..., ν^2,...$ ο γενικός της όρος $α_ν = ν^2$ μας επιτρέπει να βρούμε τον οποιονδήποτε όρο της. Είναι π.χ. $α_{20} = 20^2 = 400$, $α_{100} = 100^2 = 10000$ κτλ.

Υπάρχουν όμως και ακολουθίες που για το γενικό τους όρο είναι δύσκολο να βρεθεί ένας μαθηματικός τύπος

Ας θεωρήσουμε π.χ. την ακολουθία $(α_ν)$, της οποίας ο πρώτος όρος είναι το 1, ο δεύτερος όρος είναι επίσης το 1 και κάθε άλλος όρος, από τον τρίτο και μετά, είναι ίσος με το άθροισμα των δυο προηγούμενων όρων:

$α_1=1$, $α_2=1$, $α_{ν+2}= α_{ν+1}+α_ν$

Έχουμε:

$\alpha_3=1+1=2$, $\alpha_4=2+1=3$,
$\alpha_5=3+2=5$,$\alpha_6=5+3=8$, κτλ.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε με διαδοχικά βήματα να βρούμε τον οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία (α_ν) είναι τελείως ορισμένη.

Λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) ορίζεται αναδρομικά και η ισότητα $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$ λέγεται αναδρομικός τύπος της ακολουθίας. Γενικότερα, για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά, απαιτείται να γνωρίζουμε:

i. **Τον αναδρομικό της τύπο και**
ii. **Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.**

<u>Σχόλιο:</u> Υπάρχουν ακολουθίες, για τις οποίες μέχρι τώρα δε

γνωρίζουμε ούτε έναν τύπο για το γενικό τους όρο ούτε έναν αναδρομικό τύπο. Μια τέτοια ακολουθία είναι π.χ. η ακολουθία των πρώτων αριθμών:

2, 3, 5, 7, 11, 13,...

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1° Να γράψετε τους τέσσερις πρώτους όρους και τους 20ους όρους των ακολουθιών

$$a_\nu = 2\nu^2 - 3$$

$$,\ \beta_\nu = \frac{(-1)^\nu}{2\nu - 1}$$

ΛΥΣΗ

i)

Έχουμε:

$\alpha_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 = -1$,

$\alpha_2 = 2 \cdot 2^2 - 3 = 5$,

$\alpha_3 = 2 \cdot 3^2 - 3 = 15$,

$\alpha_4 = 2 \cdot 4^2 - 3 = 29$

και

$\alpha_{20} = 2 \cdot 20^2 - 3 = 797$

ii) Έχουμε:

$$\beta_1 = \frac{(-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = -1,$$

$$\beta_2 = \frac{(-1)^2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{1}{3},$$

$$\beta_3 = \frac{(-1)^3}{2 \cdot 3 - 1} = -\frac{1}{5},$$

$$\beta_4 = \frac{(-1)^4}{2\cdot 4-1} = \frac{1}{7}$$

και

$$\beta_{20} = \frac{(-1)^{20}}{2\cdot 20-1} = \frac{1}{39}$$

2^o Δίνεται η ακολουθία με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_\nu = \alpha_\nu^2 + 1$. Να βρεθούν οι πρώτοι τέσσερις όροι της ακολουθίας

ΛΥΣΗ

Έχουμε:
$\alpha_1=2$,
$\alpha_2=\alpha_1^2+1=2^2+1=5$,
$\alpha_3=\alpha_2^2+1=5^2+1=26$,
$\alpha_4=\alpha_3^2+1=26^2+1=677$

3^o Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = 3\nu+5$. Να οριστεί η ακολουθία αυτή και αναδρομικά.

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = [3(\nu+1)+5]-(3\nu+5)=$$
$$=3\nu+3+5-3\nu-5=$$
$$=3$$

Άρα $\alpha_{\nu+1}=3+\alpha_\nu$ που είναι ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας. Επειδή $\alpha_1 = 3 \cdot 1+5 = 8$, η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$\alpha_1= 8$ και $\alpha_{\nu+1}= 3+\alpha_\nu$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

i) $\alpha_\nu=2\nu+1$, **ii)** $\alpha_\nu=2^\nu$, **iii)** $\alpha_\nu=\nu^2+\nu$,

iv) $a_\nu=\dfrac{(\nu^2-1)}{\nu+1}$,

v) $a_\nu=\left(-\dfrac{1}{10}\right)^{\nu-1}$,

vi) $a_\nu=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\nu}$,

vii) $a_\nu=|5-\nu|$,

viii) $a_\nu=\eta\mu\left(\dfrac{\nu\pi}{4}\right)$,

ix) $a_\nu = \dfrac{2^\nu}{\nu^2}$,

x) $a_\nu = (-1)^{\nu+1} \cdot \dfrac{1}{\nu}$,

xi) $a_\nu = (-1)^{\nu+1}$

2. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

i) $\alpha_1=2$, $a_{\nu+1} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}$

ii) $\alpha_1=0$, $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu^2 + 1$

iii) $\alpha_1=3$, $\alpha_{\nu+1}=2(\alpha_\nu -1)$

3. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες:

i) $\alpha_\nu=\nu + 5$, ii) $\alpha_\nu=2^\nu$, iii) $\alpha_\nu=2^\nu-1$,
iv) $\alpha_\nu=5\nu+3$

4. Να βρείτε το ν όρο των ακολουθιών:
i) $\alpha_1=1$, $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+2$,
ii) $\alpha_1=3$, $\alpha_{\nu+1}=5\alpha_\nu$

5.2 Αριθμητική Πρόοδος

-Στην ακολουθία 1, 3, 5, 7,... των περιττών αριθμών, κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:
$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2$ ή $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2$
Η ακολουθία (α_ν) λέγεται αριθμητική πρόοδος με διαφορά 2.
-Στην ακολουθία 15, 10, 5, 0, -5, -10,... κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού -5. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu-5$ ή $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=-5$
Όπως και προηγουμένως, η ακολουθία (α_ν) λέγεται αριθμητική πρόοδος με διαφορά -5.
Γενικότερα ορίζουμε ότι:

Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με ω και τον λέμε διαφορά της προόδου.
Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega} \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega}$$

Αν σε μια αριθμητική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της $α_1$ και τη διαφορά της ω τότε ο αναδρομικός της τύπος $α_{ν+1} = α_ν+ω$ μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της.

Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε κατευθείαν το $ν_ο$= όρο $α_ν$ μιας αριθμητικής προόδου ως συνάρτηση των $α_1$, ω και ν ως εξής: Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$α_1=1$
$α_2=α_1+ω$
$α_3=α_2+ω$
$α_4=α_3+ω$
…………………..
$α_{ν-1}=α_{ν-2}+ω$
$α_ν=α_{ν-1}+ω$

Προσθέτοντας κατά μέλη της ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής βρίσκουμε $α_ν = α_1 + (ν\text{-}1)ω$ Επομένως

Ο $ν_{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $α_1$ και διαφορά ω είναι
$$α_ν=α_1+(ν-1)ω$$

Έτσι π.χ. στην αριθμητική πρόοδο 3, 5, 7, 9 .... η οποία έχει $α_1 = 3$ και $ω=5-3=2$, ο $ν_{ος}$ όρος της είναι $α_ν = 3+(ν-1)\,2$.

Επομένως ο 20ος όρος της είναι $α_{20} = 3+19 \cdot 2 = 41$, ο 100ος όρος της είναι $α_{100} = 3+99\cdot2 = 201$ κτλ.

Αριθμητικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω, τότε ισχύει:

β - α = ω και γ – β = ω,

επομένως

β – α = γ - β ή

$$\beta = \frac{(\alpha + \gamma)}{2}$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\beta = \frac{(\alpha + \gamma)}{2}$$

τότε έχουμε

2β = α + γ ή β – α = γ – β

που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο β λέγεται αριθμητικός μέσος των α και γ
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Τρεις αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου
αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \dfrac{(\alpha + \gamma)}{2}$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Ας θεωρήσουμε την αριθμητική πρόοδο 1, 2, 3, 4,... και ας βρούμε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της
$S_{100}=1+2+3+...+98+99+100$

Αντί να προσθέσουμε τους αριθμούς αυτούς με τον συνήθη τρόπο, μπορούμε να βρούμε συντομότερα το άθροισμά τους ως εξής:

Γράφουμε δυο φορές το παραπάνω άθροισμα, αλλά με αντίθετη τη σειρά των προσθετέων και προσθέτουμε τις δυο ισότητες κατά μέλη:

$$S_{100} = 1+2+3 + \ldots + 98+99+100$$
$$S_{100} = 100+99+98 + \ldots + 3+2+1$$
$$2S_{100} = (1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(98+3)+(99+2)+(100+1)$$
ή $2S_{100} = 101+101+101 + \ldots + 101+101+101$

ή $2S_{100} = 100 \cdot 101$, άρα $S_{100} = \dfrac{100 \cdot 101}{2} = 5050$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τρόπο σε μια οποιαδήποτε αριθμητική πρόοδο, θα αποδείξουμε ότι:

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά ω είναι

$$S\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ *

Έχουμε: $S_\nu = \alpha_1+(\alpha_1+\omega)+(\alpha_1+2\omega) + \ldots + [\alpha_1+(\nu-2)\omega]+[\alpha_1+(\nu-1)\omega]$

και $\quad S_\nu = \alpha_\nu+(\alpha_\nu-\omega)+(\alpha_\nu-2\omega) + \ldots + [\alpha_\nu-(\nu-2)\omega]+[\alpha_\nu-(\nu-1)\omega]$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$2S_\nu = (\alpha_1+\alpha_\nu)+(\alpha_1+\alpha_\nu)+(\alpha_1+\alpha_\nu) + \ldots + (\alpha_\nu+\alpha_1)+(\alpha_\nu+\alpha_1)$$

ή $\quad 2S_\nu = \nu(\alpha_1+\alpha_\nu)$. Άρα $S_\nu = \dfrac{\nu}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_\nu\right)$

Επειδή $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$, ο τύπος $S_\nu = \dfrac{\nu}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_\nu\right)$ γράφεται:

$$\boxed{S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + \left(\nu - 1\right)\omega\right]}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1°

Να βρεθεί το άθροισμα
$7+10+13+...+157$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για το άθροισμα διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 7$, $\alpha_\nu = 157$ και $\omega = 3$.
Για να το υπολογίσουμε, χρειαζόμαστε το πλήθος ν των προσθετέων.
Από τον τύπο του $\nu_{ου}$ όρου
$\alpha_\nu = \alpha_1+(\nu-1)\omega$ έχουμε
$157 = 7+(\nu-1)3 \Leftrightarrow$
$7+(\nu-1)3 = 157 \Leftrightarrow$
$3\nu = 153 \Leftrightarrow \nu = 51$

Επομένως το ζητούμενο άθροισμα είναι

$$S_{51} = \frac{51}{2}(7 + 157) = 4182$$

2ο

Πόσοι όροι της αριθμητικής προόδου 52, 47, 42,... έχουν άθροισμα ίσο με 90;

ΛΥΣΗ

Έχουμε
α1=52, ω=47-52=-5 και Sν=90

Επειδή
$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right],$$
έχουμε:

$$90 = \frac{\nu}{2}\left[2 \cdot 52 + (\nu - 1)(-5)\right] \Leftrightarrow 90 = \frac{\nu}{2}(109 - 5\nu)$$

$$\Leftrightarrow 5\nu^2 - 109\nu + 180 = 0$$

$$\Leftrightarrow \nu = \frac{9}{5} \quad ή \quad \nu = 20$$

Επειδή όμως $\nu \in \mathbb{N}^*$, συμπεραίνουμε ότι ν = 20. Άρα 20 όροι της δοθείσης αριθμητικής προόδου έχουν άθροισμα ίσο με 90.

3ο

Ο 10ος όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι ο 42 και ο 19ος όρος της είναι ο 87. Να υπολογισθεί το άθροισμα των πρώτων 100 όρων της προόδου αυτής.

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$ έχουμε $42 = \alpha_1 + 9\omega$ και $87 = \alpha_1 + 18\omega$.

Επομένως οι α και ω είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} \alpha_1 + 9\omega = 42 \\ \alpha_1 + 18\omega = 87 \end{cases}$$

Από την επίλυση του συστήματος αυτού βρίσκουμε ότι είναι $\alpha_1 = -3$ και $\omega = 5$.

$$\begin{aligned} S_{100} &= \frac{100}{2}\left[2(-3) + 99 \cdot 5\right] \\ &= 50(-6 + 495) \\ &= 24450 \end{aligned}$$

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το $ν^ο$ όρο των αριθμητικών προόδων:

i) 7, 10, 13,... ii) 11, 13, 15,... iii) 5, 2, -1,...

iv) 2, $\frac{5}{2}$, 3,... v) – 6, – 9, – 12,...

2. Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμιά από τις αριθμητικές προόδους:

i) Τον $α_{15}$ της – 2, 3, 8... ii) Τον $α_{20}$ της 11, 18, 25,... iii) Τον $α_{30}$ της 4, 15, 26,...

iv) Τον $α_{35}$ της 17, 25, 33,... v) Τον $α_{50}$ της 1, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$,...

vi) Τον $α_{47}$ της $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, 2,...

3. i) Αν ο $6^{\underline{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι 12 και ο $10^{\underline{ος}}$ όρος είναι 16, να βρείτε τον $1^{\underline{ο}}$ όρο και τη διαφορά της προόδου.

ii) Ομοίως, αν είναι $\alpha_5 = 14$ και $\alpha_{12} = 42$

iii) Ομοίως, αν είναι $\alpha_3 = 20$ και $\alpha_7 = 32$.

4. i) Ο $5^{\underline{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι -5 και ο $15^{\underline{ος}}$ όρος της είναι -2. Να βρείτε τον $50^{\underline{ο}}$ όρο της προόδου.

ii) Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_7 = 55$ και $\alpha_{22} = 145$, να βρείτε τον α_{18}.

5. i) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 5$ ισούται με 97;

ii) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 80$ και $\omega = -3$ ισούται με -97;

6. i) Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των 10 και –40.

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των $5x + 1$ και 11 είναι ο $3x - 2$.

7. Αν δυο αριθμοί διαφέρουν κατά 10 και ο αριθμητικός τους μέσος είναι ο 25, να βρείτε τους δυο αυτούς αριθμούς.

8. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων των αριθμητικών προόδων:

i) 7, 9, 11,... ii) 0, 2, 4,.... iii) 6, 10, 14,...
iv) –7, –2, +3,...

9. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 80 όρων των αριθμητικών προόδων:

i) 2, –1, –4,... ii) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \ldots$

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

i) $1+5+9+\ldots+197$ ii) $9+12+15+\ldots+90$ iii) $-7-10-13-\ldots-109$

11. Πόσους πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε από καθεμιά από τις παρακάτω αριθμητικές προόδους για να έχουν άθροισμα 180;

i) 4, 8, 12,... ii) 5, 10, 15,...

12. Μια στέγη σχήματος τραπεζίου έχει 15 σειρές κεραμίδια. Η πρώτη σειρά έχει 53 κεραμίδια και κάθε επόμενη σειρά έχει δυο κεραμίδια λιγότερα. Πόσα κεραμίδια έχει η 15η σειρά και πόσα κεραμίδια έχει συνολικά η στέγη;

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 12-4\nu$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω.

2. Να βρείτε το άθροισμα:

i) των πρώτων 200 περιττών αριθμών, ii) των πρώτων 300 θετικών άρτιων iii) όλων των περιττών αριθμών μεταξύ 16 και 380.

3. Να βρείτε το άθροισμα:

i) των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 1 και 199,

ii) των πολλαπλασίων του 3 μεταξύ 10 και 200.

4. Να βρείτε το άθροισμα:

i) των πρώτων 30 όρων της ακολουθίας $α_ν = 5ν–4$,

ii) των πρώτων 40 όρων της ακολουθίας $α_ν = –5ν–3$.

5. Να βρείτε το άθροισμα των ακεραίων από 1 μέχρι 200 που δεν είναι πολλαπλάσια του 4 ή του 9.

6. Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου 1, 3, 5, 7,... που απαιτούνται, ώστε το άθροισμα του να ξεπερνάει το 4000.

7. Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα, στον οποίο τα $α_1$ ω, ν, $α_ν$ και $S_ν$ ανήκουν σε κάθε γραμμή στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

$α_1$	ω	ν	$α_ν$	$S_ν$
120	–10	12		
5		27	109	
	3	12		210
	2	16	–8	

8. Ένα ρολόι χτυπάει τις ακέραιες ώρες. Πόσα χτυπήματα ακούγονται σε ένα 24/ωρο;

9. Ένα στάδιο έχει 33 σειρές καθισμάτων. Στην κάτω-κάτω σειρά βρίσκονται 800 θέσεις και στην πάνω-πάνω σειρά βρίσκονται 4160 θέσεις. Το πλήθος των θέσεων αυξάνει από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό θέσεων. Να βρείτε πόσες θέσεις έχει συνολικά το στάδιο και πόσες θέσεις έχει η μεσαία σειρά.

10. Μεταξύ των αριθμών 3 και 80 θέλουμε να βρούμε άλλους 10 αριθμούς που όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. **[Τέτοια προβλήματα λέγονται προβλήματα παρεμβολής όρων].**

11. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $1+\frac{\nu-1}{\nu}+\frac{\nu-3}{\nu}+\ldots+\frac{1}{\nu}$

12. Ένας αγρότης, για να κάνει μία γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε τα εξής με τον ιδιοκτήτη του γεωτρύπανου: Το 1 μέτρο θα κοστίσει 20 ευρώ και αυξανομένου του βάθους, θα αυξάνεται και η τιμή κάθε μέτρου κατά 5 ευρώ. Ο αγρότης διαθέτει 4700 ευρώ. Σε πόσο βάθος μπορεί να πάει η γεώτρηση στο κτήμα του;

5.3 Γεωμετρική Πρόοδος

- Στην ακολουθία 3, 6, 12, 24,... κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot 2 \quad ή \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 2$$

Η ακολουθία (α_ν) λέγεται γεωμετρική πρόοδος με λόγο 2.

- Στην ακολουθία 27, -9, 3,-1, ... κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί -1/3.Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu\left(-\frac{1}{3}\right) \quad ή \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = -\frac{1}{3}$$

Όπως και προηγουμένως, η ακολουθία (α_ν) λέγεται γεωμετρική πρόοδος με λόγο

$$-\frac{1}{3}$$

Γενικότερα ορίζουμε ότι:

Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με λ και τον λέμε λόγο της προόδου. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε, αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει $\alpha_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda} \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha_{\nu+1} / \alpha_\nu = \lambda}$$

Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της α. και το λόγο της λ, τότε ο αναδρομικός της τύπος $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu \cdot \lambda$ μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε κατευθείαν το ν° όρο α_ν μιας γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση των α_1, λ και ν ως εξής:

Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:
$\alpha_1 = \alpha_1$

$\alpha_2=\alpha_1\cdot\lambda$
$\alpha_3=\alpha_2\cdot\lambda$
$\alpha_4=\alpha_3\cdot\lambda$
…………………..
$\alpha_{\nu-1}=\alpha_{\nu-2}\cdot\lambda$
$\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}\cdot\lambda$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}$

Επομένως

Ο $\nu^{ος}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι

$$\alpha_\nu=\alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Έτσι π.χ. στη γεωμετρική πρόοδο 3, -6, 12, -24,... η οποία έχει $\alpha_1 = 3$ και λ = -6/3 = -2

ο $\nu^{ος}$ όρος της είναι $\alpha_\nu = 3 \cdot (-2)^{\nu-1}$. Επομένως ο $5^{ος}$ όρος της είναι $\alpha_5=3(-2)^4=48$ ο δέκατος όρος της είναι $\alpha_{10}=3(-2)^9=-1536$ κτλ.

Γεωμετρικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, τότε ισχύει

$$\frac{\beta}{\alpha}=\lambda \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\beta}=\lambda,$$

Επομένως:

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ή} \quad \beta^2=\alpha\gamma$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ≠0 ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$, τότε

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$$

που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου.

Ο θετικός αριθμός

$$\sqrt{\alpha\gamma}$$

λέγεται γεωμετρικός μέσος των α και γ.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta^2=\alpha\gamma$$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

Ας θεωρήσουμε τη γεωμετρική πρόοδο 1, 3, 9, 27, ... στην οποία είναι $α_1 = 1$ και $λ = 3$, και ας βρούμε το άθροισμα S_7 των 7 πρώτων όρων της.

Έχουμε
$$S_7=1+3+9+27+81+243+729 \qquad (1)$$

Αντί να προσθέσουμε τους αριθμούς αυτούς με τον συνήθη τρόπο, μπορούμε να βρούμε συντομότερα το άθροισμά τους ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο $λ=3$ και έχουμε
$$3S_7=3+9+27+81+243+729+2187 \qquad (2)$$

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:

$$3S_7 - S_7 = 2187 - 1$$
$$2S_7 = 2186$$
$$S_7 = 1093$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τρόπο σε μια οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδο, θα αποδείξουμε ότι:

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου ($α_ν$) με λόγο λ≠1 είναι

$$S_ν = α_1 \cdot \frac{λ^ν - 1}{λ - 1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω

$S_v = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \ldots + \alpha_1\lambda^{v-2} + \alpha_1\lambda^{v-1}$ (1)

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο λ και έχουμε

$\lambda S_v = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 + \ldots + \alpha_1\lambda^{v-1} + \alpha_1\lambda^v$ (2)

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:

$\lambda S_v - S_v = \alpha_1\lambda^v - \alpha_1$ ή
$(\lambda - 1)S_v = \alpha_1(\lambda^v - 1)$

Επομένως, αφού λ≠1, έχουμε:

$$S_v = \frac{\alpha_1(\lambda^v - 1)}{\lambda - 1}$$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που ο λόγος της προόδου είναι λ-1, τότε το άθροισμα των όρων της είναι

$S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$ αφού όλοι οι όροι της προόδου είναι ίσοι με α_1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1°

Να βρεθεί ο ν όρος μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο 4ος όρος είναι ¾ και ο 9ος είναι -3/128

ΛΥΣΗ

Έστω α_1, ο πρώτος όρος της γεωμετρικής προόδου και λ ο λόγος της.

Τότε έχουμε:

$$\alpha_1\lambda^{4-1} = \alpha_1\lambda^3 = \frac{3}{4}$$

και

$$\alpha_1\lambda^{9-1} = \alpha_1\lambda^8 = \frac{3}{128}$$

Επομένως

$$\frac{\alpha_1\lambda^8}{\alpha_1\lambda^3} = \left(-\frac{3}{128}\right):\frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda^5 = -\frac{1}{32},$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\lambda = -\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του λ στην

$$\alpha_1\lambda^3 = \frac{3}{4}$$

και έχουμε

$$\alpha_1\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad \alpha_1 = -6$$

Άρα ο ν όρος της γεωμετρικής προόδου, σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1},$$

είναι

$$\alpha_\nu = (-6)\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$$

2°

Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{256}$$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για το άθροισμα διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = ½$.

Για να εφαρμόσουμε τον τύπο

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1},$$

πρέπει να ξέρουμε το πλήθος ν των όρων.
Από τον τύπο όμως του ν όρου $\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}$ έχουμε

$$\frac{1}{256} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$$

ή

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$$

και επομένως ν- 1 = 8 ή ν=9.

Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S_9 = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{512}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{511}{512}}{\frac{1}{2}} = \frac{1022}{512} = \frac{511}{256}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – Α′ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το $\nu^{\underline{o}}$ όρο των γεωμετρικών προόδων:

i) $3, 6, 12, \ldots$ ii) $\frac{2}{3}, 2, 6, \ldots$ iii) $9, 27, 81, \ldots$

iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ v) $16', 8, 4, \ldots$ vi) $18, 6, 2, \ldots$

vii) $1,\ 0{,}4,\ 0{,}16, \ldots$ vii) $-2, 4, -8, \ldots.$ ix) $-3, 9, -27, \ldots$

2. Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμιά από τις γεωμετρικές προόδους:

i) Τον α_9 της $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ ii) Τον α_7 της $2, 6, 18, \ldots$

iii) Τον α_8 της $729, 243, \ldots$ iv) Τον α_{10} της $1 -2, 4, \ldots$

v) Τον α_9 της $\frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, \ldots$

3. i) Να βρείτε τον $1^{\underline{ο}}$ όρο μιας γεωμετρικής προόδου, της οποίας ο $5^{\underline{ος}}$ όρος είναι $\frac{32}{3}$ και ο λόγος 2.

ii) Ομοίως, αν ο $4^{\underline{ος}}$ όρος είναι $\frac{27}{128}$ και ο λόγος $\frac{3}{4}$

4. i) Να βρείτε το λόγο μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο $3^{\underline{ος}}$ όρος είναι 12 και ο $6^{\underline{ος}}$ όρος είναι 96.

ii) Ομοίως, αν ο $2^{\underline{ος}}$ όρος είναι $\frac{8}{3}$ και ο $5^{\underline{ος}}$ όρος είναι $\frac{64}{81}$

5. Να βρείτε:

i) τον $α_{14}$ μιας γεωμετρικής προόδου με $α_4 = 125$ και $α_{10} = \frac{125}{64}$

ii) τον $α_{21}$ μιας γεωμετρικής προόδου με $α_{13} = \sqrt{2}$ και $α_{23} = 32\sqrt{2}$

6. Έστω η γεωμετρική πρόοδος 3, 6, 12,.... Να βρείτε το πλήθος των όρων της μέχρι και τον όρο που ισούται με 768.

7. i) Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 4, 8, 16,... που υπερβαίνει το 2000.

ii) Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 128, 64, 32,..., που είναι μικρότερος του 0,25.

8. i) Να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των αριθμών 5 και 20, καθώς και των $\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\sqrt{3}$

ii) Να βρείτε τον x ώστε οι αριθμοί $x-4$, $x+1$, $x-19$ να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

9. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων των γεωμετρικών προόδων

i) 1, 2, 4,... ii) 3, 9, 27,... iii) –4, 8, –16,...

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

i) $2+8+32+\cdots+8192$ ii) $4+2+1+\cdots+\frac{1}{512}$

iii) $1+(-2)+4+\cdots+256$.

11. Μια κοινωνία βακτηριδίων διπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα. Αν αρχικά υπάρχουν 3 βακτηρίδια, πόσα βακτηρίδια θα υπάρχουν ύστερα από 12 ώρες;

12. Μια μπάλα πέφτει από ύψος 60 μέτρων και αναπηδά σε έδαφος φθάνοντας κάθε φορά στο $\frac{1}{3}$ του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης. Να βρείτε σε τι ύψος θα φθάσει στην 4η αναπήδηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – Β′ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 2^\nu \cdot \frac{1}{3^{\nu+1}}$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους α_1 και λ.

2. Για ποια τιμή του ν οι αριθμοί $\sqrt{\nu-5}$, $\sqrt[4]{10\nu+4}$, $\sqrt{\nu+2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

3. Να δείξετε ότι:

i) τα τετράγωνα των όρων μιας γεωμετρικής προόδου σχηματίζουν επίσης γεωμετρική πρόοδο

ii) Αν υψώσουμε κάθε όρο μιας γεωμετρικής προόδου στην k, τότε προκύπτει πάλι γεωμετρική πρόοδος.

4. Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο, της οποίας το άθροισμα των δυο πρώτων όρων της είναι $3+\sqrt{3}$ και το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι $4(3+\sqrt{3})$.

5. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων δέκα όρων της γεωμετρικής προόδου, στην οποία είναι $\alpha_2 + \alpha_6 = 34$ και $\alpha_3 + \alpha_7 = 68$.

6. Ο πληθυσμός μιας χώρας είναι 90 εκατομμύρια και παρουσιάζει ετήσια αύξηση 2%. Αν α_ν είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από ν χρόνια, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας (α_ν).

- Ποιος θα είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από 10 χρόνια; [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

7. Η ένταση του φωτός μειώνεται κατά 10%, όταν αυτό διέρχεται από ένα φίλτρο. Αν $I_ν$ είναι η ένταση του φωτός, αφού διέλθει διαδοχικά μέσα από ν τέτοια φίλτρα, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας $(I_ν)$.

- Ποια θα είναι η ένταση του φωτός, αν διέλθει μέσα από 10 τέτοια φίλτρα και η αρχική ένταση είναι I_o; [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

8. Σε ένα όργανο μουσικής ο τόνος C' έχει συχνότητα 261 Hz και η οκτάβα του C'' έχει διπλάσια συχνότητα. Ανάμεσα στους C' και C'' υπάρχουν 11 επιπλέον τόνοι, των οποίων οι συχνότητες σχηματίζουν με τις συχνότητες των C' και C'' 13 διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Να υπολογίσετε:

i) το λόγο της προόδου,

ii) τη συχνότητα του πέμπτου τόνου.

9. Το ψυγείο ενός φορτηγού περιέχει 40 lt νερό. Αδειάζουμε 4 lt νερό και το αντικαθιστούμε με αντιπυκτικό. Ύστερα αδειάζουμε 4 lt του μείγματος και το αντικαθιστούμε με αντιπυκτικό κ.ο.κ. Αν $D_ν$ είναι η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία ν φορές, να βρείτε:

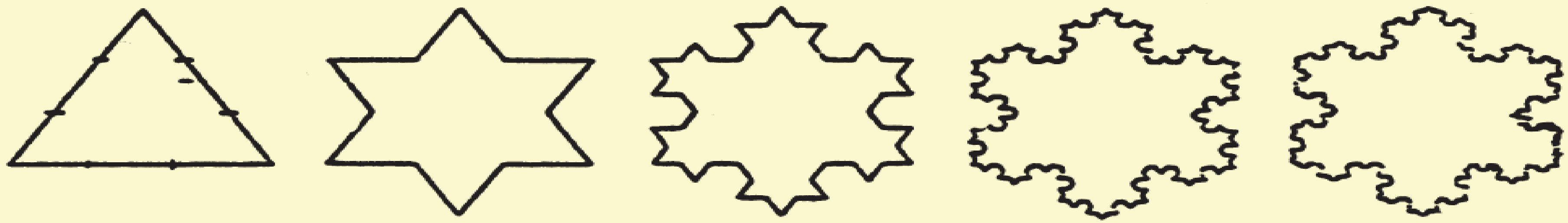
i) Έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας $(D_ν)$.

ii) Την ποσότητα του αντιπυκτικού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία 7 φορές. [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

10. Λέγεται ότι ο εφευρέτης του σκακιού παρακλήθηκε από έναν Ινδό βασιλιά να ζητήσει όποια αμοιβή ήθελε για τη σπουδαία ιδέα του. Ο εφευρέτης ζήτησε να πάρει το ρύζι που θα μαζευόταν ως εξής: Στο 1ο τετραγωνάκι του σκακιού να έβαζε κάποιος έναν κόκκο ρυζιού, στο 2ο τετραγωνάκι 2 κόκκους, στο 3ο τετραγωνάκι 4 κόκκους, στο 5ο τετραγωνάκι 8 κόκκους κτλ.

Να βρείτε πόσοι τόνοι θα ήταν η ποσότητα αυτή του ρυζιού, αν 1 Kg ρυζιού έχει 20000 κόκκους.

11. Κάθε πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου χωρίζεται σε τρία ίσα τμήματα. Το μεσαίο τμήμα κάθε πλευράς αντικαθίσταται από τις δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Στο σχήμα με μορφή αστεριού που προκύπτει αντικαθιστούμε πάλι το μεσαίο $\frac{1}{3}$ κάθε πλευράς με δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Με ανάλογο τρόπο συνεχίζουμε για κάθε σχήμα που προκύπτει από τη διαδικασία αυτή.



i) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας (S_ν) που εκφράζει το πλήθος των πλευρών κάθε σχήματος.

ii) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας (U_ν) που εκφράζει την περίμετρο κάθε σχήματος, αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά ίση με 1.

5.4 Ανατοκισμός – Ίσες Καταθέσεις

Με τη βοήθεια των γεωμετρικών προόδων μπορούμε να λύσουμε προβλήματα οικονομικής φύσεως, που συχνά παρουσιάζονται στις συναλλαγές με πιστωτικούς οργανισμούς.

Ανατοκισμός

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο α ευρώ με ετήσιο επιτόκιο ε%. Με τη συμπλήρωση ενός χρόνου οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο και το ποσό που προκύπτει είναι το νέο κεφάλαιο που τοκίζεται με το ίδιο επιτόκιο για τον επόμενο χρόνο. Αν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί για ν

χρόνια, να βρεθεί πόσα χρήματα θα εισπράξουμε στο τέλος του $\nu^{ου}$ χρόνου.
(Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα ανατοκισμού).

ΛΥΣΗ

Στο τέλος του 1 χρόνου το κεφάλαιο α θα δώσει τόκο

$$\frac{\varepsilon}{100} \cdot \alpha$$

και μαζί με τον τόκο θα γίνει

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{\varepsilon}{100}\alpha = \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Στο τέλος του 2ου χρόνου το κεφάλαιο α_1 θα δώσει τόκο

$$\frac{\varepsilon}{100}\cdot\alpha_1$$

και μαζί με τον τόκο θα γίνει

$$\alpha_2=\alpha_1+\frac{\varepsilon}{100}\alpha_1=\alpha_1\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Στο τέλος του 3ου χρόνου το κεφάλαιο α_2 μαζί με τους τόκους θα γίνει

$$\alpha_3=\alpha_2\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)\kappa\tau\lambda.$$

και γενικά στο τέλος του ν χρόνου το κεφάλαιο θα γίνει

$$\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Παρατηρούμε ότι τα α_1 , α_2, α_3,...,α_ν είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου με

$$\alpha_1 = \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$$

και

$$\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{100}.$$

Άρα, σύμφωνα με τον τύπο του ν όρου γεωμετρικής προόδου, στο τέλος του ν^ου^ χρόνου το κεφάλαιο α μαζί με τους τόκους θα γίνει

$$\alpha_\nu = \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu-1}$$

ή

$$\alpha_\nu = \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}$$

Αν θέσουμε

$$\frac{\varepsilon}{100} = \tau \ ,$$

που είναι ο τόκος του ενός ευρώ σε ένα χρόνο, έχουμε τον τύπο

$$\alpha_\nu = \alpha(1+\tau)^\nu$$

που είναι γνωστός ως τύπος του ανατοκισμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Καταθέτουμε με ανατοκισμό κεφάλαιο 10000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 2%. Να βρεθεί τι ποσό θα εισπράξουμε ύστερα από 10 χρόνια.

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_\nu=\alpha(1+\tau)^\nu$, ύστερα από 10 χρόνια θα εισπράξουμε ποσό

$\alpha_{10} = 10000 \cdot (1+0{,}02)^{10} =$
$= 10000 \cdot (1{,}02)^{10} =$
$= 10000 \cdot 1{,}218994 =$
$= 12189{,}94$ ευρώ.

Παρατήρηση. Τη δύναμη $(1{,}02)^{10}$ την υπολογίζουμε με τη βοήθεια πινάκων ή με έναν υπολογιστή τσέπης.

Ίσες καταθέσεις

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Καταθέτουμε σε μια τράπεζα στην αρχή κάθε χρόνου α ευρώ με ανατοκισμό και επιτόκιο ε%. Τι ποσό θα πάρουμε ύστερα από ν χρόνια;

(Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα των ίσων καταθέσεων)

ΛΥΣΗ

Η 1η κατάθεση θα ανατοκιστεί για ν χρόνια και επομένως, σύμφωνα με τον τύπο του ανατοκισμού, θα γίνει

$$\alpha(1+\tau)^{\nu}, \text{ όπου } \tau = \frac{\varepsilon}{100}.$$

Η 2η κατάθεση θα ανατοκιστεί για ν-1 χρόνια και επομένως θα γίνει $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$ κτλ. και η ν κατάθεση θα τοκιστεί για 1 χρόνο και θα γίνει α(1+τ) .

Συνεπώς ύστερα από ν χρόνια θα πάρουμε το ποσό

$$\begin{aligned}\Sigma &= \alpha(1+\tau)^{\nu}+\alpha(1+\tau)^{\nu-1} + \dots + \alpha(1+\tau)\\ &= \alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^{2} + \dots + \alpha(1+\tau)^{\nu}\\ &= \alpha(1+\tau)[1+(1+\tau)+(1+\tau)^{2} + \dots + (1+\tau)^{\nu-1}]\\ &= \alpha(1+\tau)\bullet\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{(1+\tau)-1}\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$$

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως τύπος των ίσων καταθέσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στην αρχή κάθε χρόνου καταθέτουμε στην τράπεζα ποσό 10000 ευρώ με ανατοκισμό και με επιτόκιο 2%.

Τι ποσό θα πάρουμε ύστερα από 10 χρόνια;

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau},$$

ύστερα από 10 χρόνια θα πάρουμε ποσό

$$\begin{aligned}\Sigma &= 10000 \cdot (1+0{,}02) \cdot \frac{(1+0{,}02)^{10}-1}{0{,}02} \\ &= 10000 \cdot 1{,}02 \cdot \frac{(1{,}02)^{10}-1}{0{,}02} \\ &= 10000 \cdot 1{,}02 \cdot \frac{1{,}218994-1}{0{,}02} \\ &= 10000 \cdot 11{,}168694 = \mathbf{111686{,}94} \text{ ευρώ.}\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για την επίλυση των ασκήσεων να χρησιμοποιηθεί υπολογιστής τσέπης

<u>Α' ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. **Δανείζει κάποιος 5000 ευρώ με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5%. Πόσα χρήματα θα πάρει συνολικά ύστερα από 5 χρόνια;**
2. **Πόσα χρήματα πρέπει να τοκίσει κάποιος με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% για να πάρει ύστερα από 10 χρόνια συνολικά 50.000 ευρώ;**
3. **Ποιο είναι το επιτόκιο με το οποίο, κεφάλαιο 10.000 ευρώ, ανατοκιζόμενο ανά έτος, γίνεται ύστερα από 5 χρόνια 12.762**

ευρώ;

4. Στην αρχή κάθε χρόνου και για 5 συνεχή χρόνια καταθέτουμε 5.000 ευρώ με ανατοκισμό ανά έτος και με ετήσιο επιτόκιο 3%. Τι ποσό θα πάρουμε στο τέλος του 5ου έτους;

6 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εισαγωγή

Σε πολλά καθημερινά φαινόμενα εμφανίζονται δύο μεγέθη, τα οποία μεταβάλλονται έτσι, ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει την τιμή του άλλου. Η διαδικασία με την οποία κάθε τιμή του ενός μεγέθους αντι-στοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του άλλου μεγέθους, πολλές φορές περιγράφεται από ένα μαθηματικό τύπο, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

1. Ο τόκος Τ σε ευρώ που αποδίδει κεφάλαιο 5000 ευρώ σε ένα έτος με ετήσιο επιτόκιο ε%, δίνεται κατά τα γνωστά από τον τύπο $T = 5000\frac{ε}{100}$.

Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ε αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Τ. Για παράδειγμα, αν ε = 3 τότε Τ = 150 , ενώ αν ε = 5, τότε Τ = 250 κτλ.

2. Το διάστημα S σε km που διανύθηκε από ποδηλάτη σε χρονικό διάστημα 2h, με μέση ταχύτητα υ σε km/h, δίνεται από τον τύπο S = 2υ . Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του υ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του S. Για παράδειγμα, αν υ = 60, τότε S = 120 , ενώ αν υ = 70, τότε S = 140 , κτλ.

3. Το εμβαδό Ε ενός κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο $Ε = πρ^2$. Ομοίως και ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ρ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Ε. Για παράδειγμα αν ρ = 1, τότε Ε = π, ενώ αν ρ = 2, τότε Ε = 4π κτλ.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η διαδικασία αντιστοίχισης ανάμεσα στις τιμές δύο μεγεθών δεν περιγράφεται ή έστω δεν γνωρίζουμε αν περιγράφεται από κάποιο τύπο. Για παράδειγμα:

- ✓ **Οι ώρες της ημέρας και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους.**
- ✓ **Οι μέρες του έτους και οι τιμές ενός ξένου νομίσματος (π.χ. του δολαρίου).**

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα υπάρχει κάποια διαδικασία, με την οποία

κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται <u>συνάρτηση</u> από το Α στο Β. Δηλαδή:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο Α λέγεται πεδίο ορισμού ή σύνολο ορισμού της f .

Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα μικρά γράμματα f, g, h κτλ. του Λατινικού αλφαβήτου.

Αν με μια συνάρτηση f από το Α στο Β, το x$\in$ Α αντιστοιχίζεται στο y$\in$ Β , τότε γράφουμε:

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε «y ίσον *f* του x». Το *f*(x) λέγεται τότε τιμή της *f* στο x. Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της *f*, ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x, ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή.

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές *f*(x) για όλα τα x ∈ A, λέγεται σύνολο τιμών της *f* και το συμβολίζουμε με *f*(A) .
Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

Έτσι π.χ. η συνάρτηση *f* με την οποία κάθε μη αρνητικός αριθμός

αντιστοιχίζεται στην τετραγωνική του ρίζα, συμβολίζεται ως εξής:

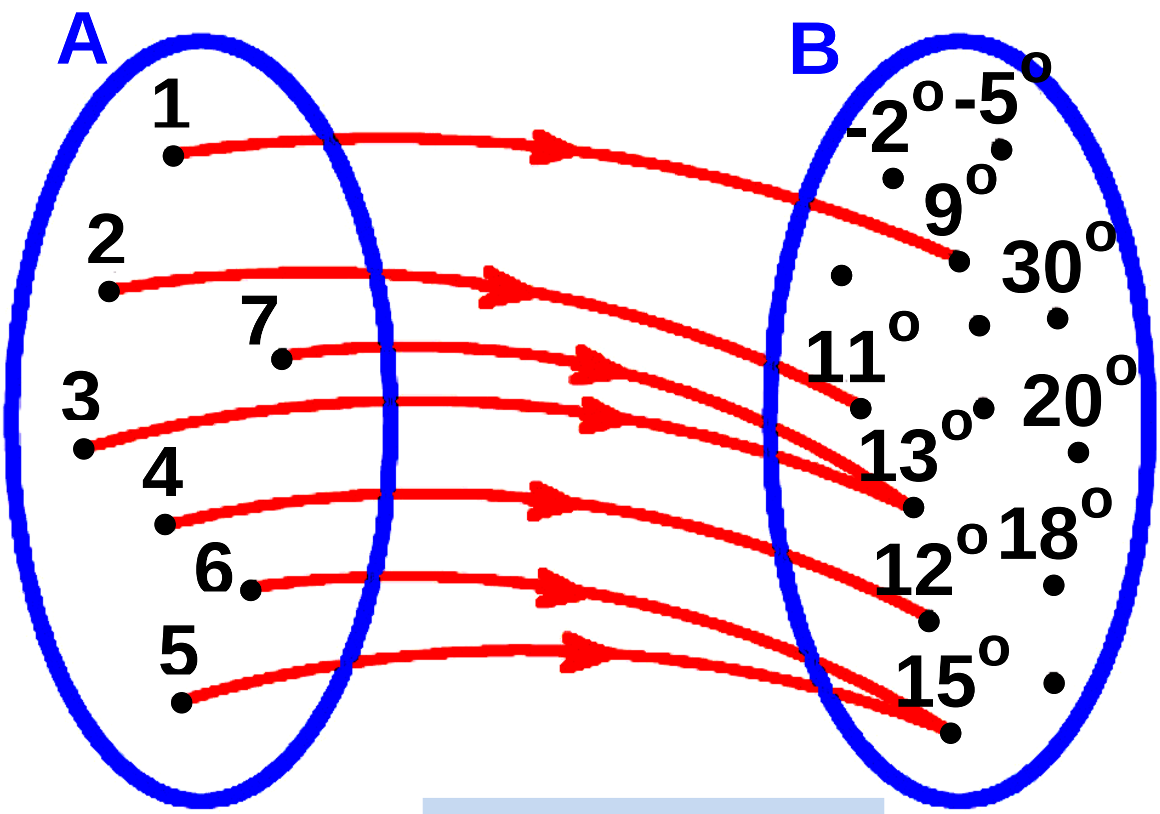
f : $[0, +\infty) \rightarrow R$

$x \rightarrow \sqrt{x}$

Για καλύτερη κατανόηση του παραπάνω ορισμού ας δούμε τα παραδείγματα που ακολουθούν:

1ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω f η συνάρτηση με την οποία κάθε ημέρα μιας ορισμένης εβδομάδας ενός μήνα αντιστοιχίζεται στην υψηλότερη θερμοκρασία της.



Για τη συνάρτηση αυτή, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7},

ενώ το σύνολο τιμών το σύνολο

f (A) = {9^0, 11^0, 12^0, 13^0, 15^0} $\subseteq$ B

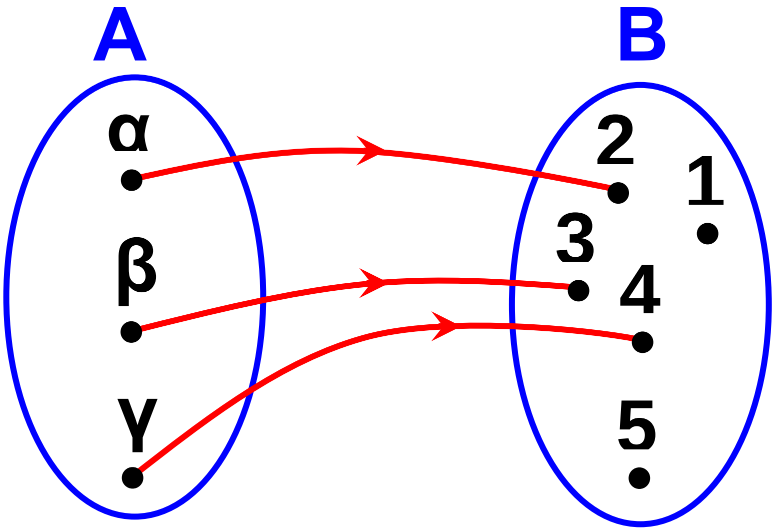
Με αφορμή το παράδειγμα αυτό τονίζουμε τα ακόλουθα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης f : A $\to$ B .

- **Κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του B.**
- **Μερικά στοιχεία του B μπορεί να μην αποτελούν τιμές της f (π.χ. 18^0).**
- **Δύο ή περισσότερα στοιχεία του A μπορεί να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του B (π.χ. τα 3 και 7 αντιστοιχίζονται στο 13°).**

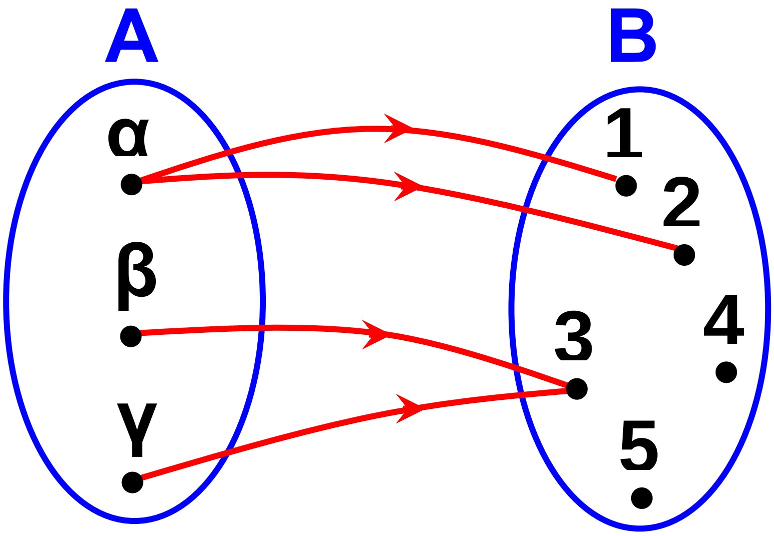
2ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε τα σύνολα Α = {α, β, γ} και Β = {1, 2, 3, 4, 5}, καθώς επίσης και τα παρακάτω σχήματα (βελοδιαγράμματα). Παρατηρούμε ότι:

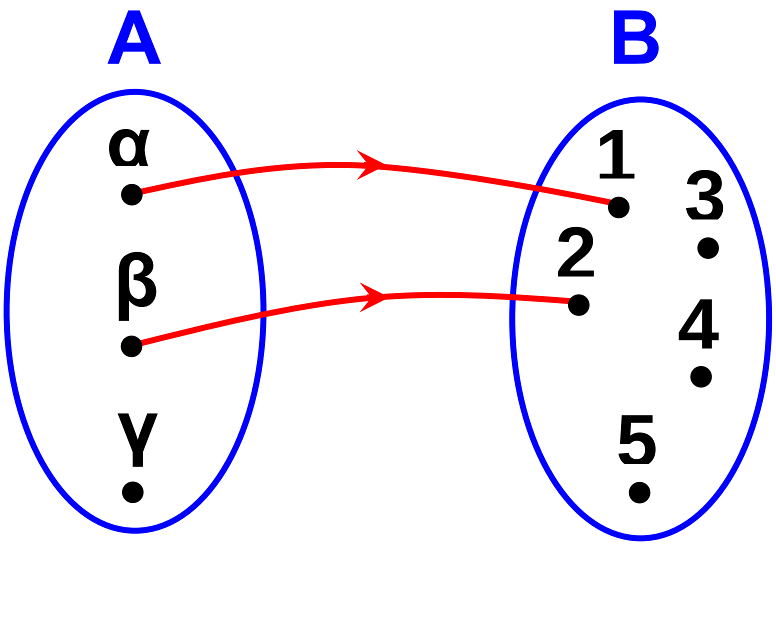
- ✓ **Το σχήμα (α) παριστάνει συνάρτηση, αφού κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β.**
- ✓ **Το σχήμα (β) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το α ∈ Α αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του Β.**
- ✓ **Το σχήμα (γ) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το γ ∈ Α δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του Β.**
- ✓ **Το σχήμα (δ) δεν παριστάνει συνάρτηση. Πρώτον διότι το γ ∈ Α δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του Β και δεύτερον διότι το α ∈ Α αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του Β.**



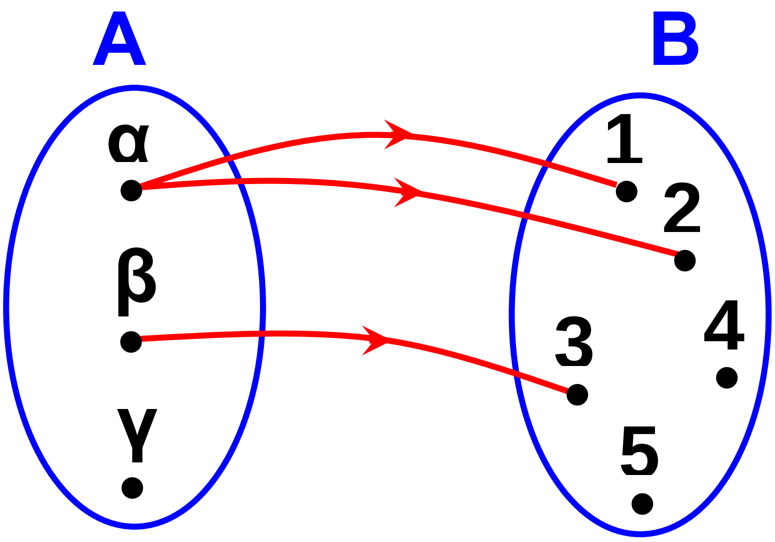
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



Σχήμα γ΄



Σχήμα δ΄

Συντομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι, για να οριστεί μια συνάρτηση f, πρέπει να δοθούν τρία στοιχεία:

- Το πεδίο ορισμού της Α
- Το σύνολο Β και
- Το $f(x)$ για κάθε $x \in A$

Οι συναρτήσεις, με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο βιβλίο αυτό, είναι της μορφής $f : A \to B$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$, είναι δηλαδή, όπως λέμε, **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.**

Πολλές φορές αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνον τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Λέμε π.χ. δίνεται «η συνάρτηση f, με $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ » ή, πιο σύντομα, «η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ » ή, ακόμα, «η συνάρτηση $y = \sqrt{1 - 4x}$ ».

Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε συμβατικά ότι:

- **Το πεδίο ορισμού Α της f είναι το «ευρύτερο» από τα υποσύνολα του R στα οποία το $f(x)$ έχει νόημα.**
- **Το σύνολο Β είναι ολόκληρο το σύνολο R των πραγματικών αριθμών.**

Έτσι για τη συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{1 - 4x}$$

το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο

$$A = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right],$$ **αφού πρέπει $1 - 4x \geq 0$,**

ενώ το σύνολο B είναι όλο το R .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Πολλές φορές μια συνάρτηση περιγράφεται με έναν τύπο που έχει κλάδους, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x < 0 \\ x - 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της f στα σημεία -1, 0 και 1 εργαζόμαστε ως εξής:

- ✓ **Για x = -1 < 0, από τον κλάδο $f(x) = x^2 + 1$, έχουμε:**

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

- ✓ **Για x = 0, από τον κλάδο $f(x) = x - 1$, έχουμε:**

$$f(0) = 0 - 1 = -1.$$

- ✓ **Τέλος, για x = 1 ≥ 0, από τον κλάδο $f(x) = x - 1$, έχουμε:**

$$f(1) = 1 - 1 = 0.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν και, γενικά, χρησιμοποιούμε το γράμμα f για τα συμβολισμό μιας συνάρτησης και το γράμμα χ για το συμβολισμό του τυχαίου στοιχείου του πεδίου ορισμού της, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα. Έτσι για παράδειγμα οι

$f(x) = x^2 - 4x + 7$, $g(t) = t^2 - 4t + 7$ και $h(s) = s^2 - 4s + 7$ ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Επομένως το x στον τύπο μιας συνάρτησης θα παίζει το ρόλο μιας «άδειας θέσης». Με αυτό το σκεπτικό, η παραπάνω συνάρτηση θα μπορούσε να έχει τη μορφή

$f(\ \ ) = (\ \ )^2 - 4(\ \ ) + 7$,

όπου οι παρενθέσεις έχουν πάρει τη θέση ενός γράμματος.

Έτσι για να υπολογίσουμε το $f(-2)$ απλά τοποθετούμε το -2 στις

θέσεις, που ορίζουν οι παρενθέσεις:

$$f(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 7 =$$
$$= 4 + 8 + 7 = 19$$

Ομοίως, έχουμε

$$f(3x) = (3x)^2 - 4(3x) + 7 = 9x^2 - 12x + 7$$

Υπάρχει όμως και μια παραπέρα απλοποίηση των εκφράσεών μας που σχετίζονται με συναρτήσεις. Πολλές φορές αντί να λέμε «η συνάρτηση $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$», θα λέμε «η συνάρτηση $s = \frac{1}{2}gt^2$», δηλαδή γράφουμε s υπονοώντας το s(t). Αυτή η απλοποίηση γίνεται συχνότατα σε διάφορες επιστήμες, που χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα και τα μαθηματικά εργαλεία, όπως η φυσική, η χημεία κτλ. Συνήθως στις περιπτώσεις αυτές υπάρχει κάποιο πείραμα, όπου το t

είναι η τιμή ενός μεγέθους, που υπεισέρχεται στο πείραμα, και το s(t) η αντίστοιχη τιμή κάποιου άλλου μεγέθους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{x - 2} + \sqrt{x - 1}$$

ΛΥΣΗ

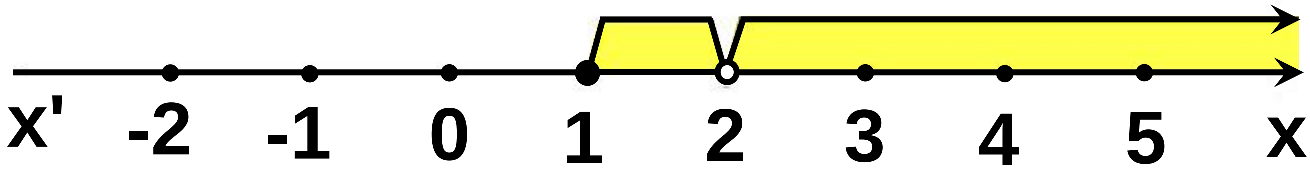
Η συνάρτηση *f* ορίζεται για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει

$$x - 2 \neq 0 \text{ και } x - 1 \geq 0$$

ή, ισοδύναμα, για

$$x \neq 2 \text{ και } x \geq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της *f* είναι το σύνολο $A = [1,2) \cup (2, +\infty)$ (Σχήμα)



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \dfrac{4}{x - 1} + 5$ ii) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

iii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ iv) $f(x) = \dfrac{1}{|x| + x}$

2. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - x}$

ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

iii) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

iv) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 3, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές $f(-5)$, $f(0)$ και $f(6)$.

4. Μια συνάρτηση f ορίζεται ως εξής:
"Σκέψου έναν φυσικό αριθμό, πρόσθεσε σ' αυτόν το 1, πολλαπλασίασε το άθροισμα με 4 και στο γινόμενο πρόσθεσε το τετράγωνο του αριθμού".
i) Να βρείτε τον τύπο της f και στη συνέχεια τις τιμές της για $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ και $x = 3$.
Τι παρατηρείτε;
ii) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $f(x) = 36$, $f(x) = 49$, $f(x) = 100$ και $f(x) = 144$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

i) $f(x) = \dfrac{4}{x - 1} + 5$,

ii) $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ και

iii) $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

i) $f(x) = 7$

ii) $g(x) = 2$ και

iii) $h(x) = \dfrac{1}{5}$.

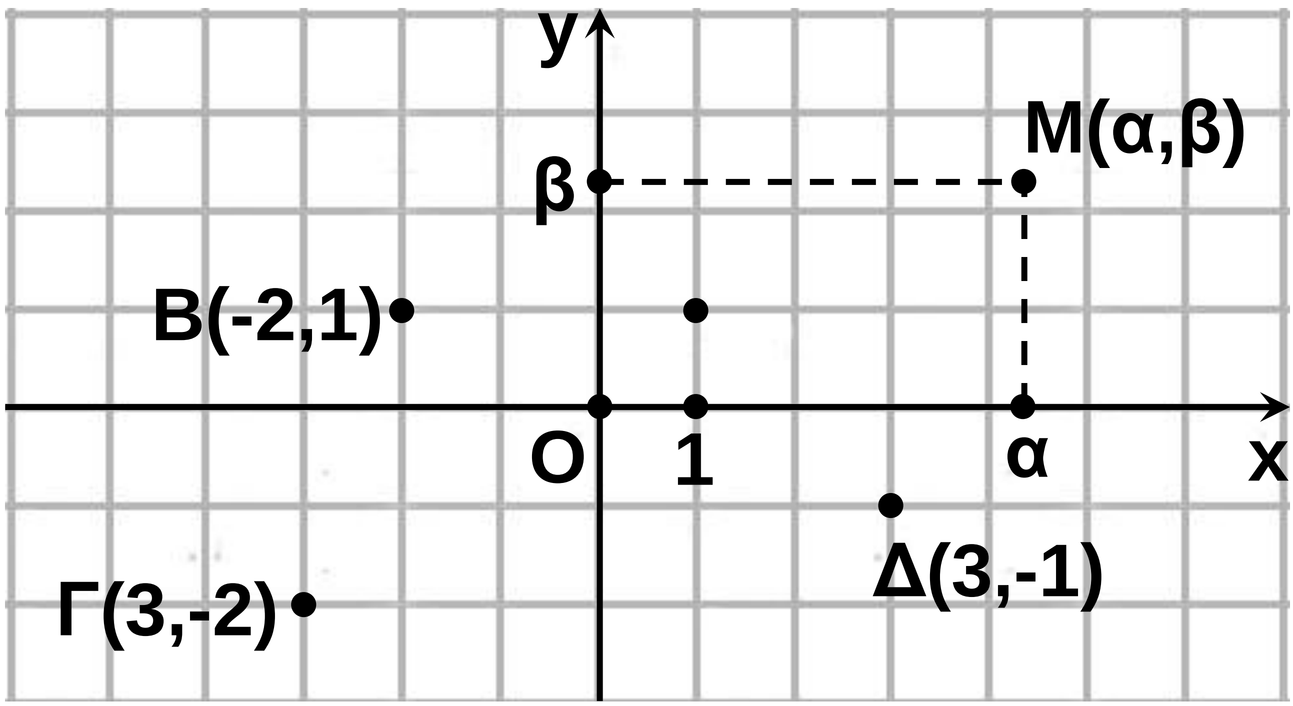
6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Καρτεσιανές συντεταγμένες

Η παράσταση ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, βοήθησε στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων με αλγεβρικές μεθόδους. Η παράσταση αυτή, όπως μάθαμε σε προηγούμενες τάξεις, γίνεται ως εξής:

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες x'x και y'y με κοινή αρχή ένα σημείο Ο. Από αυτούς ο οριζόντιος x'x λέγεται **άξονας των τετμημένων** ή άξονας των x, ενώ ο κατακόρυφος y'y **άξονας των τεταγμένων** ή άξονας των y.

Όπως είναι γνωστό, σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου των αξόνων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών και αντιστρόφως, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό σημείο Μ του επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα:



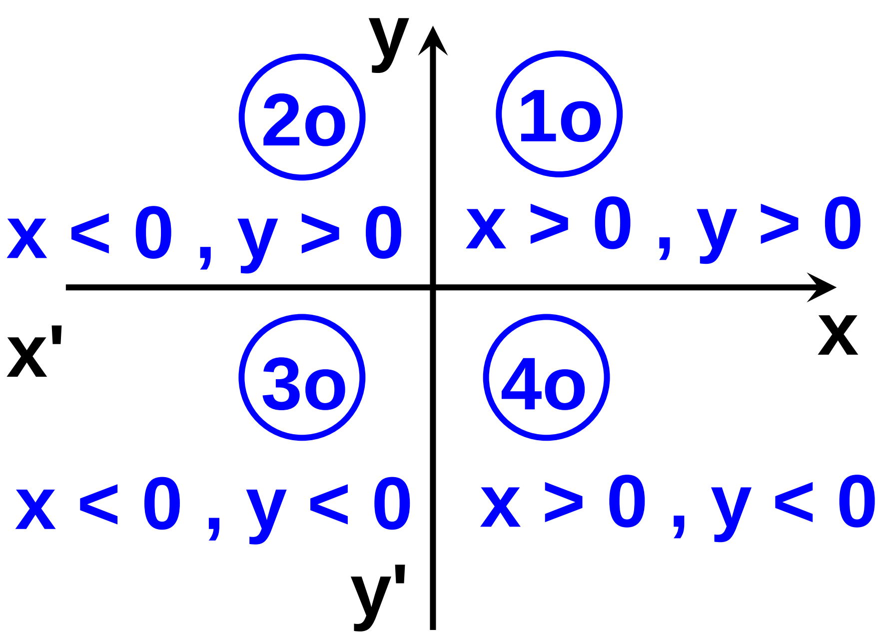
Οι αριθμοί **α, β** λέγονται **συντεταγμένες** του Μ. Ειδικότερα ο **α** λέγεται **τετμημένη** και ο β **τεταγμένη** του σημείου Μ. Το σημείο Μ που έχει συντεταγμένες **α** και **β** συμβολίζεται με **Μ(α, β)** ή, απλά, με **(α, β).**
Επειδή η ιδέα της χρησιμοποίησης ζευγών για την παράσταση σημείων του επιπέδου ανήκει στον Καρτέσιο, το παραπάνω ζεύγος των αξόνων το λέμε **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** και το συμβολίζουμε Oxy , ενώ το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό το λέμε **καρτεσιανό επίπεδο.** Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος, το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό.**

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:
Στα επόμενα, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, όταν λέμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, θα εννοούμε ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων στο επίπεδο. Τότε:

- **Τα σημεία του άξονα x'x και μόνο αυτά έχουν τεταγμένη ίση με το μηδέν, ενώ τα σημεία του άξονα y'y και μόνο αυτά έχουν τετμημένη ίση με το μηδέν**
- **Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια, που είναι τα εσωτερικά των γωνιών $x\hat{O}y$, $y\hat{O}x'$, $x'\hat{O}y'$ και $y'\hat{O}x$ και ονομάζεται 1^o, 2^o, 3^o και 4^o, τεταρτημόριο, αντιστοίχως. Τα πρόσημα των**

συντεταγμένων των σημείων τους φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



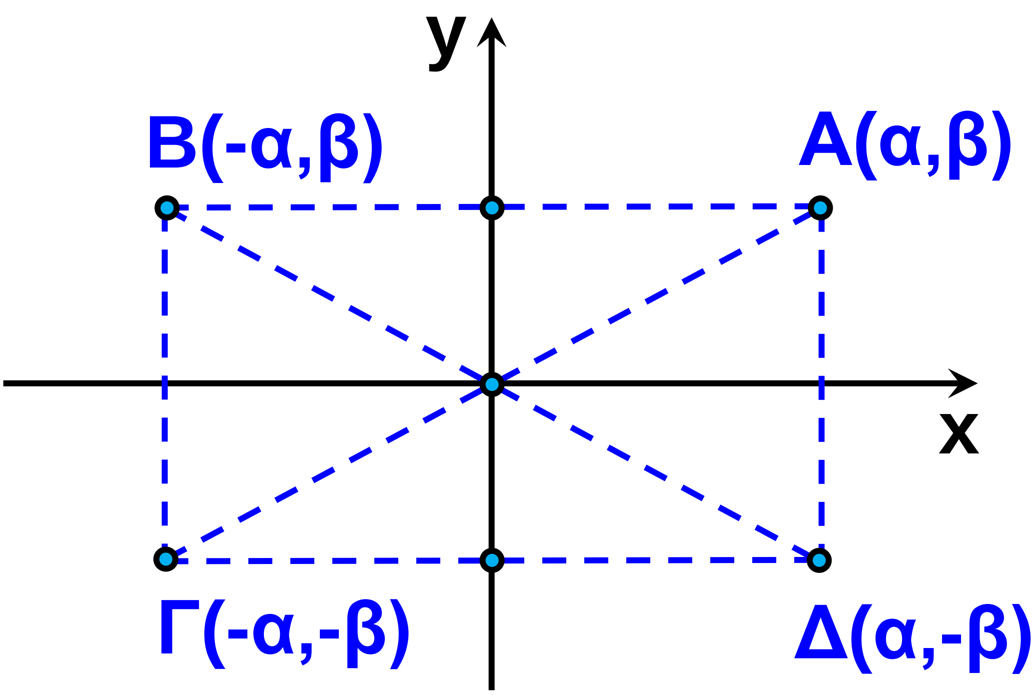
• Αν Α (α, β) είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, με τη βοήθεια της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς κέντρο, διαπιστώνουμε ότι:

✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα x'x είναι το σημείο Δ (α,-β), που έχει ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη (Σχ. α').

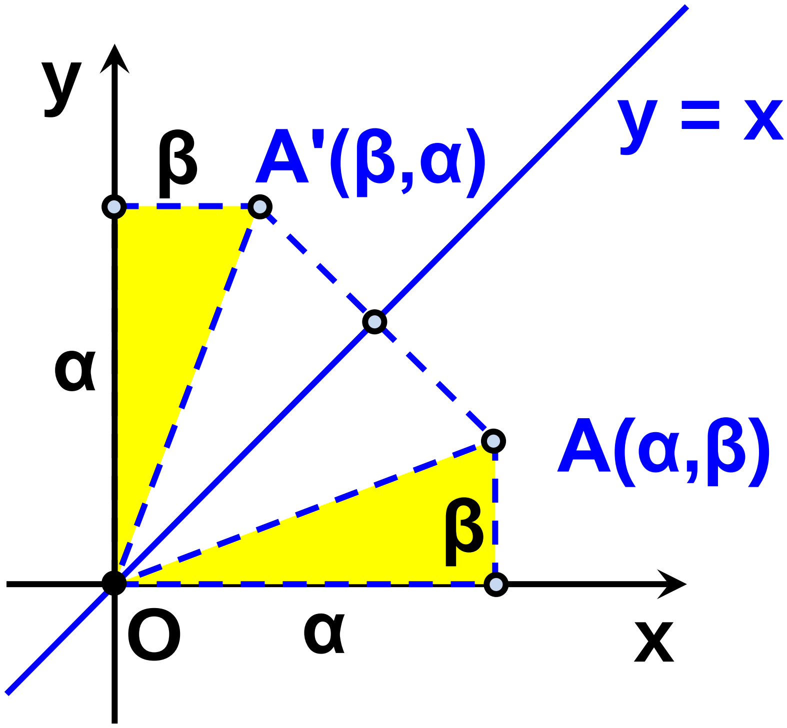
✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα y'y είναι το σημείο Β(-α,β), που έχει ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη (Σχ. α').

✓ Το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο Γ (-α,-β), που έχει αντίθετες συντεταγμένες (Σχ. α').

✓ Το συμμετρικό του ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι το σημείο Α'(β,α) που έχει τετμημένη την τεταγμένη του Α και τεταγμένη την τετμημένη του Α (Σχ. β').



Σχήμα α'



Σχήμα β'

Απόσταση σημείων

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία αυτού. Θα δείξουμε ότι οι απόστασή τους δίνεται από τον τύπο:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

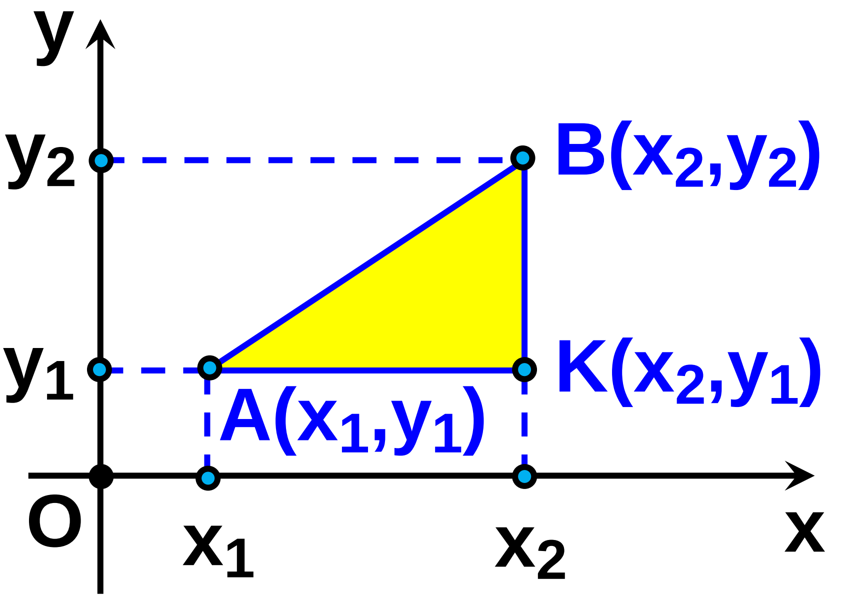
ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΒ του παρακάτω σχήματος έχουμε:

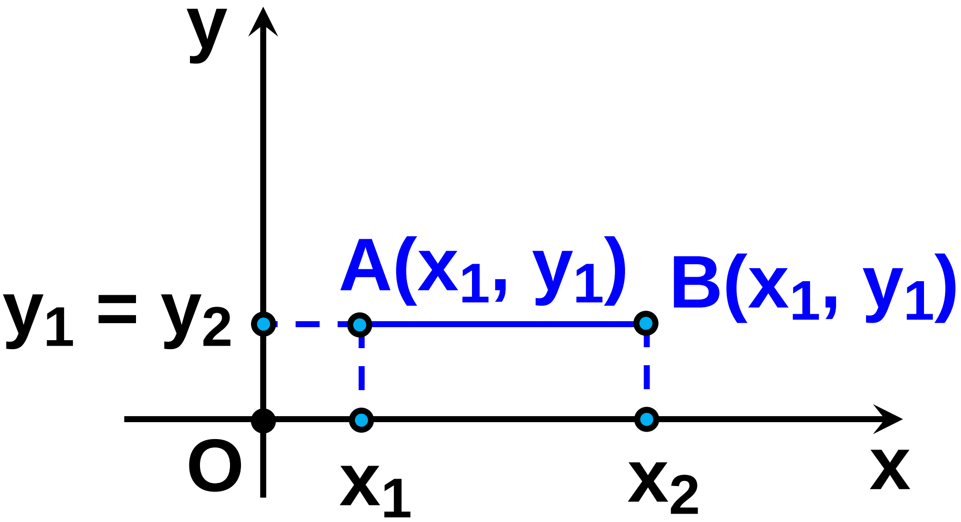
$$(AB)^2 = (KA)^2 + (KB)^2$$
$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

οπότε:

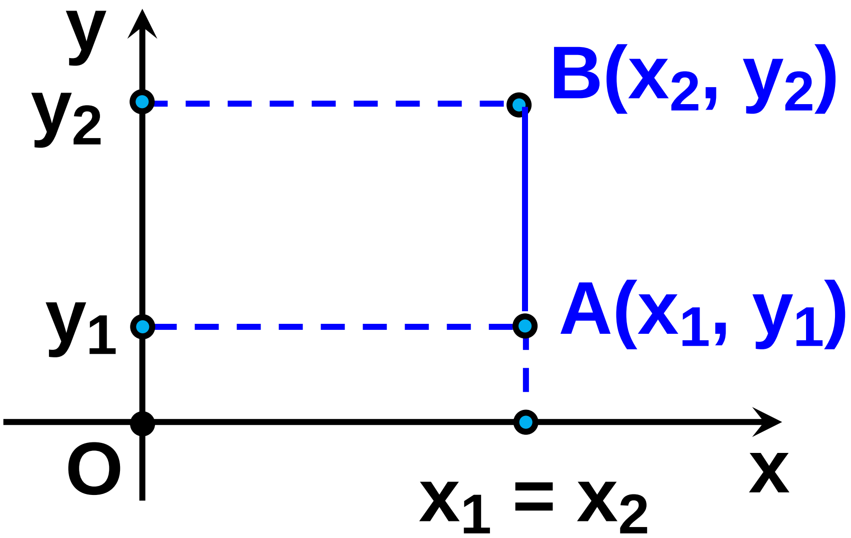
$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Ο παραπάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που η ΑΒ είναι παράλληλη με τον άξονα x'x (Σχήμα γ') ή παράλληλη με τον άξονα y'y (Σχήμα δ').



Σχήμα γ'



Σχήμα δ'

Για παράδειγμα, αν Α(3,1), Β(3,5) και Γ (-1,1) είναι οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε θα είναι:

$$(AB) = \sqrt{(3 - 3)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$(A\Gamma) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (1 - 5)^2} =$$

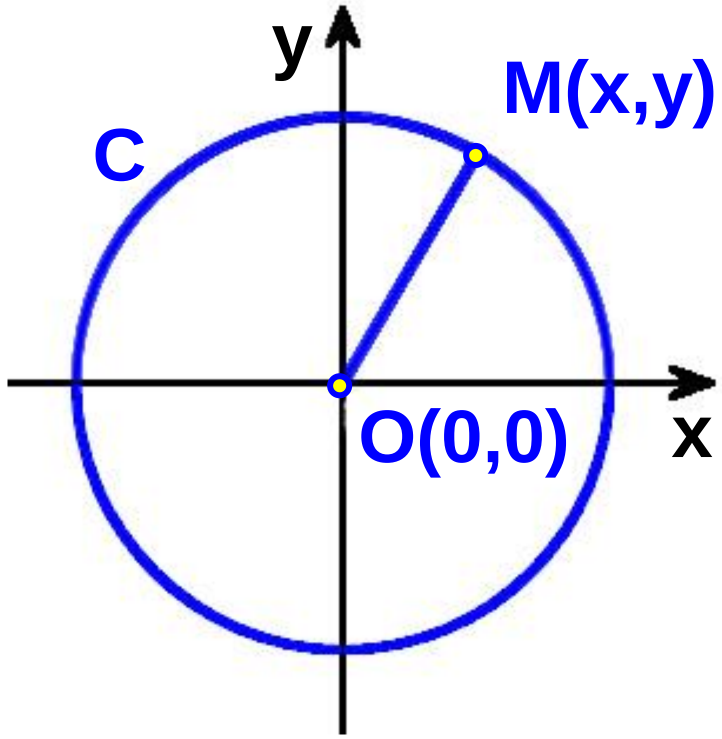
$$= \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

Αφού, λοιπόν, είναι (ΑΒ) = (ΑΓ), το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και επειδή επιπλέον ισχύει $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 32 = (B\Gamma)^2$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ορθογώνιο .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω C ο κύκλος με κέντρο την αρχή Ο των αξόνων και ακτίνα ρ. Να αποδειχτεί ότι ένα σημείο Μ (x, y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι προφανές ότι ένα σημείο M(x,y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει (OM) = ρ . Όμως

$(OM) = \sqrt{x^2 + y^2}$, οπότε έχουμε:

$$(OM) = \rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$$

Επομένως το σημείο M (x,y) ανήκει στο κύκλο C (O,ρ), αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \qquad (1)$$

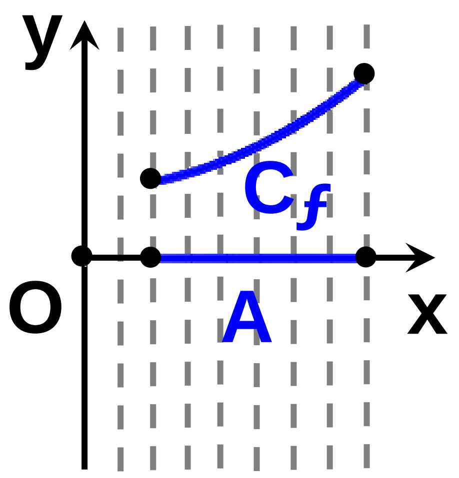
Η εξίσωση (1), που ικανοποιείται από τις συντεταγμένες των σημείων του κύκλου C (O, ρ) και μόνο από αυτές, λέγεται εξίσωση του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα ρ.

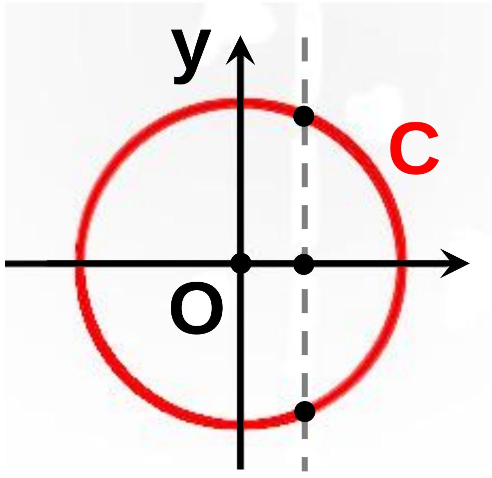
Για παράδειγμα, η εξίσωση του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 1 είναι η $x^2 + y^2 = 1$. Ο κύκλος αυτός λέγεται και μοναδιαίος κύκλος.

Γραφική παρασταση συνάρτησης

Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Οxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων Μ (x, y) για τα οποία ισχύει y = *f*(x), δηλαδή το σύνολο των σημείων Μ (x, *f*(x)), $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της *f* και συμβολίζεται συνήθως με

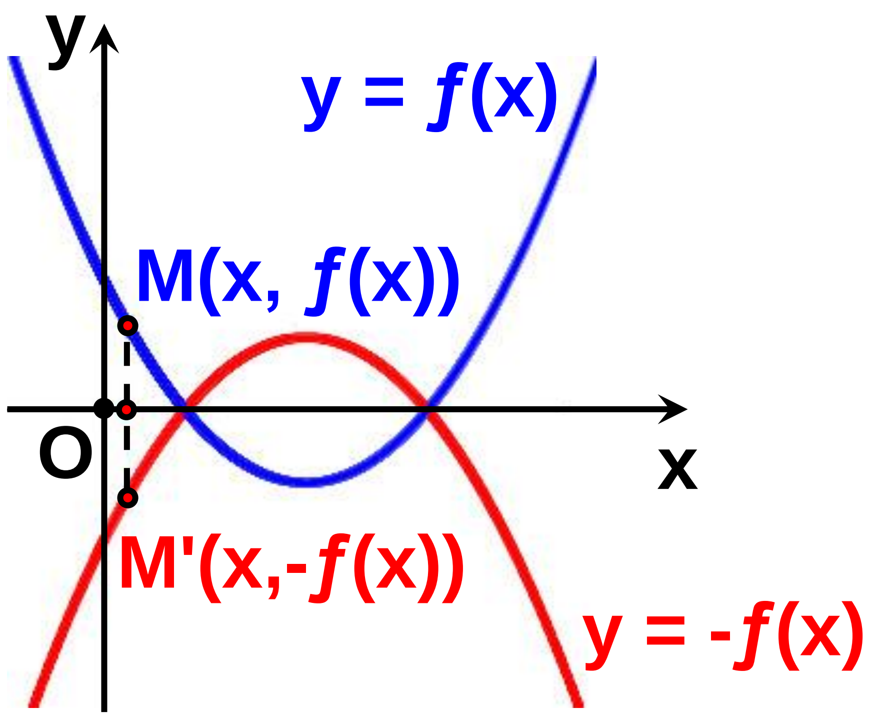
C_f . Η εξίσωση, λοιπόν, y = f(x) επαληθεύεται από τα σημεία της C_f και μόνο από αυτά. Επομένως, η y = f(x) είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f. Για το λόγο αυτό, τη γραφική παράσταση C_f της f τη συμβολίζουμε, πολλές φορές, απλά με την εξίσωσή της, δηλαδή με y = f(x).
Επειδή κάθε x $\in$ A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο y $\in$ R , δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. α'). Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. β').





<u>Σχήμα α'</u> **<u>Σχήμα β'</u>**

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f* μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης -*f*, παίρνοντας τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της *f* ως προς τον άξονα x'x και τούτο διότι η γραφική παράστασης της -*f* αποτελείται από τα σημεία M'(x,-*f*(x)) που είναι συμμετρικά των σημείων M(x, *f*(x)) της γραφικής παράστασης της *f* ως προς τον άξονα x'x .



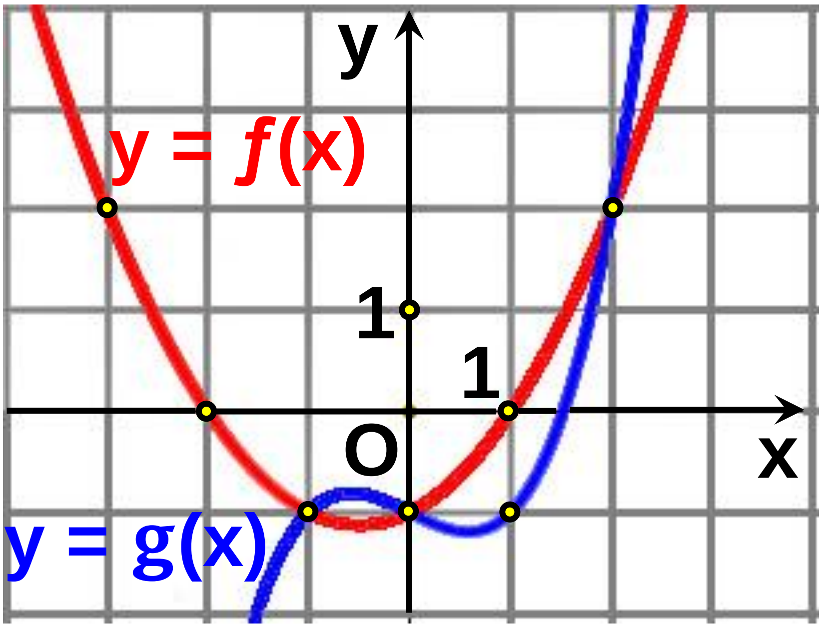
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g , που είναι ορισμένες σε όλο το R.

i) Να βρείτε τις τιμές της f στα σημεία: 3, -2, -1, 0, 1 και 2

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:
$f(x) = 0$, $f(x) = 2$ & $f(x) = g(x)$.

iii)Να λύσετε τις ανισώσεις:
$f(x) > 0$ και $f(x) > g(x)$.



ΛΥΣΗ

i) Είναι:

$f(-3) = 2$, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$,
$f(0) = -1$, $f(1) = 0$ και $f(2) = 2$.

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και του άξονα x'x, δηλαδή οι αριθμοί $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$.

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 2$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που

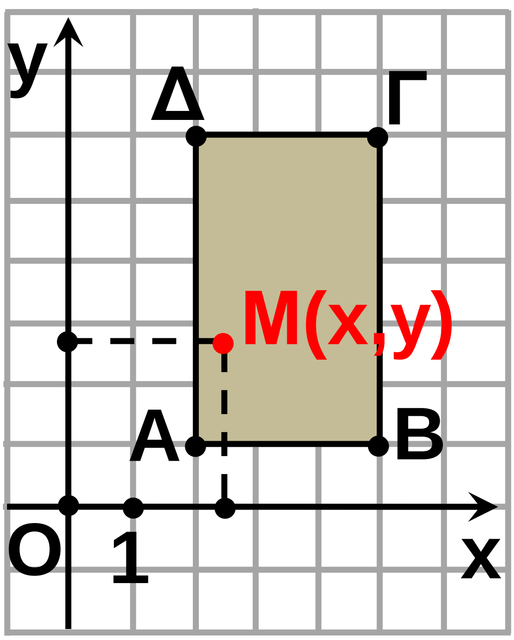
έχουν τεταγμένη 2, δηλαδή οι αριθμοί x_1 = -3 και x_2 = 2 .
Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g , δηλαδή οι αριθμοί x_1 = -1, x_2 = 0 και x_3 = 2 .
iii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x, δηλαδή όλα τα $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.
Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , δηλαδή όλα τα $x \in (-\infty, -1) \cup (0,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία: Α(-1,2), Β(3,4), Ο(0,0), Γ(3,0), Δ(0,-5) και Ε(-2,-3).

2. Ένα σημείο Μ (x,y) κινείται μέσα στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος. Ποιοι περιορισμοί ισχύουν για τα x, y ;



3. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α (-1,3),

i) ως προς τον άξονα x' x

ii) ως προς τον άξονα y' y

iii) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$

iv) ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

4. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:

i) Ο(0,0) και Α(4, -2),

ii) Α(-1,1) και Β(3,4),

iii) Α(-3,-1) και Β(1,-1);

iv) Α(1,-1) και Β(1,4).

5. Να αποδείξετε ότι:

i) Τα σημεία Α(1,2), Β(4,-2) και Γ(-3,5) είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

ii) Τα σημεία Α(1,-1), Β(-1,1) και Γ(4,2) είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

6. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο με κορυφές τα σημεία:
Α(2,5), Β(5,1) , Γ(2,-3) , Δ(-1,1) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αυτό είναι ρόμβος.

7. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την τιμή του k για την οποία το σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

i) $f(x) = x^2 + k$, Μ (2,6)

ii) $g(x) = kx^3$, Μ (-2,8)

iii) $h(x) = k\sqrt{x+1}$, Μ(3,8).

8. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες.

i) $f(x) = x - 4$

ii) $g(x) = (x - 2)(x - 3)$

iii) $h(x) = (x - 1)^2$
iv) $q(x) = x^2 + x + 1$
v) $\varphi(x) = x\sqrt{x - 1}$
vi) $\psi(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$.

9. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$.**
Να βρείτε:

i) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x .

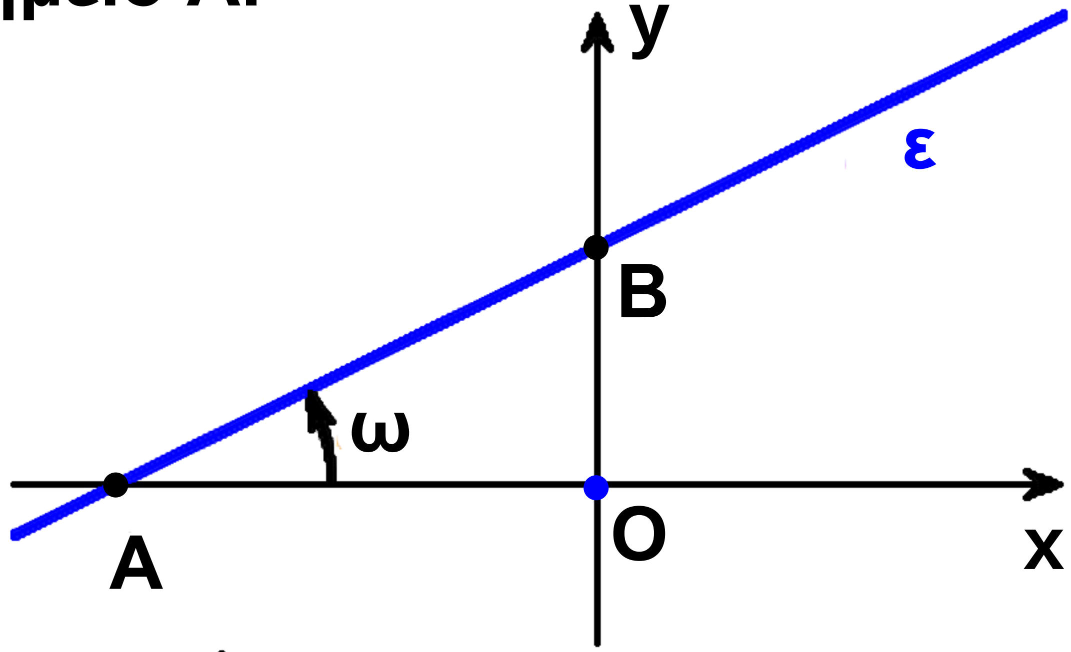
10. **Δίνονται οι συναρτήσεις**
$f(x) = x^2 - 5x + 4$ και $g(x) = 2x - 6$.
Να βρείτε:

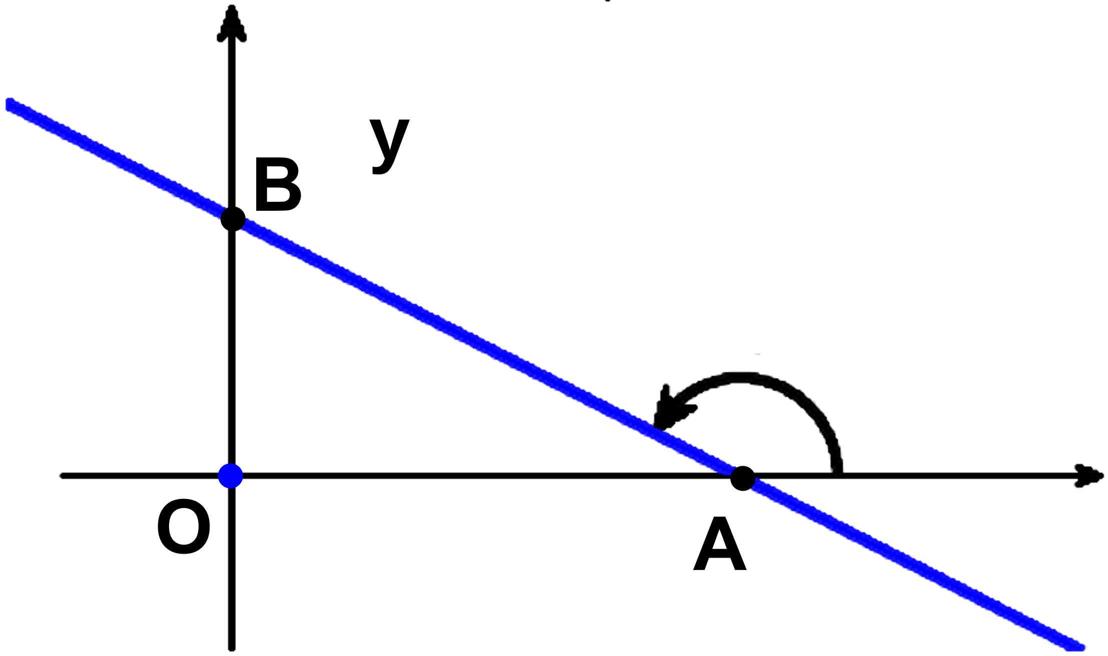
i) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x + \beta$

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Α.





Τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax , όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά[1] μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία ε, τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα x'x** . Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα x 'x ή συμπίπτει με αυτόν, τότε λέμε ότι η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα x 'x γωνία ω = 0°. Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει

$$0° \leq ω \leq 180°.$$

Ως **συντελεστή διεύθυνσης** ή ως **κλίση** μιας ευθείας ε ορίζουμε την

---

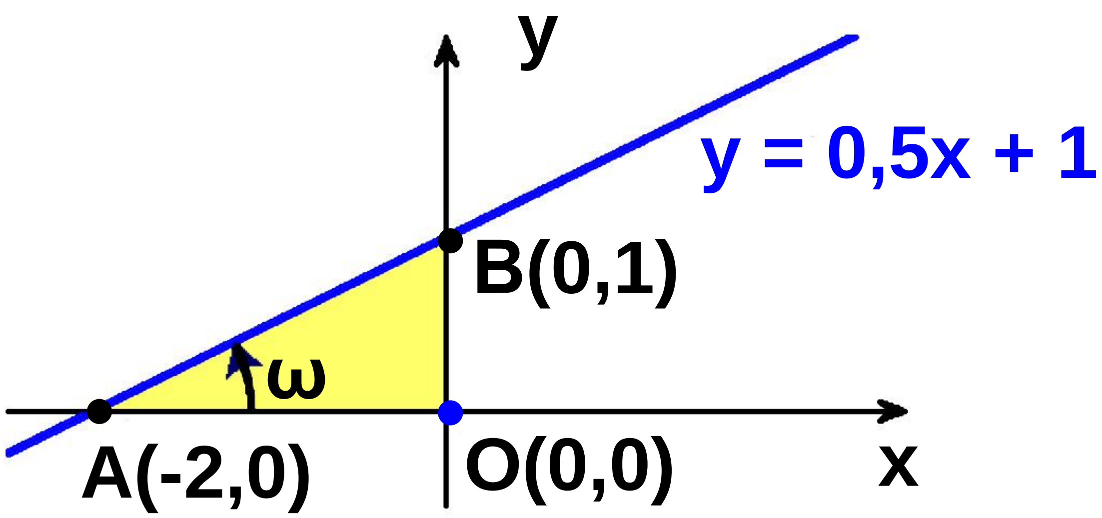
[1] Ως θετική φορά περιστροφής εννοούμε τη φορά κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί ο ημιάξονας Ox για να συμπέσει με τον ημιάξονα Oy, αφού προηγουμένως διαγράψει γωνία 90^0

εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x'x. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε συμβολίζεται συνήθως με $λ_ε$ ή απλά με λ. Είναι φανερό ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι θετικός, αν η γωνία ω είναι οξεία, αρνητικός, αν η γωνία ω είναι αμβλεία και μηδέν, αν η γωνία ω είναι μηδέν. Στην περίπτωση που η γωνία ω είναι ίση με 90°, δηλαδή όταν η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα x'x, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την ε.

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx + β$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 0,5x + 1$. Όπως πρακτικά διαπιστώσαμε στο Γυμνάσιο, η γραφική παράσταση της f είναι

ευθεία γραμμή με εξίσωση
$y = 0{,}5x + 1$ (Σχήμα).



Η ευθεία αυτή:

✓ Τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο A(-2,0), αφού για $y = 0$ βρίσκουμε $x = -2$, και τον άξονα y'y στο σημείο B(0,1), αφού για $x = 0$ βρίσκουμε $y = 1$ και

✓ Έχει κλίση:

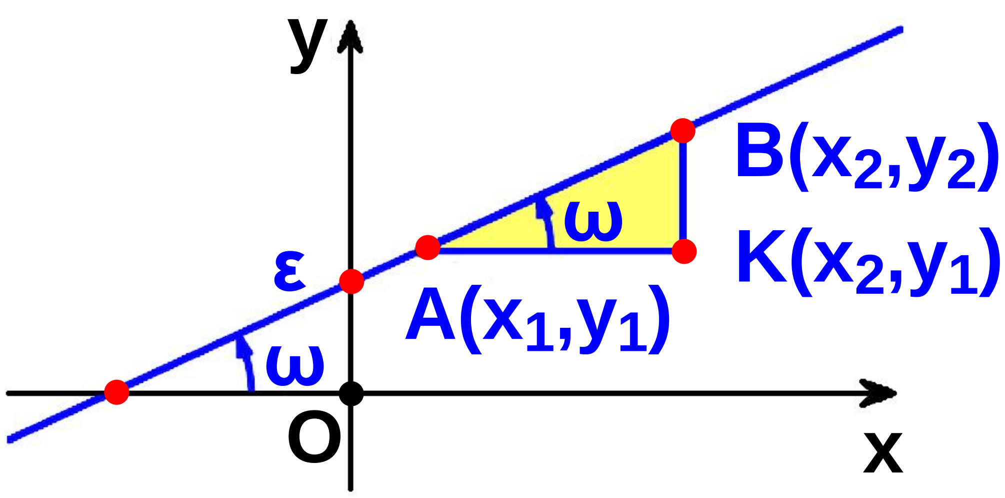
$$\lambda = \varepsilon\varphi\omega = \frac{(OB)}{(OA)} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η κλίση λ της ευθείας $y = 0{,}5x + 1$ είναι ίση με το συντελεστή του x.

Γενικά, όπως θα αποδείξουμε στην Β' Λυκείου, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = αx + β είναι μία ευθεία, με εξίσωση y = αx + β, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Β(0,β) και έχει κλίση λ = α . Είναι φανερό ότι:

- **αν α > 0 , τότε 0° < ω < 90°**
- **αν α < 0, τότε 90° < ω < 180°**
- **αν α = 0 , τότε ω = 0°.**

Στην περίπτωση που είναι α = 0 , η συνάρτηση παίρνει την μορφή f(x) = β και λέγεται σταθερή συνάρτηση, διότι η τιμή της είναι η ίδια για κάθε x ∈ R.
Ας θεωρήσουμε τώρα δύο τυχαία σημεία Α(x_1,y_1) και Β(x_2,y_2) της ευθείας y = αx + β .



Τότε θα ισχύει:

$y_1 = αx + β$ και $y_2 = αx_2 + β$,

οπότε θα έχουμε:

$y_2 - y_1 = (αx_2 + β) - (αx + β) =$

$= α(x_2 - x_1)$.

Επομένως θα είναι:

$$\boxed{α = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

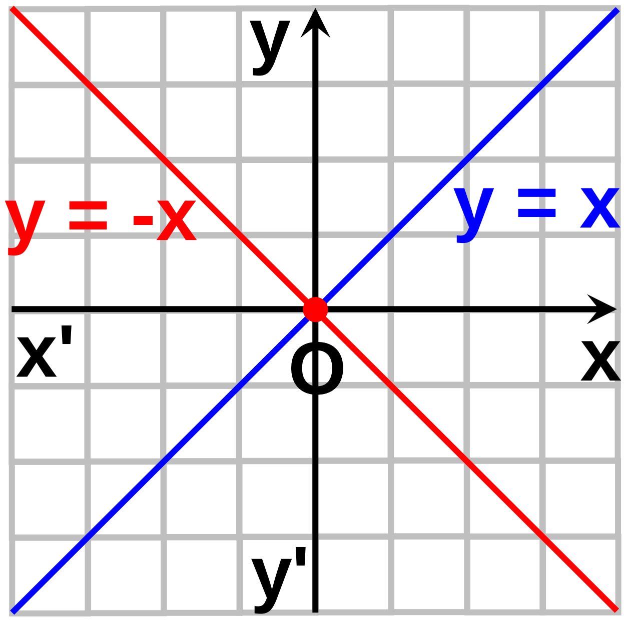
Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(-1,3) και Β(3,6) έχει κλίση $α = \dfrac{6 - 3}{3 - (-1)} = 0,75$.

Επομένως, η ευθεία αυτή σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ω με εφω = 0,75, οπότε θα είναι ω = 36,87°.

Η συνάρτηση *f*(x) = αx

Αν β = 0, τότε η *f* παίρνει τη μορφή *f*(x) = αx , οπότε η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία y = αx και περνάει από την αρχή των αξόνων. Ειδικότερα:

✓ Για α = 1 έχουμε την ευθεία y = x . Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα x'x, ισχύει εφω = α = 1, δηλαδή ω = 45°. Επομένως η ευθεία y = x είναι η διχοτόμος των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y$ των αξόνων.



✓ Για α = -1 έχουμε την ευθεία y = -x . Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα x'x, ισχύει εφω = α = -1, δηλαδή ω = 135^{o}. Επομένως η ευθεία y = -x είναι η διχοτόμος των γωνιών $\widehat{yOx'}$ και $\widehat{y'Ox}$ των αξόνων.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ με εξισώσεις $y = α_1x + β_1$ και $y = α_2x + β_2$ αντιστοίχως και ας

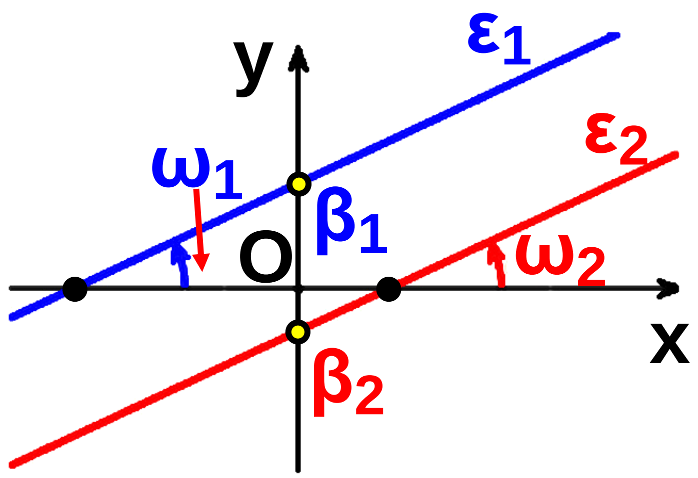
υποθέσουμε ότι οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με τον άξονα x'x γωνίες $ω_1$ και $ω_2$ αντιστοίχως.

• Αν $α_1 = α_2$, τότε $εφω_1 = εφω_2$, οπότε $ω_1 = ω_2$ και άρα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. Ειδικότερα :

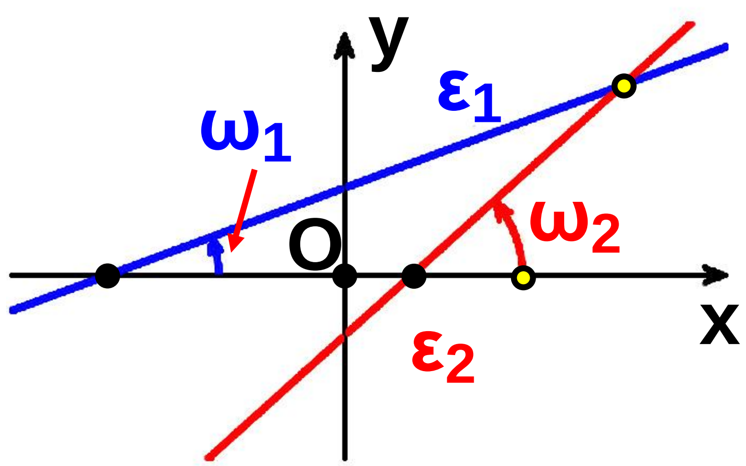
✓ Αν $α_1 = α_2$ και $β_1 \neq β_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες (Σχ. α'), ενώ

✓ Αν $α_1 = α_2$ και $β_1 = β_2$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται.

• Αν $α_1 \neq α_2$, τότε $εφω_1 \neq εφω_2$, οπότε $ω_1 \neq ω_2$ και άρα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται. (Σχ. β')



Σχήμα α



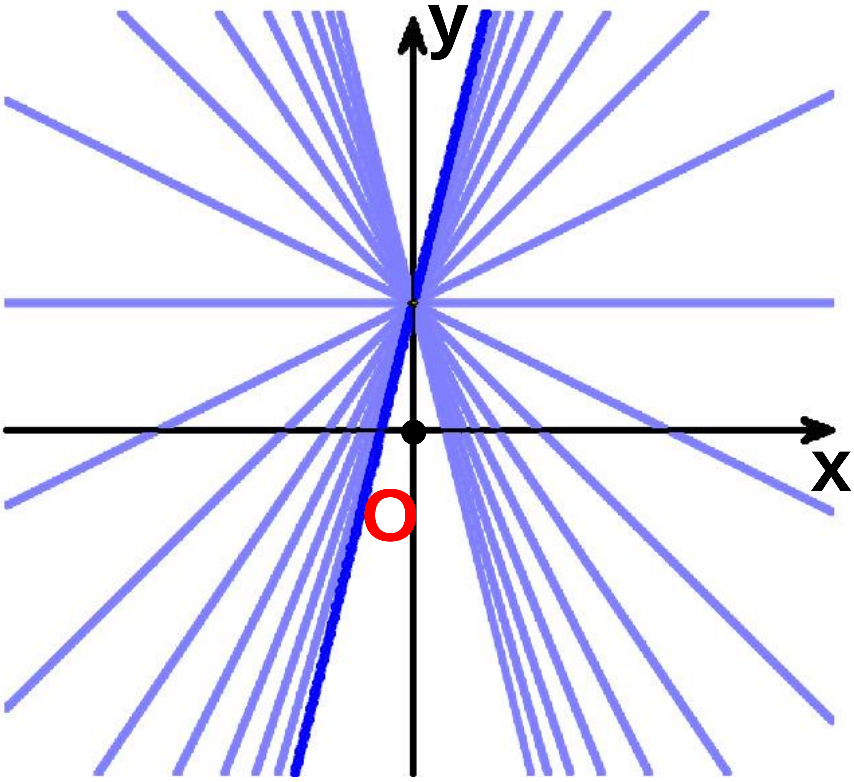
Σχήμα β

Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεράσματα:

- **Οι ευθείες της μορφής y = αx +1, με α∈R, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες: y = x +1, y = - x + 1,**

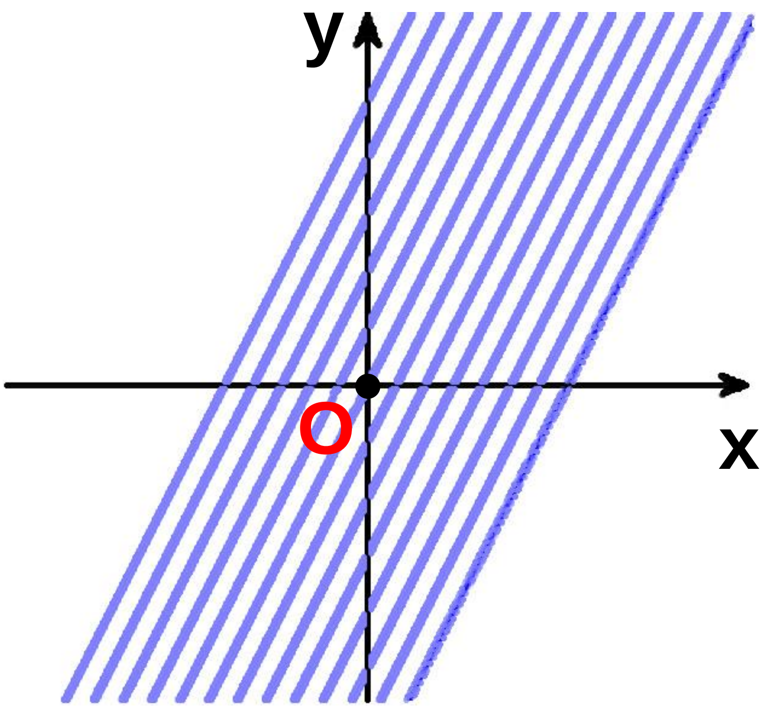
y = 2x + 1 κτλ., διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο, το σημείο 1 του άξονα y' y

Γενικά, οι ευθείες της μορφής y = αx + β, όπου β σταθερό και α μεταβλητό διέρχονται όλες από το σημείο β του άξονα y'y.



- **Οι ευθείες της μορφής y = 2x + β , β∈R, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες: y = 2x, y = 2x - 1, y = 2x + 3 κτλ., είναι παράλληλες μεταξύ τους, αφού έχουν όλες κλίση α = 2**

Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + \beta$, όπου α σταθερό και β μεταβλητό, είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους.



Η συνάρτηση $f(x) = |x|$

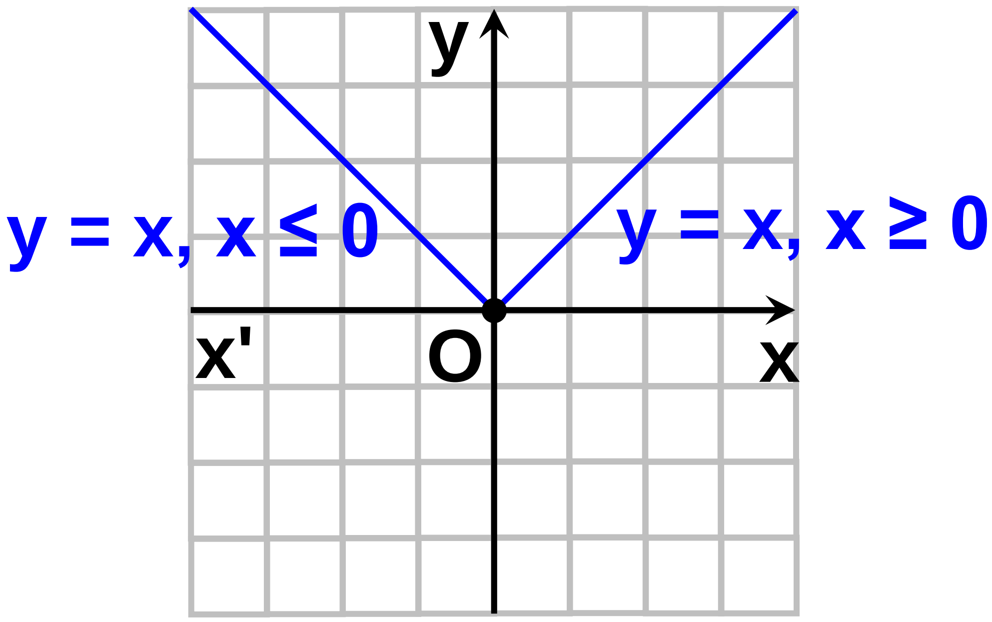
Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$ αποτελείται από τις δύο ημιευθείες:

- ✓ **$y = -x$, με $x \leq 0$ και**
- ✓ **$y = x$, με $x \leq 0$**

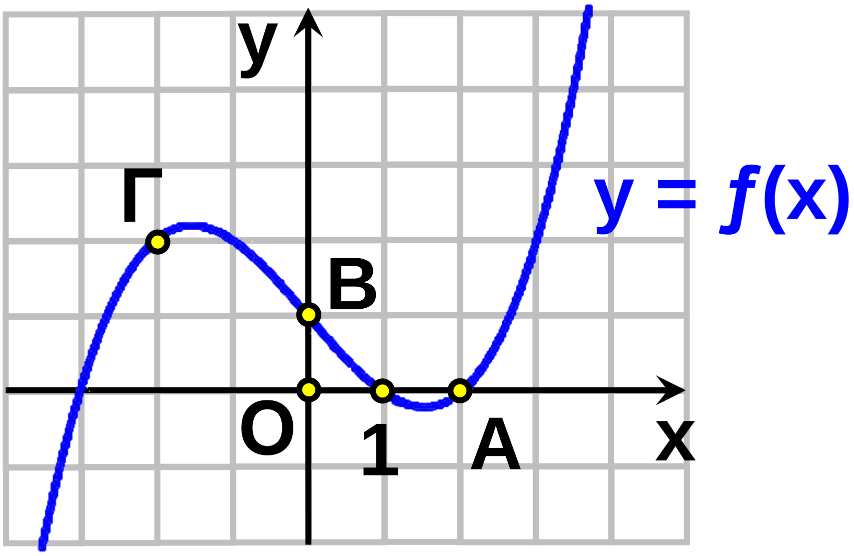
που διχοτομούν τις γωνίες $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ αντιστοίχως.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας

συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το R.
i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ευθεία αυτή διέρχεται και από το σημείο Γ.
ii) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) > -0{,}5 \cdot x + 1$.



ΛΥΣΗ

i) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση της μορφής y = αx + β και επειδή διέρχεται από τα σημεία Α (2,0) και Β (0,1) θα ισχύει:

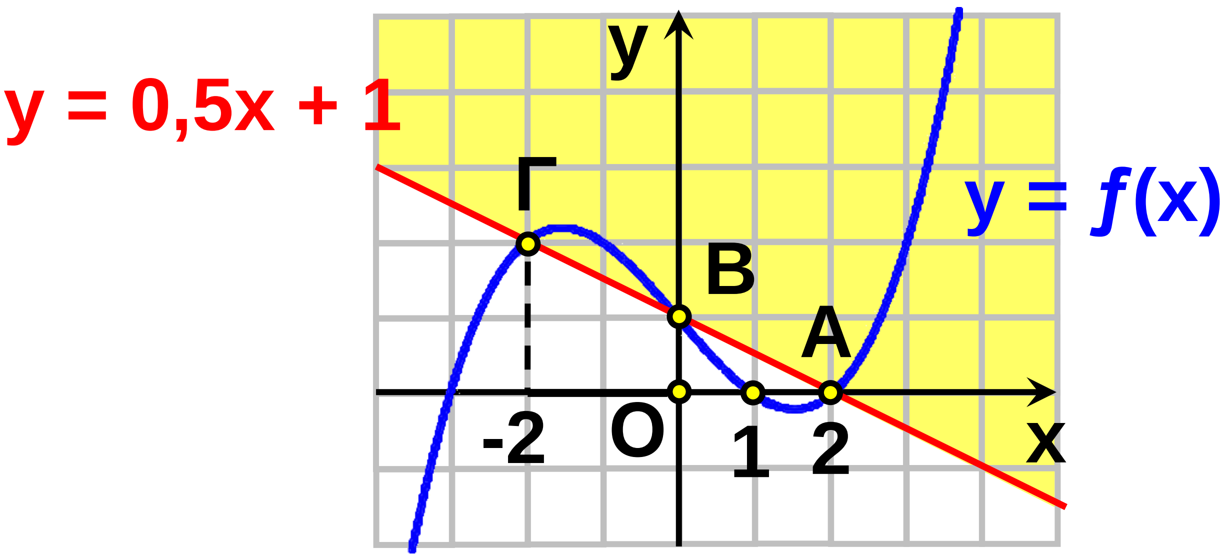
0 = α • 2 + β και 1 = α • 0 + β, οπότε θα έχουμε:

α = -0,5 και β = 1

Άρα η εξίσωση της ΑΒ είναι:

y = -0,5 • x + 1.

Για να δείξουμε τώρα ότι το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ, αρκεί να δείξουμε ότι το ζεύγος (-2,2) των συντεταγμένων του επαληθεύει την εξίσωση αυτής, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι 2 = -0,5 • (-2) + 1, που ισχύει.



ii) Οι λύσεις της ανίσωσης *f*(x) > -0,5 • x + 1 είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = -0,5 \cdot x + 1$, δηλαδή πάνω από την ευθεία ΑΒ. Επομένως, η ανίσωση αυτή αληθεύει για $x \in (-2,0) \cup (2, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x' x η ευθεία:

i) $y = x + 2$ ii) $y = \sqrt{3}x - 1$

iii) $y = -x + 1$ iv) $y = -\sqrt{3}x + 2$.

2. Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

i) Α(1,2) και Β(2,3)

ii) Α(1,2) και Β(2,1)

iii) Α(2,1) και Β(-1,1)

iv) Α(1,3) και Β(2,1).

3. **Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:**

i) Έχει κλίση $α = -1$ και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Β(0,2).

ii) Σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $ω = 45°$ και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Β(0,1).

iii) Είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x - 3$ και διέρχεται από το σημείο Α (1,1).

4. **Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:**

i) Α(1,2) και Β(2,3)
ii) Α(1,2) και Β(2,1)
iii) Α(2,1) και Β(-1,1)
iv) Α(1,3) και Β(2,1).

5. **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας C σε**

βαθμούς Celsius και της θερμοκρασίας F σε βαθμούς Fahrenheit είναι η

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Γνωρίζουμε ότι το νερό παγώνει σε 0^oC ή 32^oF και βράζει σε 100^oC ή 212^oF.
Υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται και στις δύο κλίμακες με τον ίδιο αριθμό;

6. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

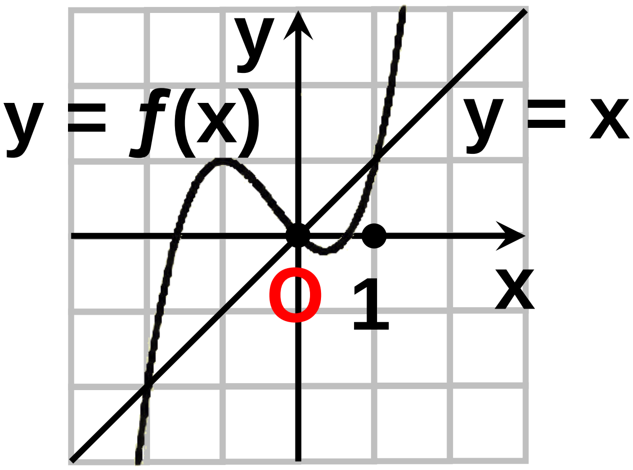
$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν} \quad x < 0 \\ 2, & \text{αν} \quad 0 \leq x < 1 \\ x + 1, & \text{αν} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

7. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f* που είναι ορισμένη σε όλο το R και η ευθεία y = x.

Να λύσετε γραφικά:

i) Τις εξισώσεις:
$f(x) = 1$ και $f(x) = x$.

ii) Τις ανισώσεις:
$f(x) < 1$ και $f(x) \geq x$.



8. i) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x| \text{ και } g(x) = 1$$

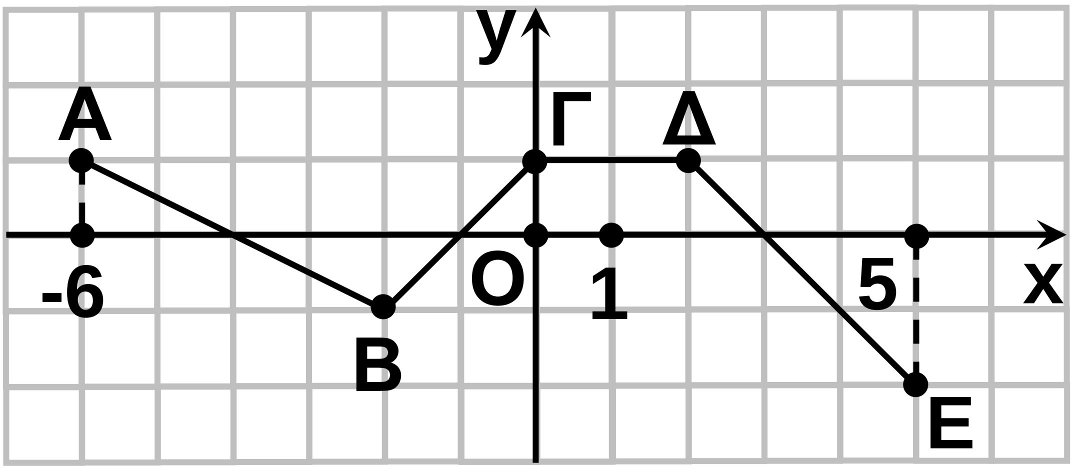
και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις:

$$|x| \leq 1 \text{ και } |x| > 1.$$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

<u>Β΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕ του παρακάτω σχήματος είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f* που είναι ορισμένη στο διάστημα [-6,5].



i) Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης *f* σε κάθε ακέραιο $x \in [-6,5]$.

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x) = 0$, $f(x) = -1$ και $f(x) = 1$

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΔ και στη συνέχεια να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < 0,5 \cdot x$.

2. **Μια φωτεινή ακτίνα κινείται κατά μήκος της ευθείας y = 1 - x και ανακλάται στον άξονα x'x. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας κατά μήκος της οποίας κινείται η ανακλώμενη ακτίνα.**

3. **Σε μια δεξαμενή υπάρχουν 600 λίτρα βενζίνης. Ένα βυτιοφόρο που περιέχει 2000 λίτρα βενζίνης αρχίζει να γεμίζει τη δεξαμενή. Αν η παροχή του βυτιοφόρου είναι 100 λίτρα το λεπτό και η δεξαμενή χωράει όλη τη βενζίνη του βυτιοφόρου:**

i) Να βρείτε τις συναρτήσεις που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου t, την ποσότητα της βενζίνης:

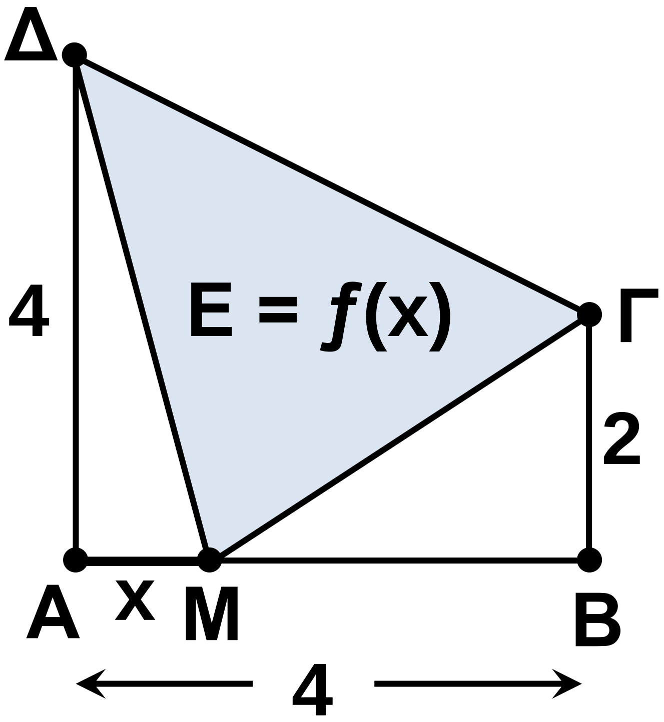
α) στο βυτιοφόρο και

β) στη δεξαμενή.

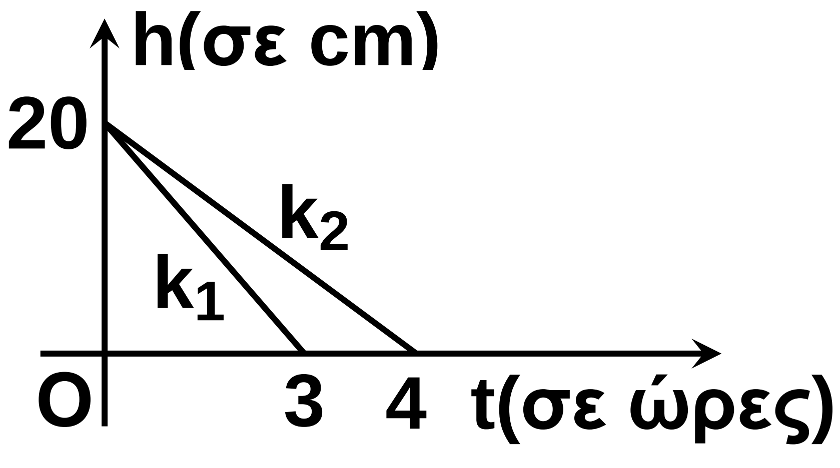
ii) Να παραστήσετε γραφικά τις παραπάνω συναρτήσεις και να

βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το βυτιοφόρο και η δεξαμενή έχουν την ίδια ποσότητα βενζίνης.

4. Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από το Α προς το Β. Συμβολίζουμε με x το μήκος της διαδρομής ΑΜ του σημείου Μ και με $f(x)$ το εμβαδό του τριγώνου $\overset{\triangle}{\text{ΜΓΔ}}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης Ε = $f(x)$ και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.



5. **Δύο κεριά K_1 και K_2, ύψους 20cm το καθένα, άρχισαν να καίγονται την ίδια χρονική στιγμή και το πρώτο κερί κάηκε σε 3 ώρες, ενώ το δεύτερο κάηκε σε 4 ώρες. Τα ύψη των κεριών K_1 και K_2, συναρτήσει του χρόνου t, κατά το χρονικό διάστημα που καθένα από αυτά καιγόταν, παριστάνονται με τα ευθύγραμμα τμήματα k_1 και k_2 του παρακάτω σχήματος.**



i) Να βρείτε τις συναρτήσεις $h = h_1(t)$ και $h = h_2(t)$ που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου

t, τα ύψη των κεριών K_1 και K_2 αντιστοίχως.

ii) Να βρείτε πότε το κερί K_2 είχε διπλάσιο ύψος από το κερί K_1.

iii) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα και στη γενική περίπτωση που το αρχικό ύψος των κεριών ήταν ίσο με υ. Τι παρατηρείτε;

6.4 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

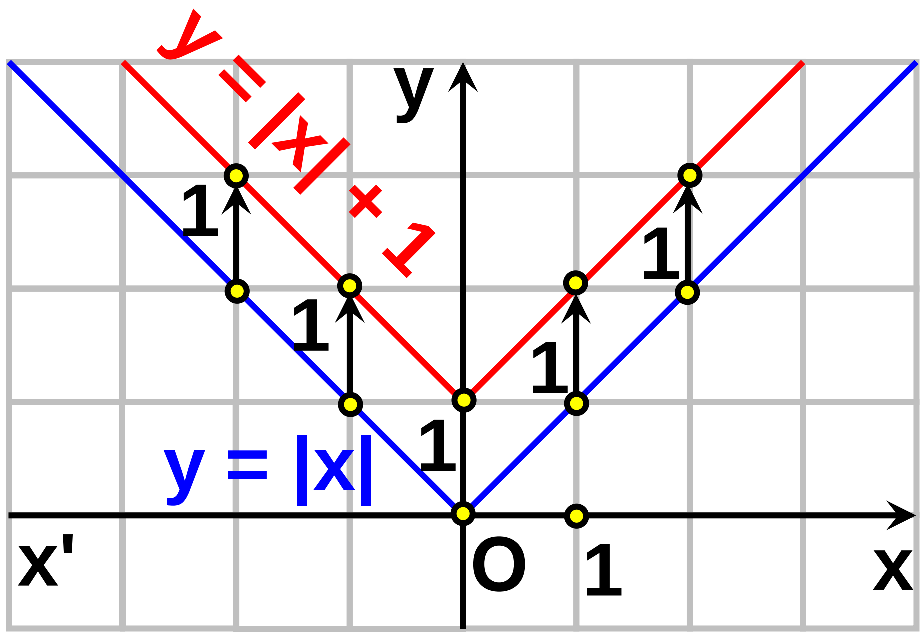
α) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = |x| + 1$. Επειδή

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{αν} \quad x < 0 \\ x + 1, & \text{αν} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

η γραφική παράσταση της συ-
νάρτησης $f(x) = |x| + 1$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y = -x + 1$, με $x \leq 0$ και

✓ $y = x + 1$, με $x \geq 0$, που έχουν αρχή το σημείο 1 του άξονα $y'y$ και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες, όπως είναι γνωστό, αποτελείται η γραφική παράσταση της $φ(x) = |x|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $φ(x) = |x|$

κατακόρυφα[1] και προς τα πάνω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x) = |x| +1$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει:

$f(x) = φ(x) + 1$, για κάθε $x \in R$,

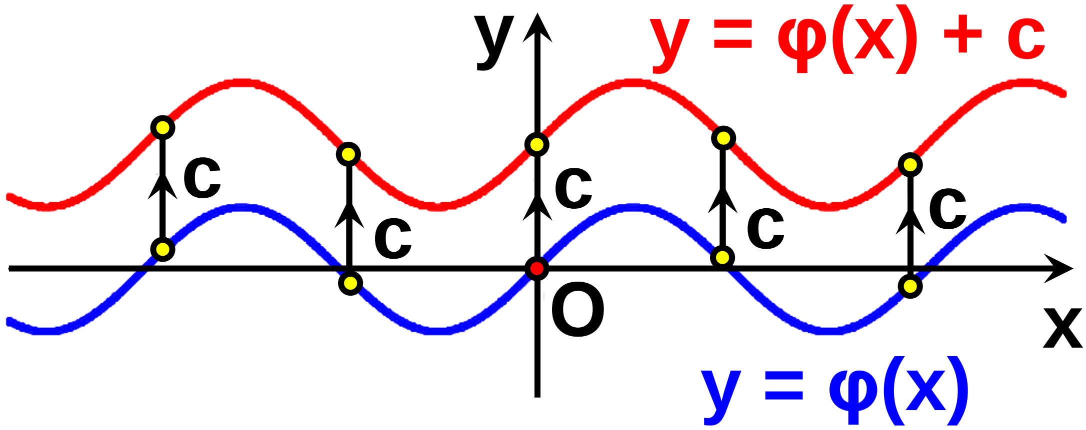
που σημαίνει ότι για κάθε $x \in R$ το $f(x)$ είναι κατά 1 μονάδα μεγαλύτερο του $φ(x)$.

Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:
$f(x) = φ(x) + c$, όπου $c > 0$,
προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω (Σχήμα α')

---

[1] Δηλαδή παράλληλα με τον άξονα y'y



<u>**Σχήμα α'**</u>

β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = |x| - 1$. Επειδή

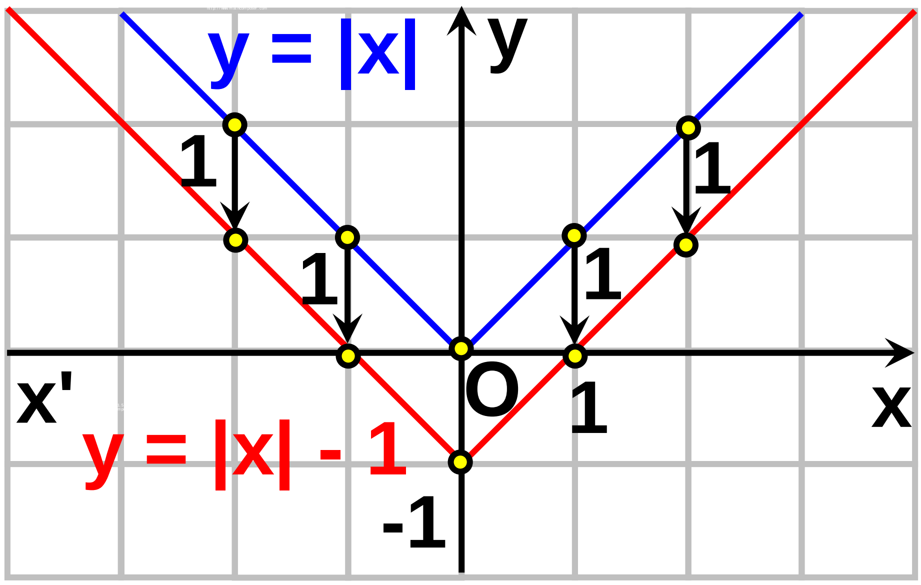
$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{αν } x < 0 \\ x - 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| - 1$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ y = -x - 1, με x < 0 και

✓ y = x - 1, με x > 0, που έχουν αρχή το σημείο -1 του άξονα y' y και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες αποτελείται η

γραφική παράσταση της φ(x) = |x| (Σχήμα).

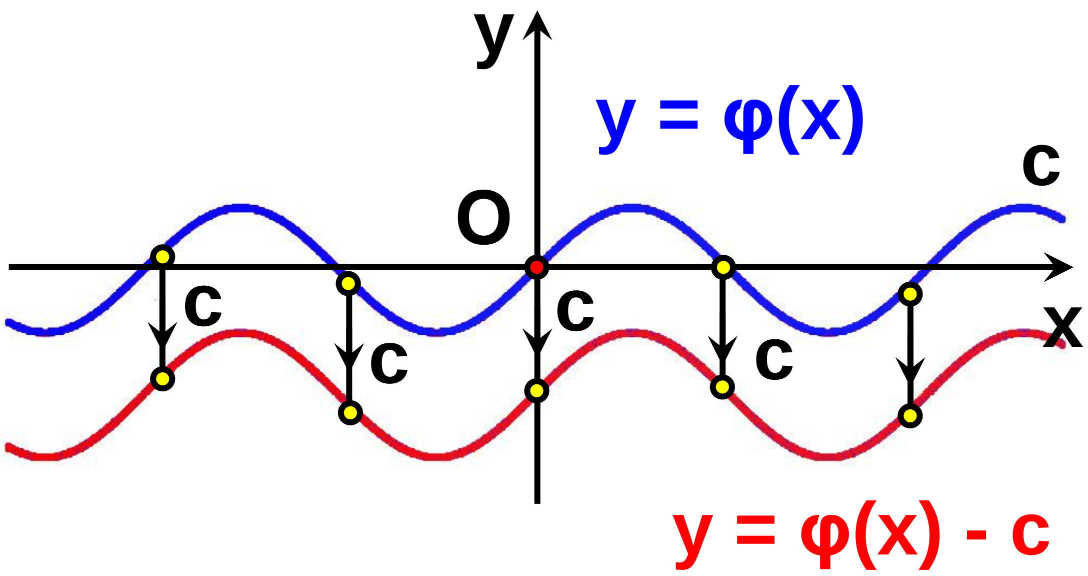


Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της φ(x) = |x| κατακόρυφα και προς τα κάτω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της *f*(x) = = |x| - 1. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει :

f(x) = φ(x) - 1, για κάθε x ∈ R,

που σημαίνει ότι για κάθε x∈R το *f*(x) είναι κατά 1 μονάδα μικρότερο του φ(x). Γενικά:

**Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:
$f(x) = φ(x) - c$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα κάτω (Σχήμα β')**



<u>Σχήμα β'</u>

Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

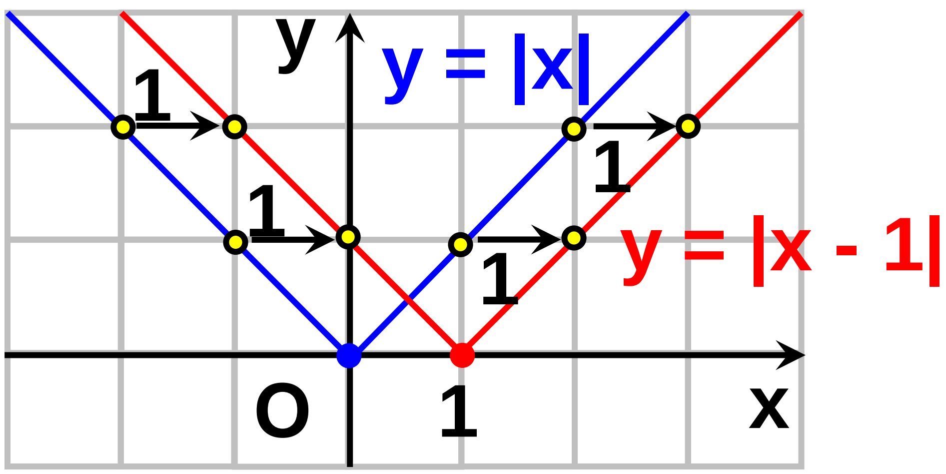
α) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = |x - 1|$. Επειδή

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{αν } x < 1 \\ x - 1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

η γραφική παράσταση της $f(x) = |x - 1|$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y = -x + 1$, με $x < 1$ και

✓ $y = x - 1$, με $x > 1$, που έχουν αρχή το σημείο 1 του άξονα x'x και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $φ(x) = |x|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $φ(x) = |x|$

οριζόντια[2] και προς τα δεξιά κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x) = |x - 1|$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει $f(x) = \varphi(x - 1)$, για κάθε $x \in R$, που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x) = |x - 1|$ στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της $\varphi(x) = |x|$ στη θέση x - 1.

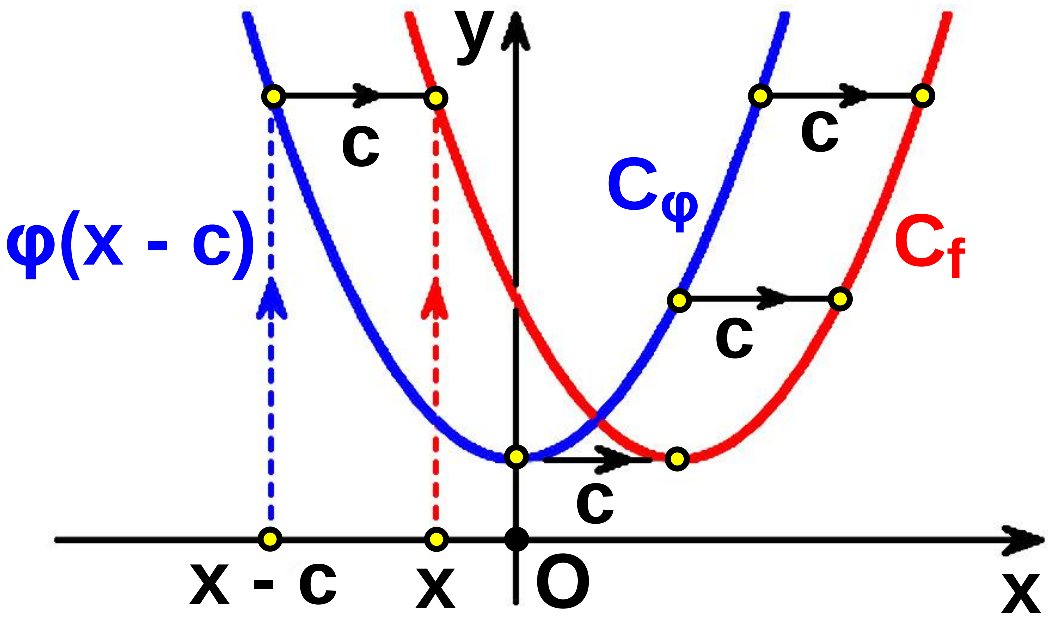
Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με: $f(x) = \varphi(x - c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά (Σχήμα γ').

---

[2] Δηλαδή παράλληλα με τον άξονα x'x .

Πράγματι επειδή $f(x) = φ(x - c)$, η τιμή της f στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της φ στη θέση x - c, που βρίσκεται c μονάδες αριστερότερα της θέσης x. Άρα, η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της γραφικής παράστασης της φ (Σχήμα γ').



<u>Σχήμα γ'</u>

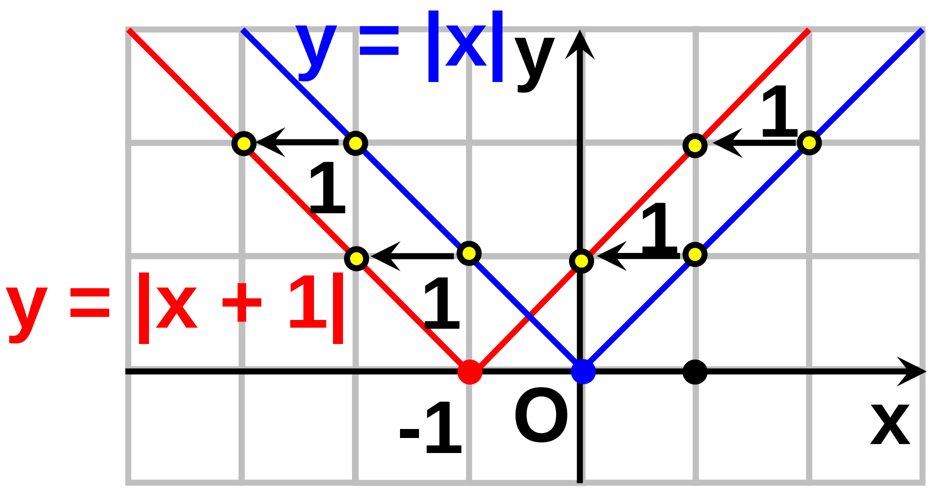
β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = |x + 1|$. Επειδή

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{αν } x < 1 \\ x + 1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

η γραφική παράσταση της
$f(x) = |x + 1|$, θα αποτελείται
από τις ημιευθείες

✓ $y = -x - 1$, με $x < -1$ και

✓ $y = x + 1$, με $x > -1$, που έχουν
αρχή το σημείο -1 του άξονα x' x και
είναι παράλληλες με τις διχοτόμους
των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις
οποίες αποτελείται η γραφική
παράσταση της $φ(x) = |x|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη
γραφική παράσταση της $φ(x) = |x|$
οριζόντια και προς τα αριστερά
κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα

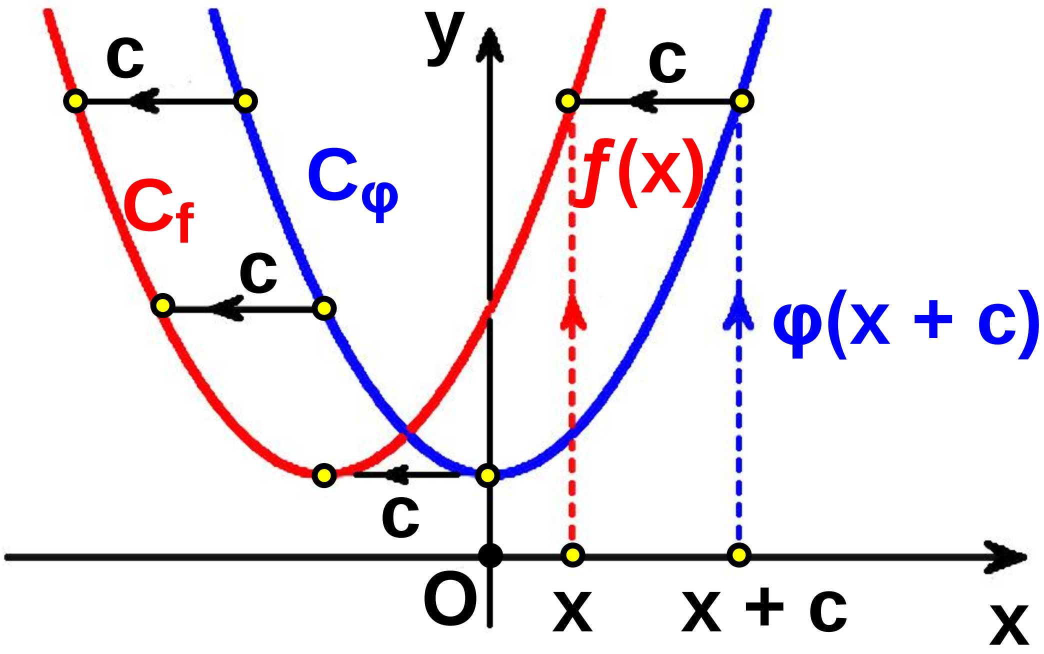
συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x) = |x + 1|$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει

$f(x) = φ(x + 1)$, για κάθε $x \in R$,

που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x) = |x + 1|$ στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της $φ(x) = |x|$ στη θέση $x + 1$. Γενικά:

> Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:
> $f(x) = φ(x + c)$, όπου $c > 0$,
> προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά** (Σχήμα δ').

Πράγματι· επειδή $f(x) = φ(x + c)$, η τιμή της f στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της φ στη θέση $x + c$, που βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της θέσης x. Άρα, η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται c μονάδες αριστερότερα της γραφικής παράστασης της φ (Σχήμα δ').



Σχήμα δ'

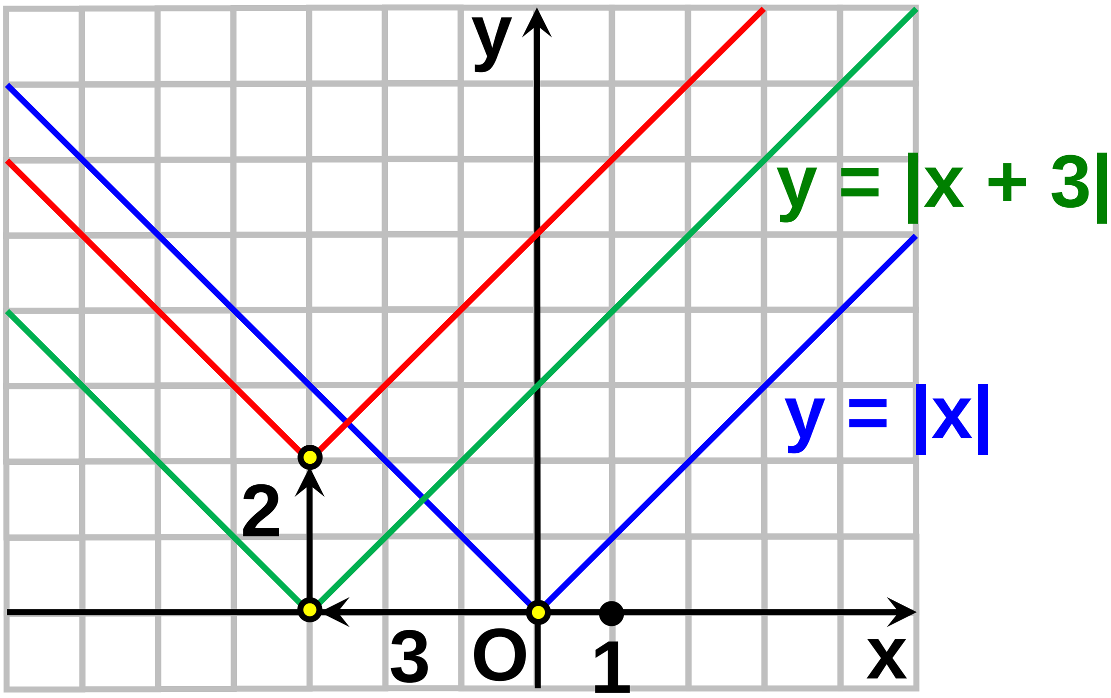
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να παραστεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = |x + 3| + 2$:

ΛΥΣΗ

Αρχικά χαράσσουμε την $y = |x + 3|$, που όπως είδαμε προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$

κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = |x + 3| + 2$,που όπως είδαμε προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y = |x + 3|$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.



Επομένως, η γραφική παράσταση της $f(x) = |x + 3| + 2$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της συνάρτησης $y = |x|$, μιας οριζόντιας

κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω (Σχήμα).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:
Με ανάλογο τρόπο, δουλεύουμε για να παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις της μορφής:
$f(x) = \varphi(x \pm c) \pm d$, **με** $c, d > 0$
Δηλαδή, αξιοποιούμε τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$\varphi(x) = |x|$, $f(x) = |x| + 2$ **και** $g(x) = |x| - 2$.

2. Ομοίως για τις συναρτήσεις

$\varphi(x) = |x|$, $h(x) = |x + 2|$ και $g(x) = |x - 2|$.

3. Ομοίως για τις συναρτήσεις

$\varphi(x) = |x|$, $F(x) = |x + 2| + 1$ και $g(x) = |x - 2| - 1$.

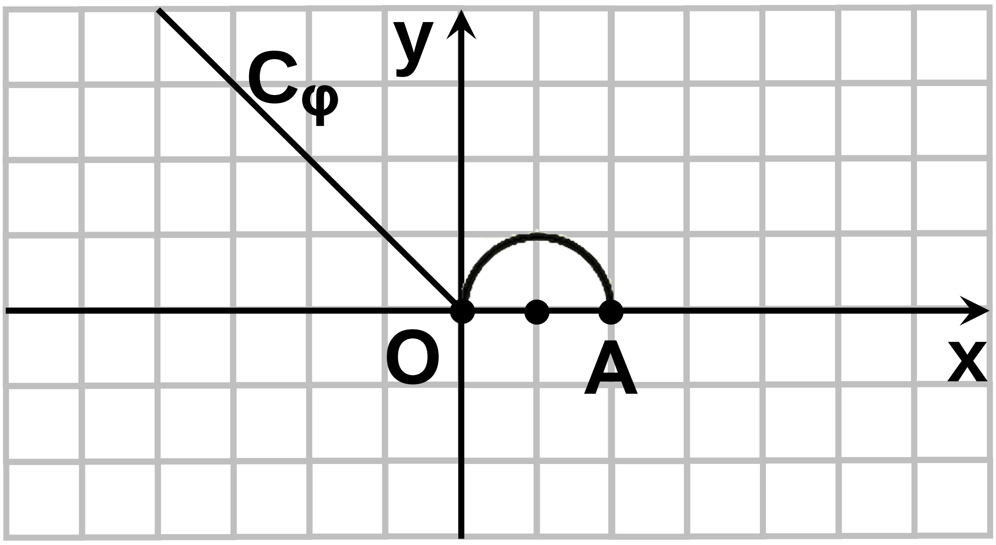
4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ που αποτελείται από την διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων και από το ημικύκλιο που ανήκει στο 1^{ο} τεταρτημόριο και έχει διάμετρο που ορίζουν τα σημεία Ο(0,0) και Α(2,0).

Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = \varphi(x) + 2$ και $g(x) = \varphi(x) - 2$

ii) $h(x) = \varphi(x + 3)$ και $q(x) = \varphi(x - 3)$

iii) $F(x) = \varphi(x + 3) + 2$
και $G(x) = \varphi(x - 3) - 2$.



5. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = 2x^2 - 1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ:

i) κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

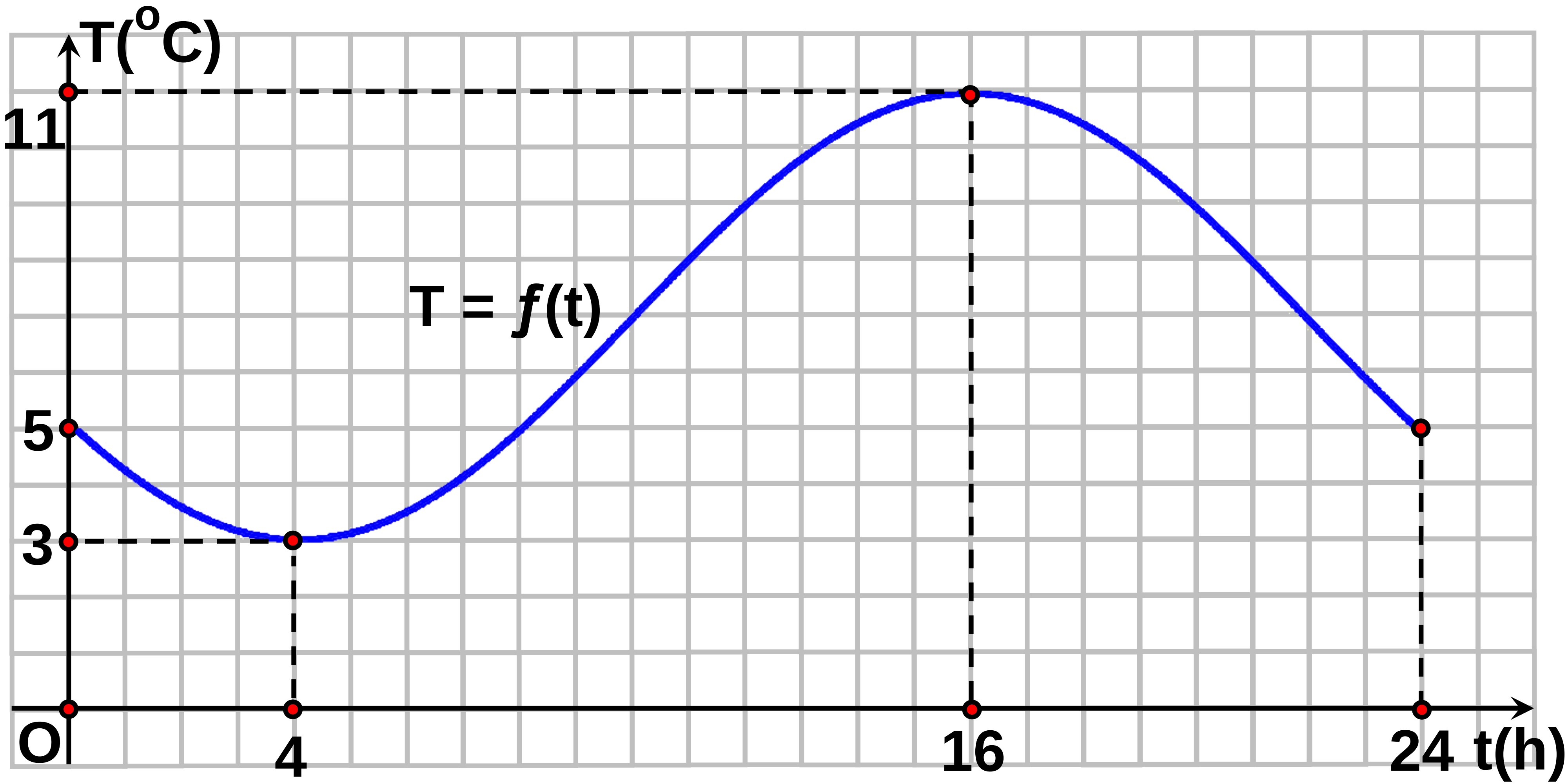
ii) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

iii) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 1 μονάδες προς τα πάνω.
iv) κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

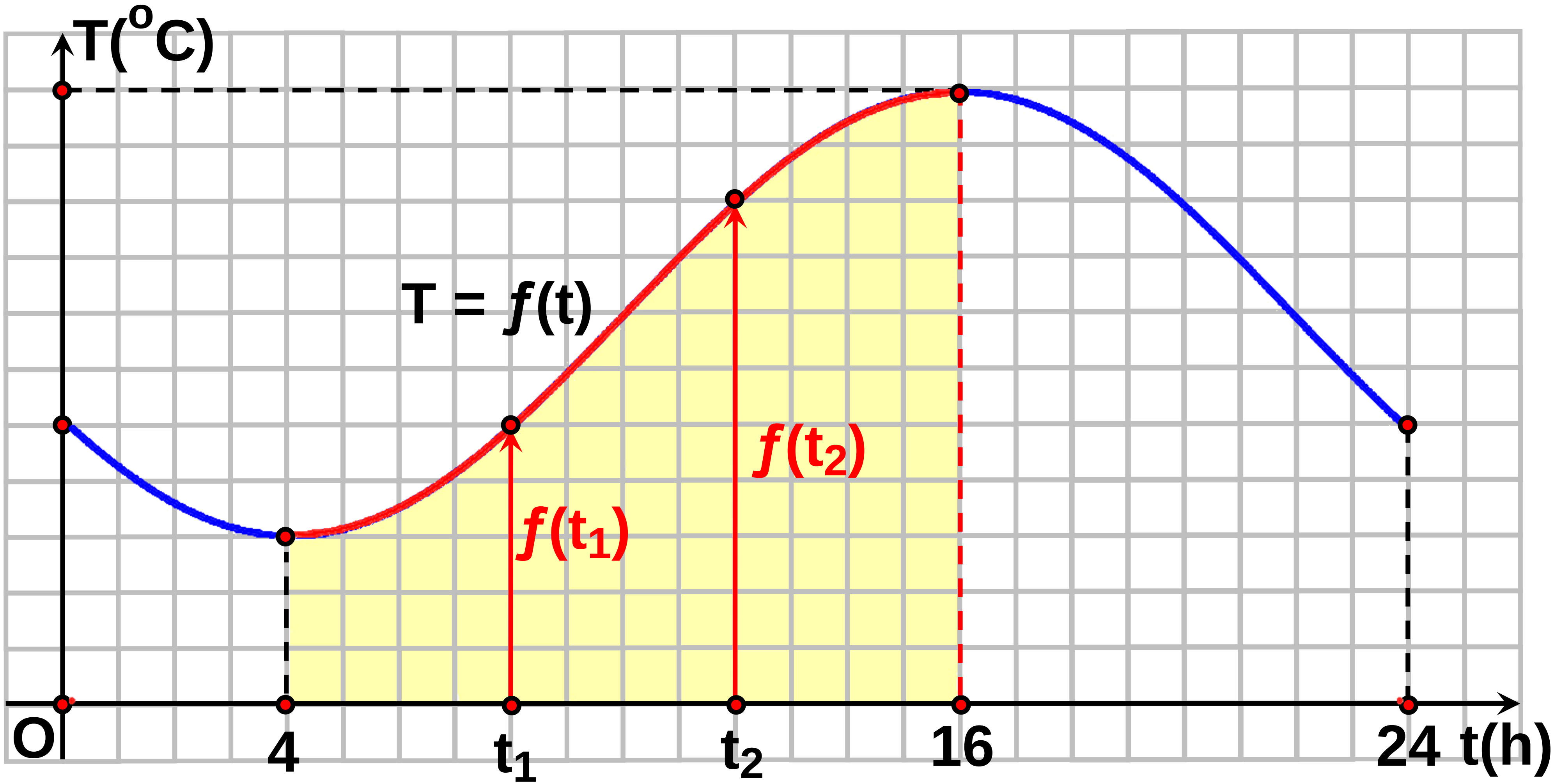
6.5 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μονοτονιά συνάρτησης

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$ που εκφράζει τη θερμοκρασία T ενός τόπου συναρτήσει του χρόνου t κατά το χρονικό διάστημα από τα μεσάνυχτα μιας ημέρας ($t = 0$) μέχρι τα μεσάνυχτα της επόμενης μέρας ($t = 24$).



α) Παρατηρούμε ότι στο διάστημα [4,16] η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας ανέρχεται.



T(°C)
T = f(t)
f(t₁)
f(t₂)
O
4
t₁
t₂
16
24
t(h)

Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία αυξάνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε t_1, $t_2 \in [4,16]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) < f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [4,16].

Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

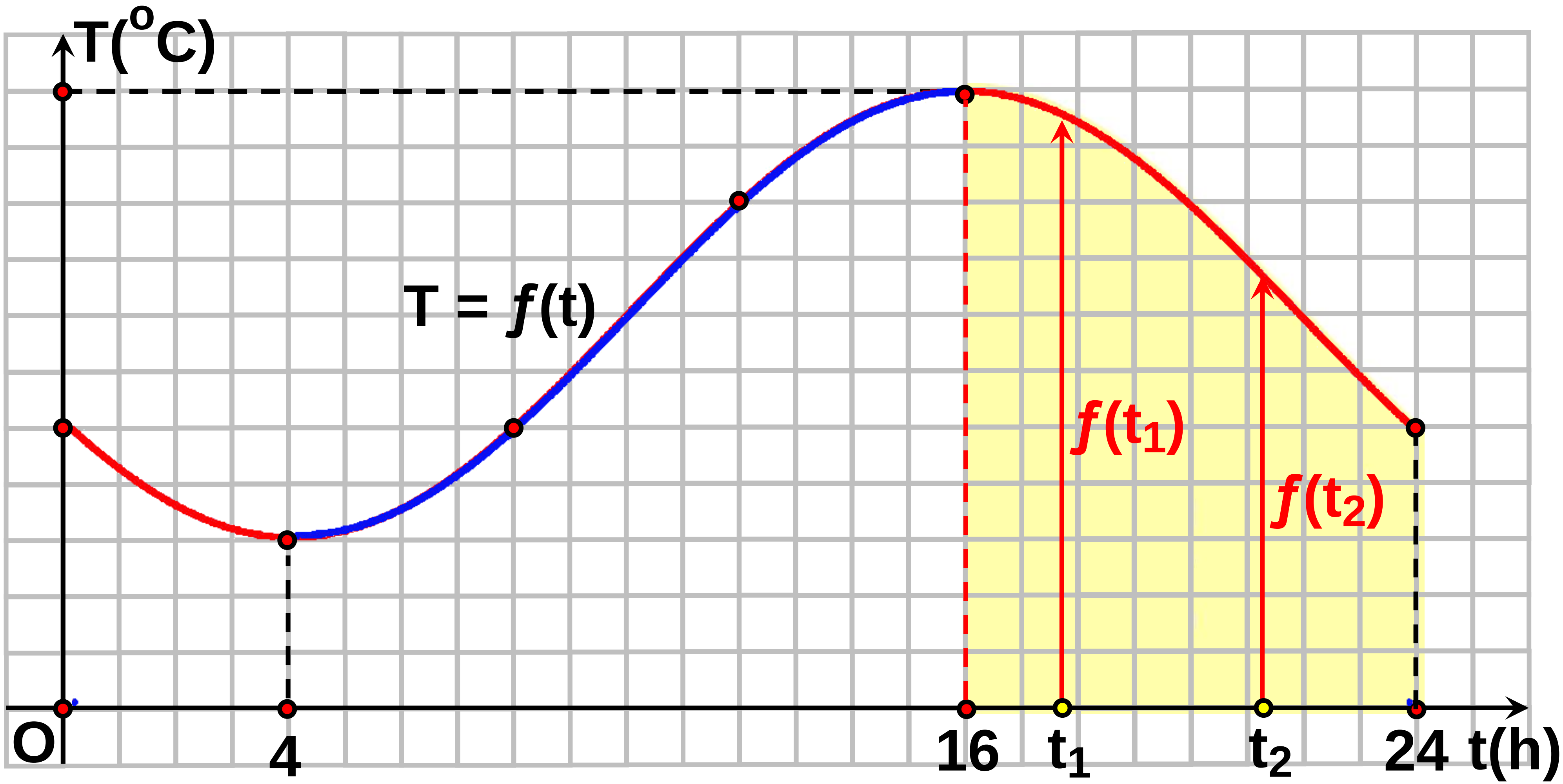
Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \uparrow \Delta$.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R . Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \\ &\Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Γενικά:
Η συνάρτηση $f(x) = x + β$, με $α > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.
β) Στο ίδιο σχήμα, παρατηρούμε επιπλέον ότι στο διάστημα [16,24] η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας κατέρχεται.


T(°C)
T = f(t)
f(t1)
f(t2)
O
4
16
t1
t2
24
t(h)

Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία μειώνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε t_1, $t_2 \in [16,24]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) > f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [16,24].

Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(t_1) > f(t_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \downarrow \Delta$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -2x + 5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Πράγματι· έστω $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \\ &\Rightarrow -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

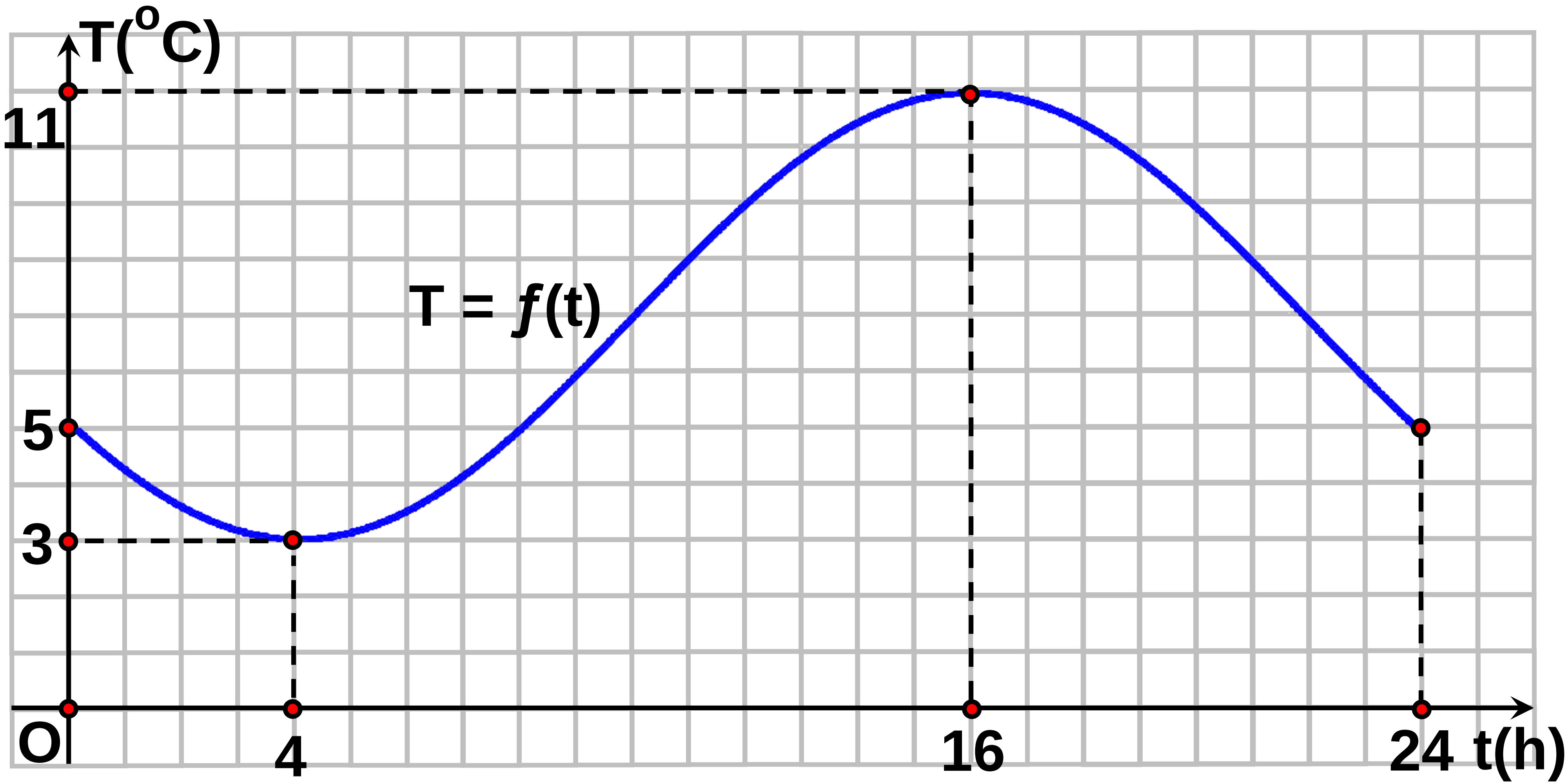
Γενικά:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται γνησίως μονότονη στο Δ.

Ελάχιστο και μέγιστο συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε και πάλι τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$.


T(°C)
11
5
3
O
4
16
24 t(h)
T = f(t)

Παρατηρούμε ότι:

α) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει την ελάχιστη τιμή της, που είναι η $f(4) = 3$ βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$f(t) \geq f(4) = 3$, για κάθε $t \in [0,24]$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 4$ ελάχιστο, το $f(4) = 3$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in$ Α (ολικό) ελάχιστο όταν:

$$f(x) > f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

Το $x_0 \in$ Α λέγεται θέση ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο ή απλώς ελάχιστο της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με min $f(x)$.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 1$. Επειδή

$$x^4 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in R,$$

θα είναι

$$3x^4 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in R,$$

οπότε θα έχουμε

$$3x^4 + 1 \geq 1, \text{ για κάθε } x \in R.$$

Επομένως:

$$f(x) \geq f(0), \text{ για κάθε } x \in R$$

Άρα, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$

β) Τη χρονική στιγμή $t_2 = 16$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει τη μέγιστη τιμή της, που είναι η T(16) = = 11 βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$f(t) \leq f(16) = 11$, για κάθε $t \in [0,24]$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 16$ μέγιστο, το $f(16) = 11$.

Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in A$$

Το $x_0 \in A$ λέγεται θέση μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό μέγιστο ή απλώς μέγιστο της f και το συμβολίζουμε με $\max f(x)$. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = -3x^4 + 1$. Επειδή

$$x^4 \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \in R,$$

θα είναι

$$-3x^4 \leq 0 , \quad \text{για κάθε } x \in R,$$

οπότε θα έχουμε

$$-3x^4 + 1 \leq 1, \quad \text{για κάθε } x \in R .$$

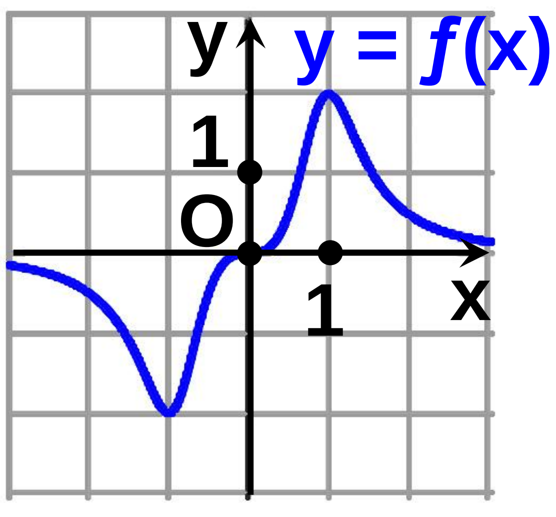
Επομένως:

$$f(x) \leq f(0), \quad \text{για κάθε } x \in R$$

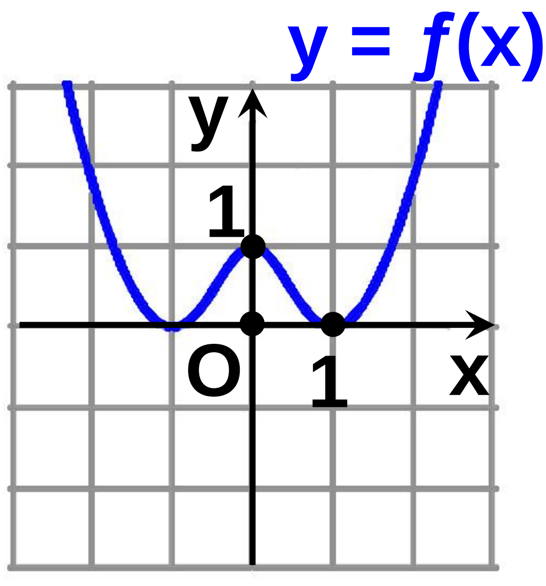
Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.
Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται ολικά ακρότατα αυτής.

ΣΧΟΛΙΟ:

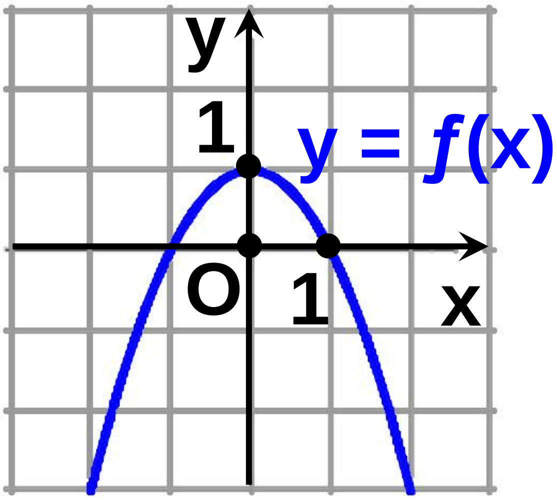
Μια συνάρτηση ενδέχεται να έχει και μέγιστο και ελάχιστο (Σχ. α) ή μόνο ελάχιστο (Σχ. β') ή μόνο μέγιστο (Σχ. γ') ή να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (Σχ. δ').



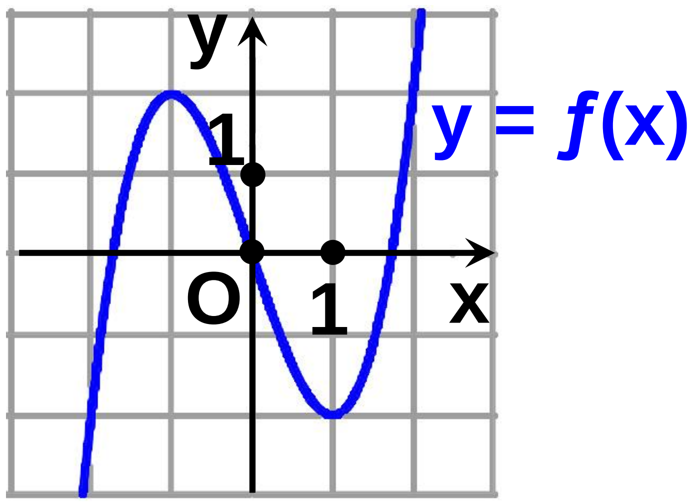
Σχήμα α



Σχήμα β'



Σχήμα γ'



Σχήμα δ'

Άρτια συνάρτηση

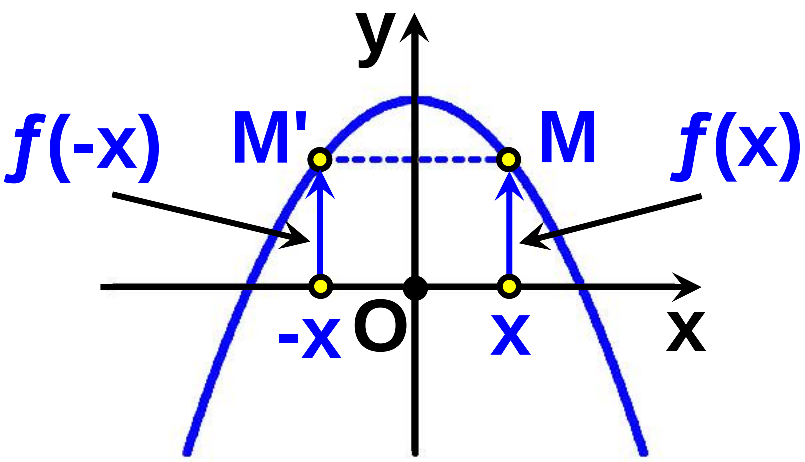
α) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το R . Παρατηρούμε ότι η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς τον άξονα y'y ανήκει στην C_f .

Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου Μ(x,y) της C_f ως προς τον άξονα y'y είναι το σημείο Μ'(-x,y) και επειδή τα σημεία Μ(x,y)

και M'(-x,y) ανήκουν στην C_f , θα ισχύει y = f(x) και y = f(-x), οπότε θα έχουμε:

$$f(-x) = f(x)$$

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέμε λέγεται **άρτια**. Γενικά:



ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται άρτια, όταν για κάθε x ∈ Α ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y 'y

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ είναι άρτια συνάρτηση, αφού έχει πεδίο ορισμού όλο το R και για κάθε x∈R ισχύει:

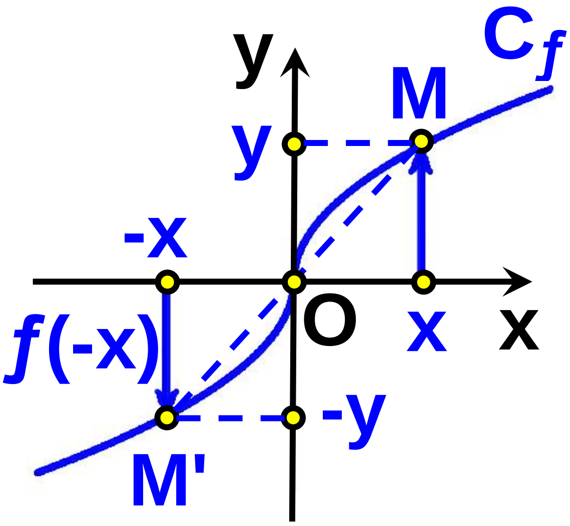
$f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 + 1 =$
$= 2x^4 - x^2 + 1 = f(x)$

Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y .

Περιττή συνάρτηση

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το R .

Παρατηρούμε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς την αρχή των αξόνων ανήκει στην C_f .



Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου M(x,y) της C_f ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο M'(-x, -y) και επειδή τα σημεία M(x,y) και M'(-x, -y) ανήκουν στην C_f , θα ισχύει y = f(x) και -y = f(-x), οπότε θα έχουμε:

$$f(-x) = -f(x)$$

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται περιττή. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται περιττή, όταν για κάθε x∈ A ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - x$ είναι περιττή συνάρτηση, διότι έχει πεδίο ορισμού όλο το R και για κάθε x∈R ισχύει:
$f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = - f(x)$
Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:
Ο όρος "άρτια" προέκυψε αρχικά από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ κτλ., που έχουν άρτιο εκθέτη, έχουν άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y, είναι δηλαδή άρτιες συναρτήσεις, ενώ ο όρος "περιττή" προέρχεται από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ κτλ., που έχουν

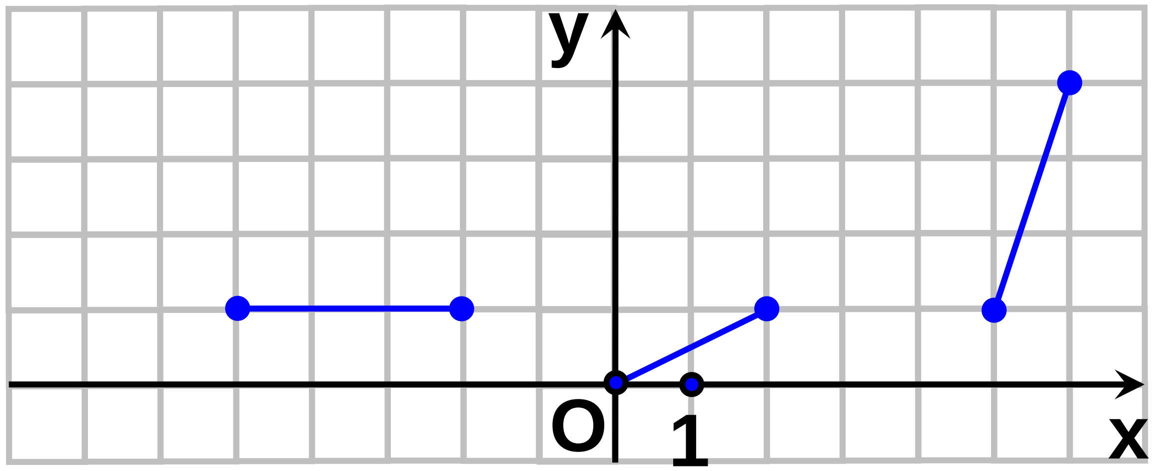
περιττό εκθέτη, έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, είναι δηλαδή περιττές συναρτήσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας <u>άρτιας</u> συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [-6,6].
Να χαραχθούν και τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής:

α) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f:
i) είναι γνησίως αύξουσα,
ii) είναι γνησίως φθίνουσα
iii) είναι σταθερή.

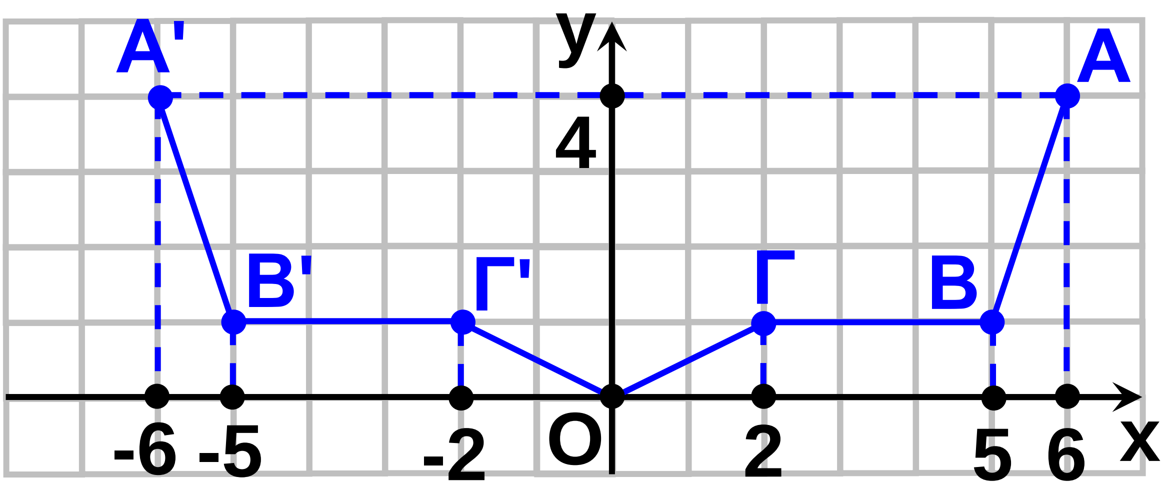
β) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f, καθώς επίσης οι θέσεις των ακροτάτων αυτών.



ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση θα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y. Επομένως, αν πάρουμε τα συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y των δοθέντων τμημάτων της γραφικής παράστασης της f, θα έχουμε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της f, που είναι η

πολυγωνική γραμμή Α΄Β΄Γ΄ΟΓΒΑ (Σχήμα).



Από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτει ότι:

α) Η συνάρτηση f:

i) είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα [0,2] και [5,6],

ii) είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα [-2,0] και [-6,-5], τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το Ο των διαστημάτων [0,2] και [5,6] αντιστοίχως στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα [-5,-2] και [2,5] τα οποία είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς το Ο.

β) Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 4 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -6 και 6. Δηλαδή ισχύει:

$$\max f(x) = f(-6) = f(6) = 4$$

Η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 0 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει την τιμή 0. Δηλαδή ισχύει:

$$\min f(x) = f(0) = 0.$$

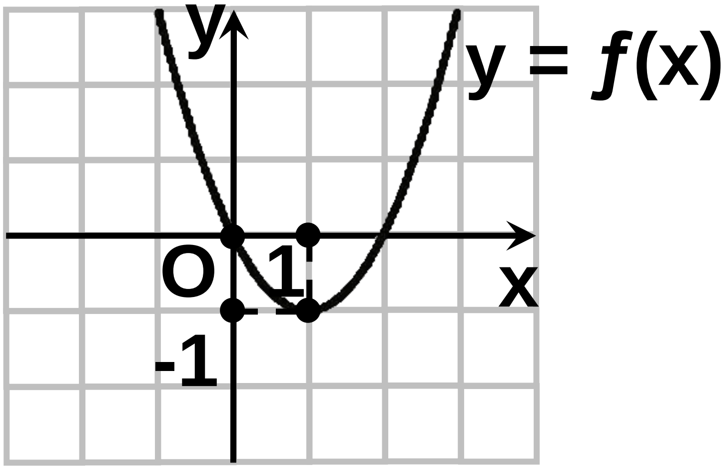
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

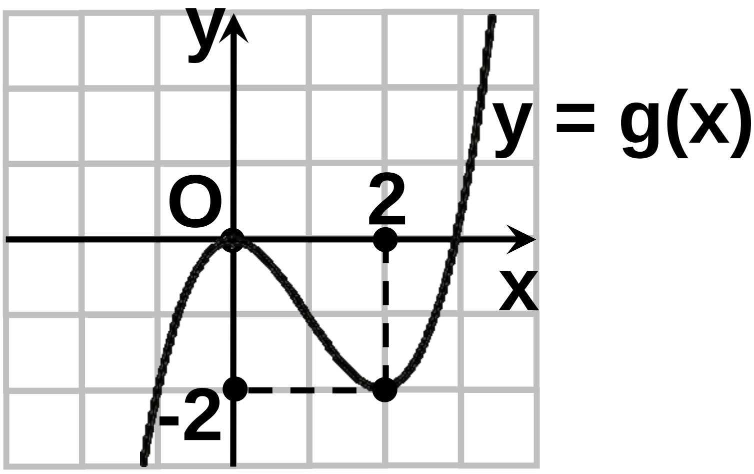
<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

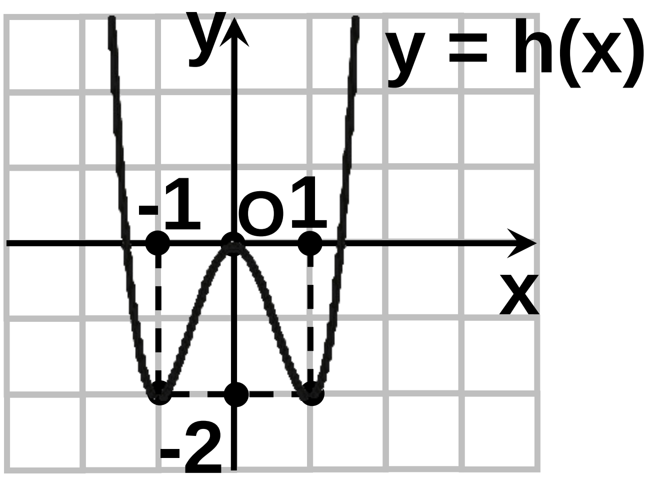
1) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι:

α) γνησίως αύξουσα και

β) γνησίως φθίνουσα.







2) **Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων της προηγούμενης άσκησης, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.**

3) **Να δείξετε ότι:**

i) **Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$.**

ii) **Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$.**

4) **Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:**

i) $f_1(x) = 3x^2 + 5x^4$

ii) $f_2(x) = 3|x| + 1$

iii) $f_3(x) = |x + 1|$

iv) $f_4(x) = x^3 - 3x^5$

v) $f_5(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}$

vi) $f_6(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

5) Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f_1(x) = \dfrac{1}{|x|}$

ii) $f_2(x) = \sqrt{x - 2}$

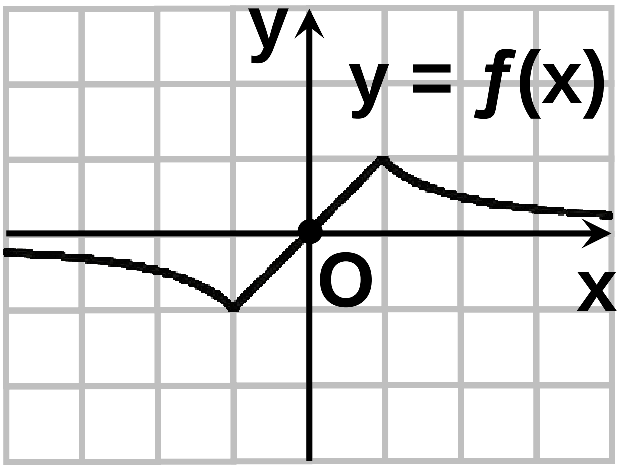
iii) $f_3(x) = |x - 1| - |x + 1|$

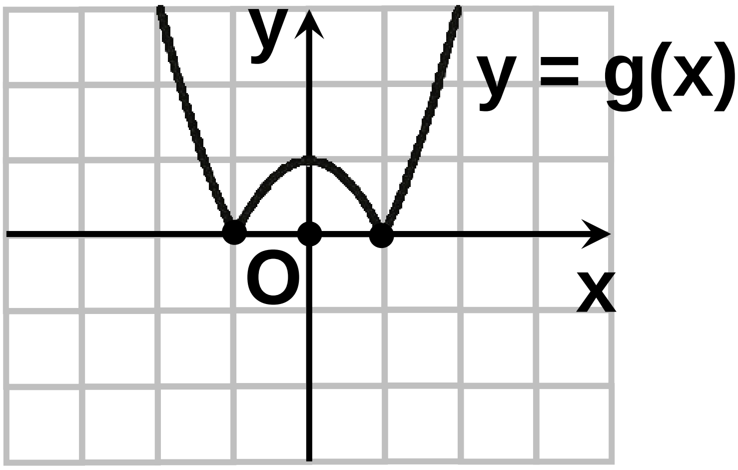
iv) $f_4(x) = \dfrac{x + \dfrac{1}{x}}{x^2 + 1}$

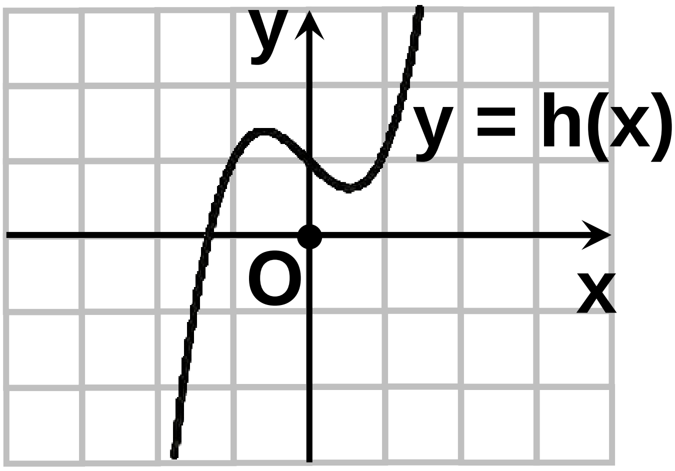
v) $f_5(x) = \sqrt{|x|}$

vi) $f_6(x) = \sqrt{1 - x^2}$

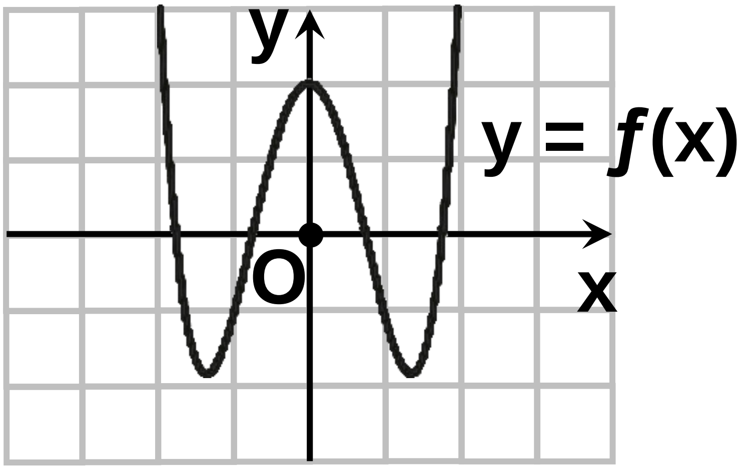
6) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης.

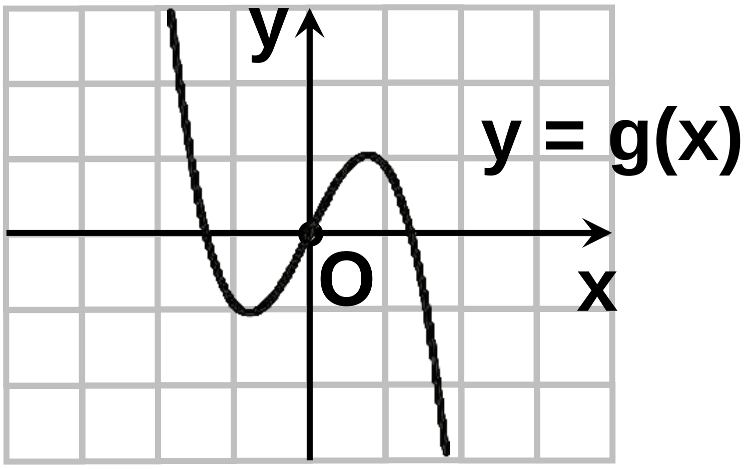


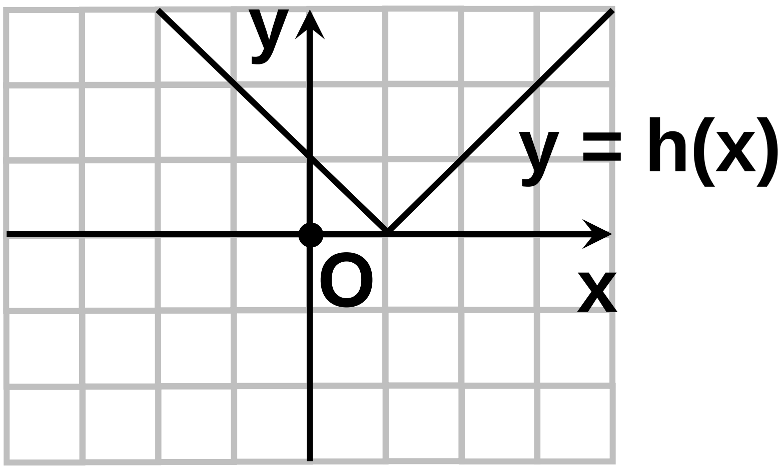




7) Ομοίως για τις παρακάτω γραμμές

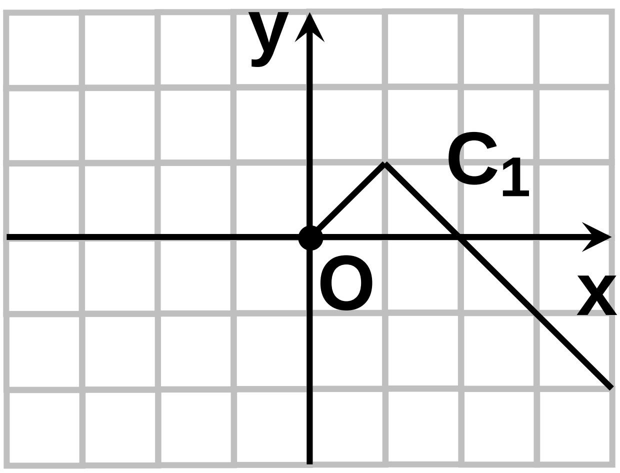


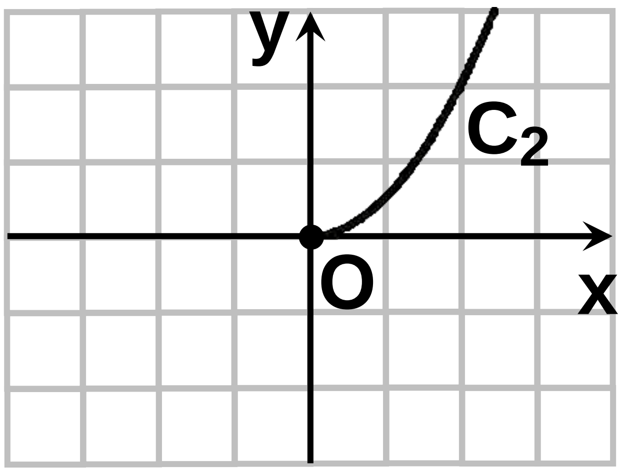


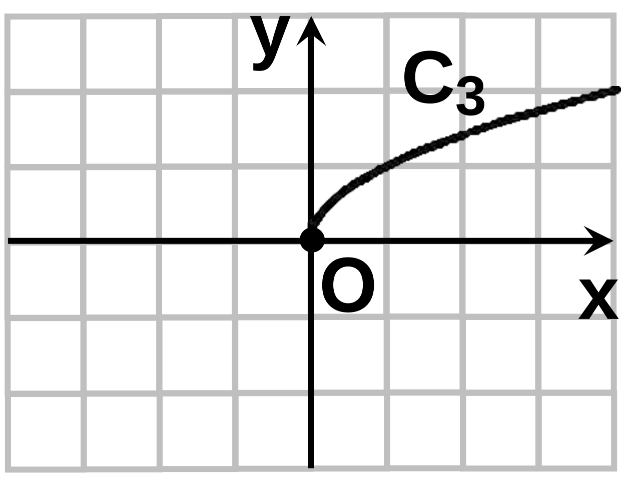


8) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις

α) Άρτιας συνάρτησης και
β) Περιττής συνάρτησης.







ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1.	**Υπάρχει συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α (1,2) και Β(1,3).**	**Α**	**Ψ**
2.	**Οι ευθείες $y = α^2 x - 2$ και $y = -x + 1$ τέμνονται.**	**Α**	**Ψ**
3.	**Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα.**	**Α**	**Ψ**

4.	**Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα.**	**Α**	**Ψ**
5.	**Υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία Α (1,2), Β(2,1) και Γ (3,3).**	**Α**	**Ψ**
6.	**Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε θα ισχύει $f(0) < 0$.**	**Α**	**Ψ**
7.	**Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α (1,2) και Β (2,5), τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.**	**Α**	**Ψ**
8.	**Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι ίση με 1, τότε η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.**	**Α**	**Ψ**

9.	**Η συνάρτηση *f*:[-1,2]→R με *f*(x) = $3x^2$ είναι άρτια.**	**Α**	**Ψ**
10.	**Αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και έχει ρίζα τον αριθμό ρ, τότε θα έχει ρίζα και τον αριθμό -ρ.**	**Α**	**Ψ**
11.	**Αν μία συνάρτηση *f* είναι άρτια, τότε η *f* δεν είναι γνησίως μονότονη.**	**Α**	**Ψ**
12.	**Αν μία συνάρτηση *f* είναι άρτια, τότε η -*f* είναι περιττή.**	**Α**	**Ψ**

ΙΙ) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για την παρακάτω συνάρτηση *f*.

Η συνάρτηση *f*, της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ(x) = $3x^4$ μιας

οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, έχει τύπο:

Α) $f(x) = 3(x - 1)^4 + 2$
Β) $f(x) = 3(x - 1)^4 - 2$,
Γ) $f(x) = 3(x + 1)^4 + 2$
Δ) $f(x) = 3(x + 1)^4 - 2$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η ιδέα της χρησιμοποίησης διατεταγμένων ζευγών για τα σημεία ενός επιπέδου και της περιγραφής καμπύλων με εξισώσεις, ανήκει στον Rene Descartes (1596 - 1650) και στον Pierre de Fermat (1601 - 1665).
Ο Descartes (Καρτέσιος) γεννήθηκε στη La Haye (σημερινή Ντερκατ) της Touraine και πέθανε στη

Στοκχόλμη. Σε ηλικία 10 χρόνων εγγράφηκε στο Βασιλικό Κολλέγιο της La Fleche, όπου δίδασκαν Ιησουίτες. Από εκείνη τη στιγμή αρχίζει και το ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά. Στη ζωή του υπήρξε φιλόσοφος, αλλά ένα μεγάλο μέρος του χρόνου του το διέθετε για τα μαθηματικά.

Τα αποτελέσματα και οι μέθοδοί του, που δημοσίευσε το 1637 στο βιβλίο του Le Geometrie, δημιούργησαν ένα νέο κλάδο των μαθηματικών που αργότερα ονομάστηκε Αναλυτική Γεωμετρία. Ο Καρτέσιος διείδε τη δύναμη της Άλγεβρας για τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων και η σκέψη του αντιπροσώπευε μια ριζική απόκλιση από την μέχρι τότε επικρατούσα άποψη για τη Γεωμετρία. Ο όρος

«Καρτεσιανές συντεταγμένες», οφείλεται στο όνομά του.
Ο Fermat, που έζησε στην Toulouse της νότιας Γαλλίας, αν και ήταν νομικός στο επάγγελμα, υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 17ου αιώνα.
Τις ιδέες του για συντεταγμένες στη Γεωμετρία, τυποποίησε στις αρχές του 1629 και τις κυκλοφόρησε με αλληλογραφία, αλλά δεν δημοσιεύτηκαν πριν από το 1679. Ο Fermat συνέδεσε το όνομά του με τον ισχυρισμό:
«Για κάθε ν > 2 είναι αδύνατο να βρούμε θετικούς ακέραιους α, β, γ που να ικανοποιούν την σχέση $α^ν = β^ν + γ^ν$ » που είναι γνωστός ως το «τελευταίο θεώρημα του Fermat». Τον ισχυρισμό του αυτόν έγραψε ο Fermat στο περιθώριο ενός βιβλίου του προσθέτοντας και τα εξής:

«Έχω βρει μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη την οποία το περιθώριο αυτό είναι πολύ στενό για να χωρέσει».
Ο ισχυρισμός αυτός του Fermat αποδείχτηκε αληθής το 1994 από τον Άγγλο μαθηματικό A. Wiles, αφού υπήρξε για 350 χρόνια ένα από τα διασημότερα άλυτα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 4ου ΤΟΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο:
Πρόοδοι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο:
Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων