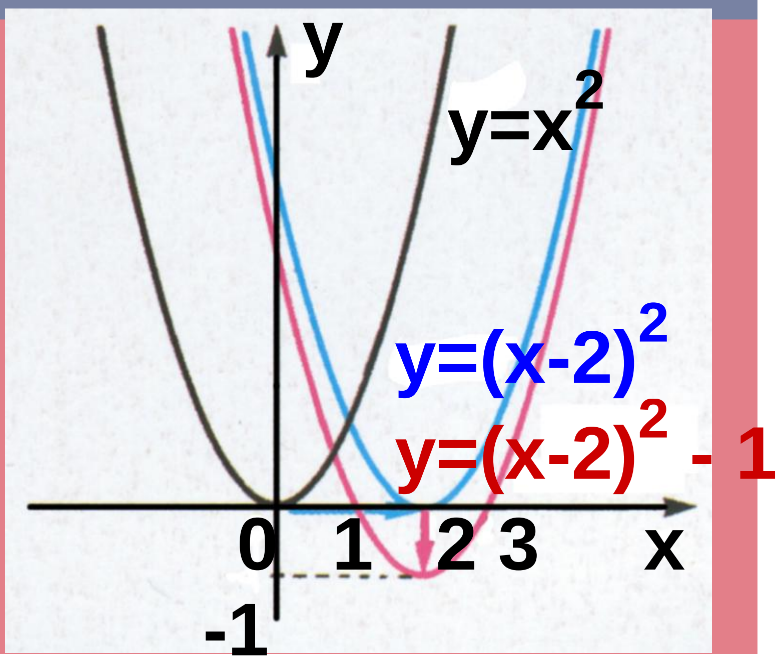
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Άλγεβρα και στοιχεία Πιθανοτήτων

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



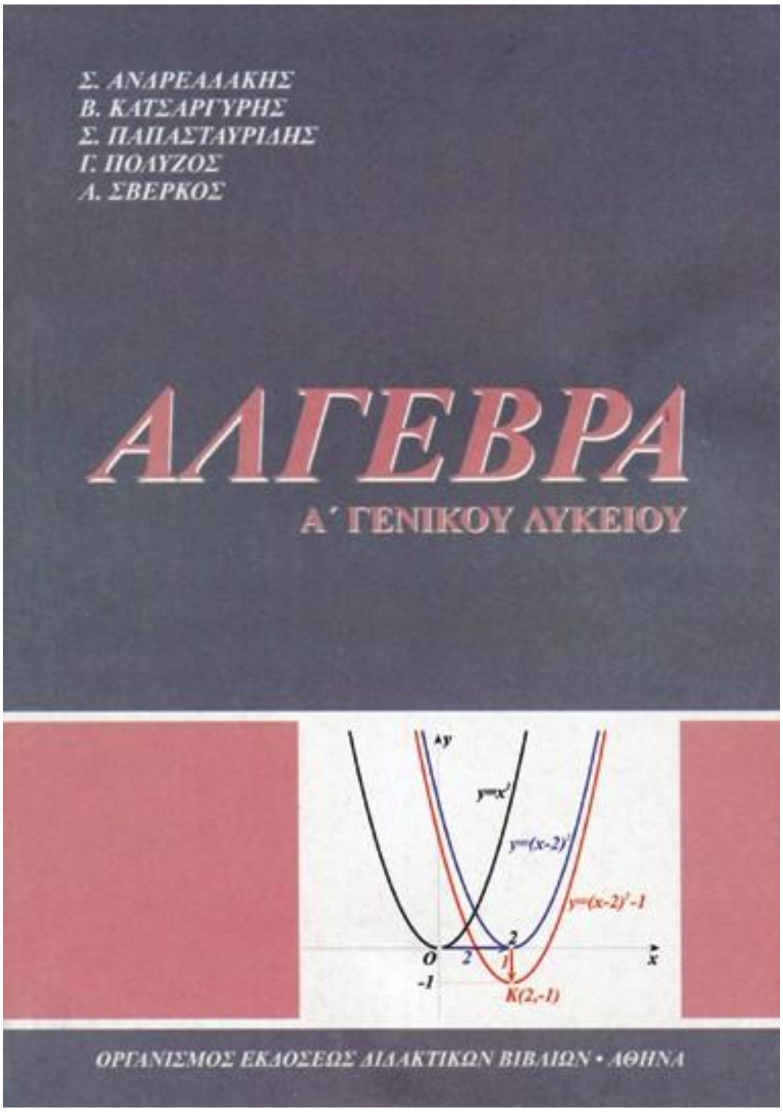
Τόμος 5ος

Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 5ος

1η έκδοση



ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός,

Κατσαργύρης Βασίλειος,

Παπασταυρίδης Σταύρος,

Πολύζος Γεώργιος,

Σβέρκος Ανδρέας

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Ομοτ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος, Καθηγητής Βαρβακείου, Πειραματικού Λυκείου

Παπασταυρίδης Σταύρος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος, Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.

Σβέρκος Ανδρέας, Καθηγητής 2ου Πειραματικού Λυκείου Αθηνών

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ Π. Ι.

Σκούρας Αθανάσιος,
Σύμβουλος του Π. Ι.
Πολύζος Γεώργιος,
Μόνιμος Πάρεδρος του Π. Ι.

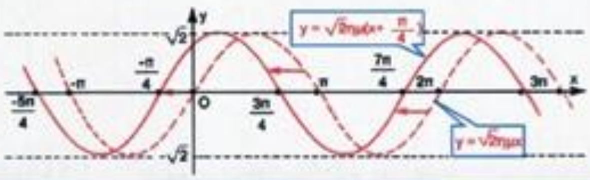
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Ελευθερόπουλος Ιωάννης
Καθηγητής Μαθηματικών,
Αποσπασμένος στο Π. Ι.
Ζώτος Ιωάννης
Καθηγητής Μαθηματικών,
Αποσπασμένος στο Π. Ι.
Καλλιπολίτου Ευρυδίκη
Καθηγήτρια Μαθηματικών,
Αποσπασμένη στο Π. Ι.

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ • ΑΘΗΝΑ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Ομοτ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος, Καθηγητής Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου

Παπασταυρίδης Σταύρος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας

Πολύζος Γεώργιος, Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.

Σβέρκος Ανδρέας, Καθηγητής 2ου Πειραματικού Λυκείου Αθηνών

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ: 1991
ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ: 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998
Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ
Αδαμόπουλος Λεωνίδας,
Επ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Δαμιανού Χαράλαμπος,
Αναπλ. Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών
Σβέρκος Ανδρέας,
Σχολικός Σύμβουλος

ΚΡΙΤΕΣ:

Κουνιάς Στρατής,
Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών
Μακρής Κωνσταντίνος,
Σχολικός Σύμβουλος
Τσικαλουδάκης Γεώργιος,
Καθηγητής Β/θμιας
Εκπαίδευσης

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
Μπουσούνη Λία Καθηγήτρια
Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΔΑΚΤΥΛΟΓΡΑΦΗΣΗ:
Μπολιώτη Πόπη

ΣΧΗΜΑΤΑ:
Μπούτσικας Μιχάλης

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>

Ομάδα Εργασίας του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

<u>ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ</u>

Γραμμένος Νικόλαος, Εκπαιδευτικός

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ</u>

Νικόπουλος Ιωάννης, Εκπαιδευτικός

7 ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πώς, με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων

$f_1(x) = αx^2$, $f_2(x) = αx^3$,

$f_3 = \dfrac{α}{x}$ και $f_4(x) = αx^2 + βx + γ$.

Η πορεία την οποία ακολουθούμε λέγεται **μελέτη συνάρτησης** και περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

2. Προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.
3. Μελετούμε τη "συμπεριφορά" της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της ("οριακές τιμές" κτλ.).
4. Συντάσσουμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης και, με τη βοήθεια αυτού και των προηγούμενων συμπερασμάτων, χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

ΣΧΟΛΙΟ

Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α είναι <u>άρτια</u>, τότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y, ενώ αν είναι <u>περιττή</u>, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης αρκεί να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$ και να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο σύνολο αυτό. Στη συνέχεια θα πάρουμε το συμμετρικό της καμπύλης που χαράξαμε ως προς τον άξονα y'y αν η συνάρτηση είναι άρτια και ως προς την αρχή των αξόνων αν η συνάρτηση είναι περιττή και θα βγάλουμε τα σχετικά συμπεράσματα. Γι' αυτό, συνήθως, πριν προχωρήσουμε στα βήματα 2 έως 4, ελέγχουμε από την αρχή αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

7.1 ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = \alpha x^2$

Η συνάρτηση $g(x) = x^2$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή, έχει πεδίο ορισμού όλο το R και είναι άρτια, διότι για κάθε $x \in R$ ισχύει :

$$g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της g έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y. Άρα, σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγουμένως, αρχικά θα μελετήσουμε και θα παραστήσουμε γραφικά την g στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Έχουμε λοιπόν:

• <u>Μονοτονία</u>: Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα

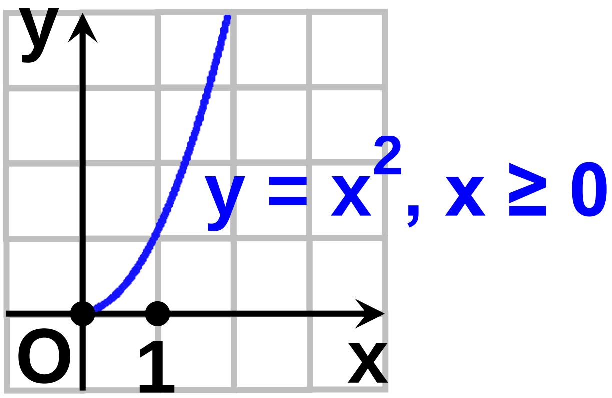
είναι $x_1^2 < x_2^2$, οπότε θα έχουμε $g(x_1) < g(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $g(x) = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

• **<u>Ακρότατα</u>**: Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει:
$g(x) = x^2 \geq 0 = g(0)$. Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ελάχιστο, το $g(0) = 0$.

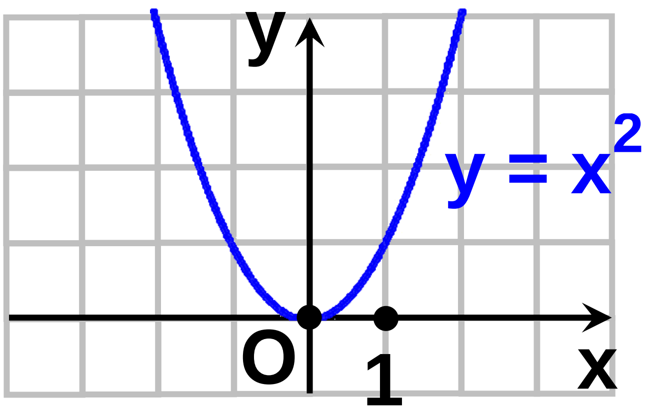
• **<u>Συμπεριφορά της g για "μεγάλες" τιμές του x</u>**: Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μεγάλες" τιμές του x:

x	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	…	$\to +\infty$
$g(x) = x^2$	10^{20}	10^{40}	10^{100}	10^{200}	10^{2000}	…	$\to +\infty$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, ή όπως λέμε "τείνει στο +∞", το x^2 αυξάνεται και αυτό απεριόριστα και μάλιστα γρηγορότερα και άρα "τείνει στο +∞ ". Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της g προεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, καθώς το x απομακρύνεται προς το +∞.



Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και παίρνοντας ένα πίνακα τιμών της g για μη αρνητικές τιμές του x, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα [0, +∞) .



Αν τώρα πάρουμε το συμμετρικό της παραπάνω καμπύλης ως προς τον άξονα y'y, τότε θα έχουμε τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$

σε όλο το R , από την οποία συμπεραίνουμε ότι:
Η συνάρτηση g(x) = x^2:
• Είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞,0] και γνησίως αύξουσα στο [0, +∞)
• Παρουσιάζει ελάχιστο για x = 0, το g(0) = 0 .
• Έχει γραφική παράσταση που προεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, καθώς το x τείνει είτε στο -∞, είτε στο +∞.

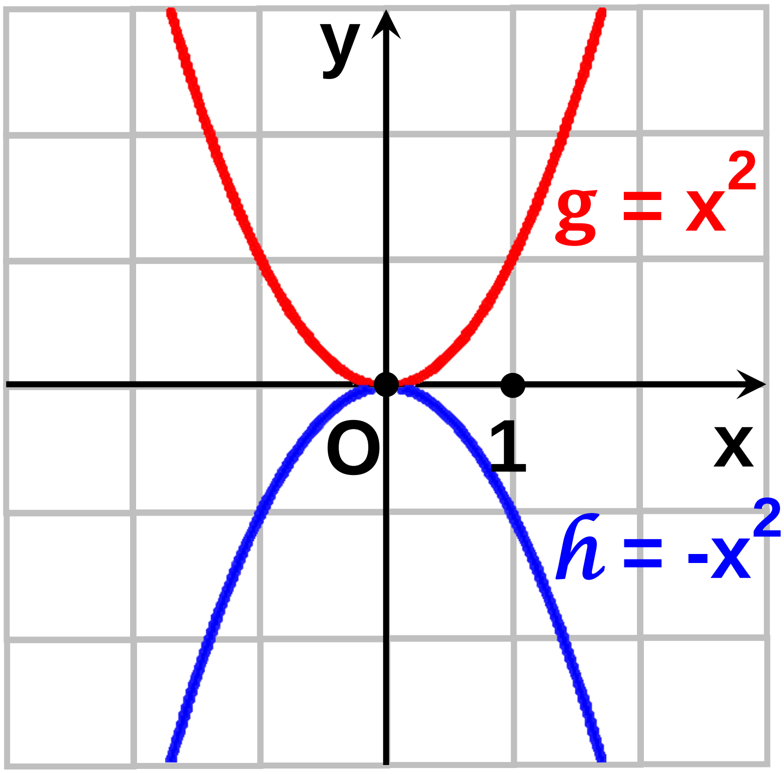
Η συνάρτηση $h(x) = -x^2$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $h(x) = -x^2$. Παρατηρούμε ότι για κάθε x ∈ R ισχύει

$$h(x) = -g(x)$$

Άρα, όπως μάθαμε στην §4.2, η γραφική παράσταση της $h(x) = -x^2$

είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x) = x^2$ ως προς τον άξονα x'x.



Επομένως η συνάρτηση $h(x) = -x^2$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο (-∞,0] και γνησίως φθίνουσα στο [0, +∞).
- Παρουσιάζει μέγιστο για x = 0 , το $h(0) = 0$
- Έχει γραφική παράσταση που προεκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω, καθώς το x τείνει είτε στο -∞ είτε στο +∞.

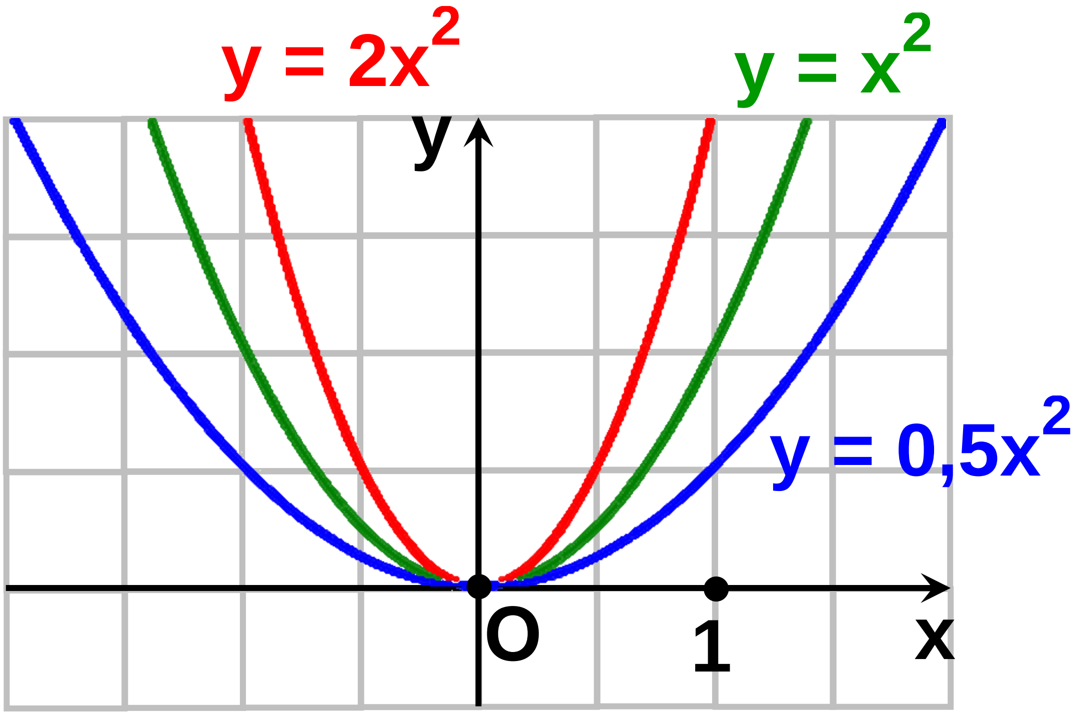
Η συνάρτηση $f(x) = αx^2$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

• Αν α > 0, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-∞	0	+∞
$f(x) = αx^2$ α > 0	-∞ ↘	0 min	↗ +∞

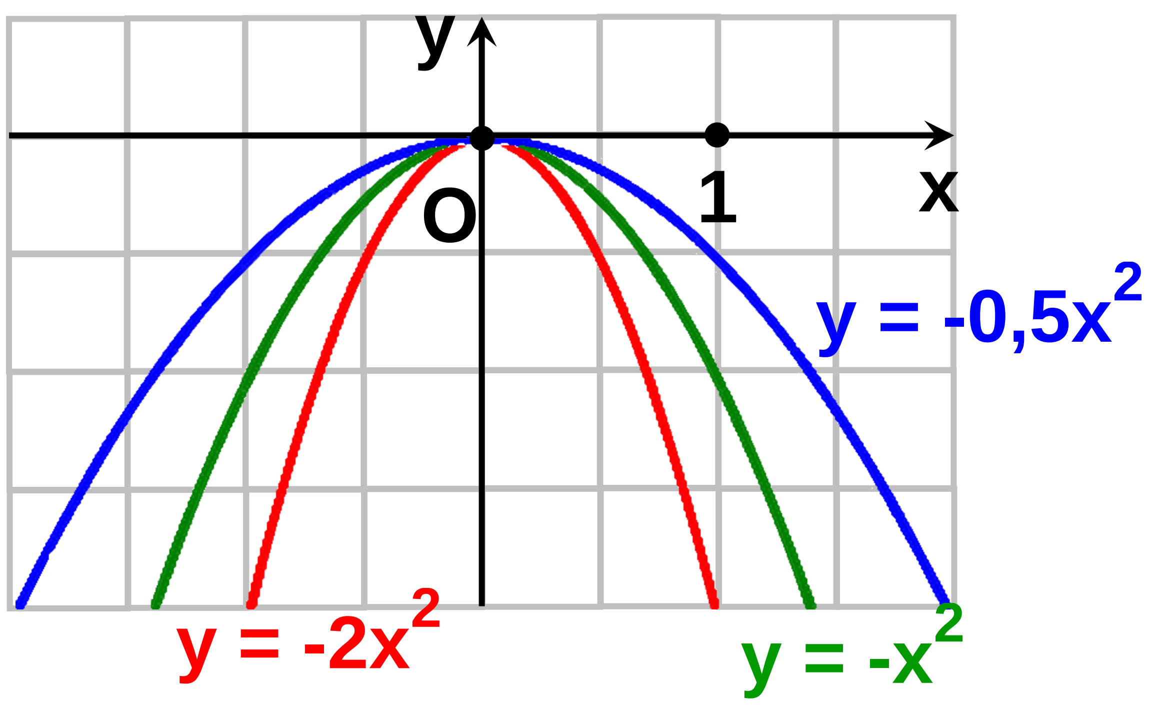
Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = αx^2$ για α = 0,5, α = 1 και α = 2.



• Αν **α < 0**, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $h(x) = -x^2$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-∞	0	+∞
$f(x) = \alpha x^2$ $\alpha > 0$	-∞ ↗	max 0	↖ +∞

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = αx^2$ για α = -0,5, α = -1, α = -2.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx^2$, με α ≠ 0, είναι μια καμπύλη που λέγεται παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y .
Στα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

✓ Όταν το α είναι θετικό, τότε η παραβολή είναι "ανοικτή" προς τα πάνω, ενώ όταν το α είναι αρνητικό, τότε η παραβολή είναι "ανοικτή" προς τα κάτω.
✓ Καθώς η |α| μεγαλώνει, η παραβολή γίνεται όλο και πιο "κλειστή", δηλαδή "πλησιάζει" τον άξονα y'y .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

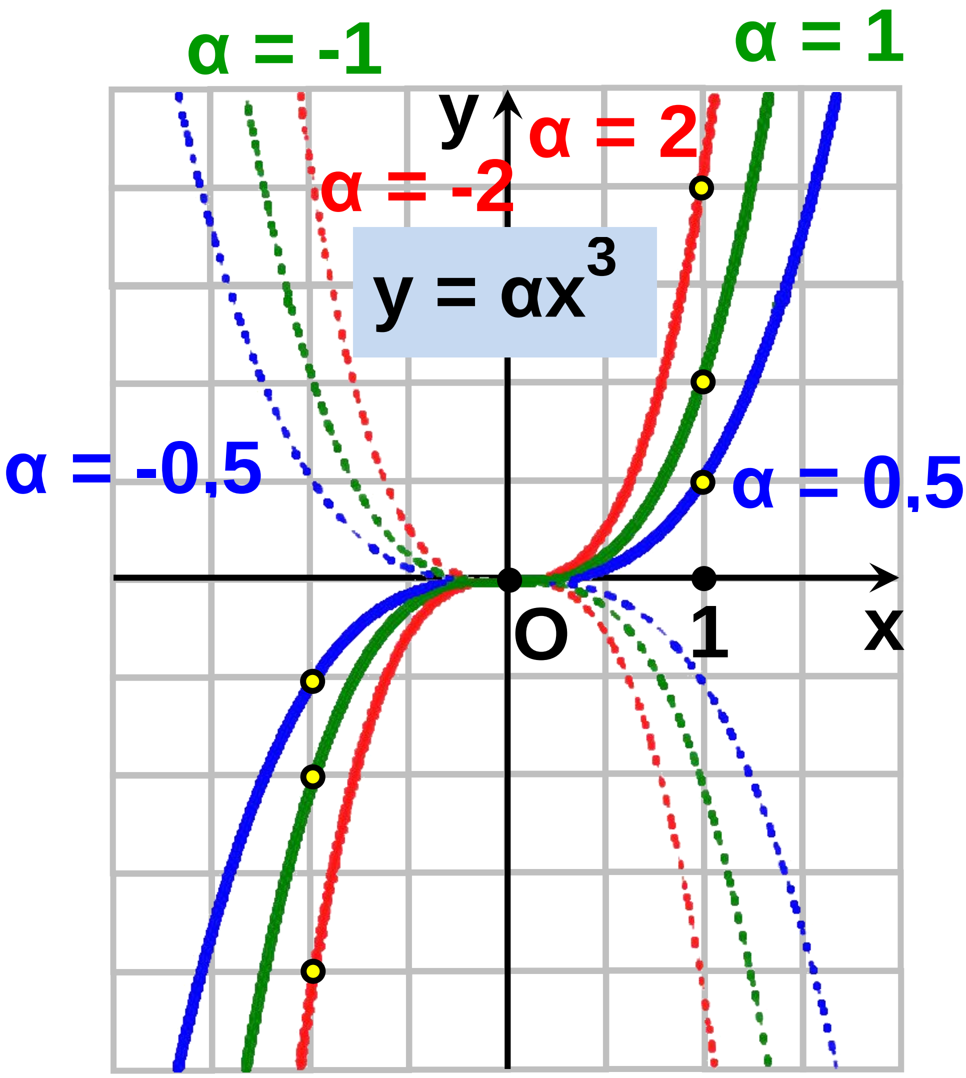
Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $h(x) = \alpha x^3$:

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $h(x) = \alpha x^3$, με $\alpha \neq 0$, είναι περιττή, διότι:

$$h(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -h(x)$$

Επομένως, αρκεί να τη μελετήσουμε και να την παραστήσουμε γραφικά στο διάστημα [0, +∞) και στη συνέχεια να βγάλουμε τα σχετικά συμπεράσματα για όλο το R.



Αν εργαστούμε με τρόπο ανάλογο με εκείνο με τον οποίο εργαστήκαμε για τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$, συμπεραίνουμε ότι:

Η συνάρτηση $h(x) = \alpha x^3$, με $\alpha \neq 0$:

• Αν $\alpha > 0$,

✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο R.

✓ Έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, όταν το x τείνει στο και απεριόριστα προς τα κάτω όταν το x τείνει στο -∞ .

• Αν $\alpha < 0$,

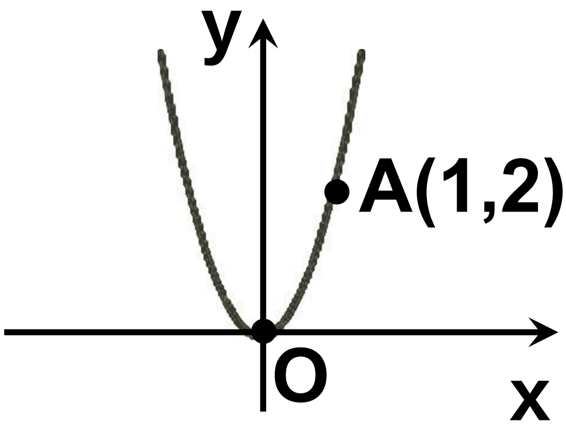
✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο R

✓ Έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω, όταν το x τείνει στο +∞ και απεριόριστα προς τα πάνω όταν το x τείνει στο -∞ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής του παρακάτω σχήματος.



2. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 0{,}5x^2$, $f(x) = 0{,}5x^2 + 2$ και $g(x) = 0{,}5x^2 - 3$

ii) $\psi(x) = -0{,}5x^2$ $h(x) = -0{,}5x^2 - 2$ και $q(x) = -0{,}5x^2 + 3$.

3. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 0,5x^2$, $f(x) = 0,5(x - 2)^2$ και
$g(x) = 0,5\ (x + 2)^2$

ii) $ψ(x) = -0,5x^2$, $h(x) = -0,5(x - 2)^2$ και
$q(x) = -0,5(x + 2\ )^2$

4. i) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^2 \text{ και } g(x) = 1$$

και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις:

$$x^2 \leq 1 \text{ και } x^2 > 1.$$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x|x|.$$

2. **Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:**

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

και με τη βοήθεια αυτής να βγάλετε τα συμπεράσματα τα σχετικά με τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f.

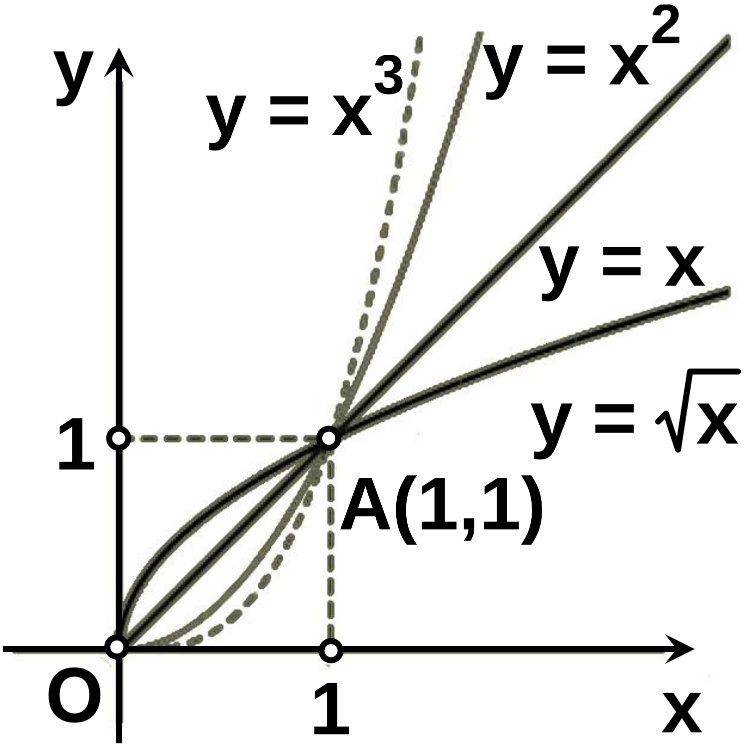
3. **Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:**

$f(x) = x$, $g(x) = x^2$,

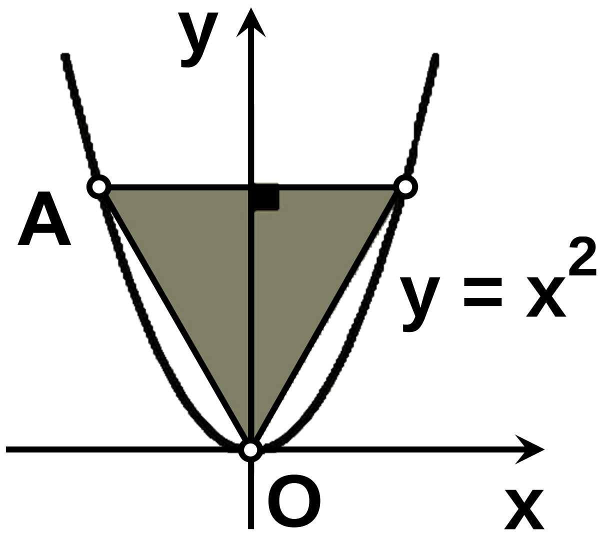
$h(x) = x^3$ και $\varphi(x) = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$, τις οποίες χαράξαμε με τη βοήθεια Η/Υ.

i) Να διατάξετε από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη τις τιμές x, x^2, x^3 και $\sqrt{x}$ των συναρτήσεων f, g, h και φ:

α) για 0 < x < 1 και β) για x > 1 .
ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε προηγουμένως.



4. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $O\hat{A}B$ είναι ισόπλευρο. Να βρεθεί η τετμημένη του σημείου A.



7.2 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: $f(x) = \frac{\alpha}{x}$

Η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x}$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι, η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού όλο το R = (-∞,0) U (0, +∞) και είναι περιττή, διότι για κάθε $x \in R$ ισχύει :

$$g(-x) = \frac{1}{-x} = -g(x)$$

Επομένως, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Γι' αυτό αρχικά θα τη μελετήσουμε και θα την παραστήσουμε γραφικά στο διάστημα (0, +∞) .

Έχουμε λοιπόν:

- **<u>Μονοτονία</u>: Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα ισχύει $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, οπότε θα έχουμε $g(x_1) > g(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.**

- **<u>Πρόσημο των τιμών της g</u>: Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $g(x) = \frac{1}{x} > 0$**

Επομένως, στο διάστημα $(0, +\infty)$ η γραφική παράσταση της g θα βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x.

- **<u>Συμπεριφορά της g για "μικρές" τιμές του x</u>: Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μικρές" τιμές του x:**

x	10^{-10}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-100}	10^{-1000}	…	$\to 0$
$g(x) = \frac{1}{x}$	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	…	$\to +\infty$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x μειώνεται απεριόριστα και παίρνει τιμές οσοδήποτε κοντά στο 0 ή, όπως λέμε, "τείνει στο 0", το $\frac{1}{x}$ αυξάνεται απεριόριστα και τείνει στο +∞. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x "πλησιάζει" το 0 από τα δεξιά, η γραφική παράσταση της g τείνει να συμπέσει με τον ημιάξονα Oy . Γι' αυτό ο άξονας y'y λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g προς τα πάνω.

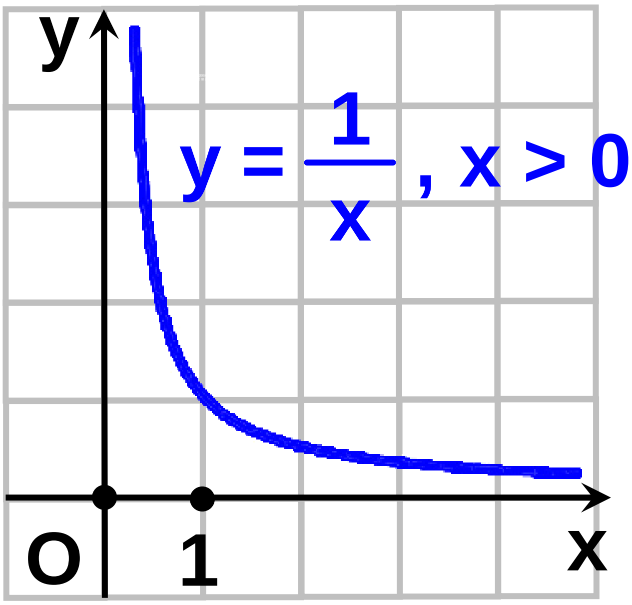
• **<u>Συμπεριφορά της g για "μεγάλες" τιμές του x</u>: Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μεγάλες" τιμές του x:**

x	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	…	$\to +\infty$
$g(x) = \dfrac{1}{x}$	10^{-10}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-100}	10^{-1000}	…	$\to 0$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα και τείνει στο +∞, το $\dfrac{1}{x}$ μειώνεται απεριόριστα και τείνει στο 0. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x "απομακρύνεται" προς το +∞, η γραφική παράσταση της g τείνει να συμπέσει με τον ημιάξονα Ox .

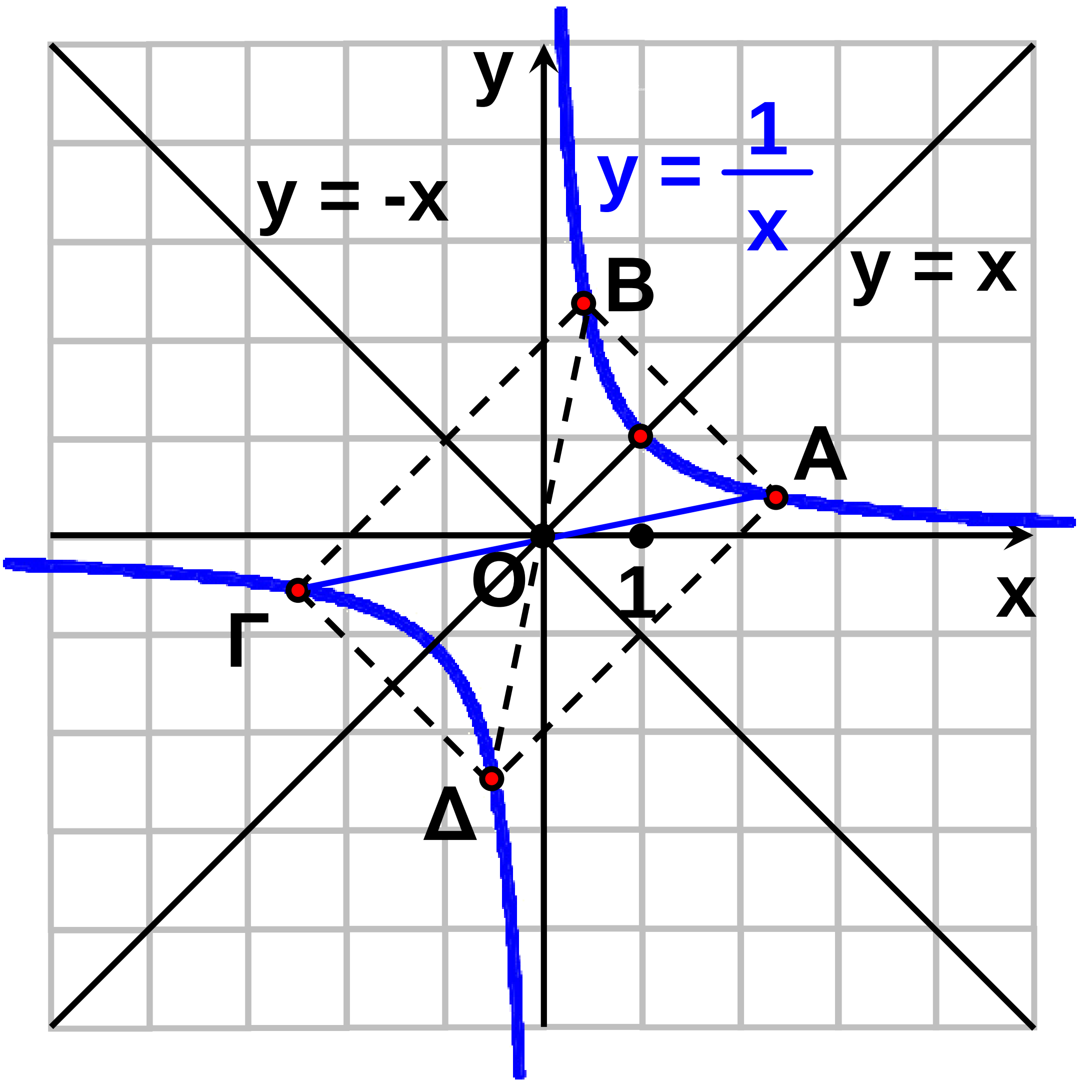
Γι’ αυτό ο άξονας x'x λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής **παράστασης της g προς τα δεξιά.**

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και παίρνοντας ένα πίνακα τιμών της g για θετικές τιμές του x , μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα (0, +∞) .



Αν τώρα πάρουμε το συμμετρικό της παραπάνω καμπύλης ως προς την αρχή των αξόνων, τότε θα έχουμε τη γραφική παράσταση της

$g(x) = \dfrac{1}{x}$ σε όλο το R, από την οποία συμπεραίνουμε ότι:



Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{x}$:

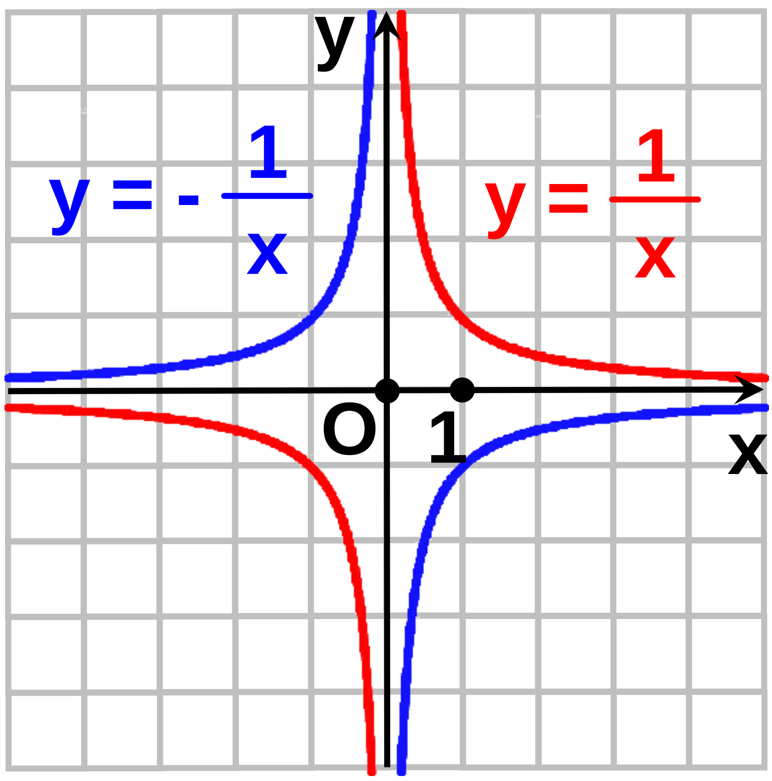
- Είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0, +\infty)$.

• Έχει γραφική παράσταση η οποία:
✓ αποτελείται από δύο κλάδους, έναν στο 1^o και έναν στο 3^o τεταρτημόριο,
✓ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων,
✓ έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες y = x και y = -x, που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων και τέλος
✓ έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα x'x και κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα y' y .

Η συνάρτηση $h(x) = -\dfrac{1}{x}$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $h(x) = -\dfrac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει

$$h(x) = -g(x) .$$



Επομένως, η γραφική παράσταση της $h(x) = -\dfrac{1}{x}$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x) = \dfrac{1}{x}$ ως προς τον άξονα x'x, οπότε, η συνάρτηση $h(x) = -\dfrac{1}{x}$:

• Είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0, +\infty)$.

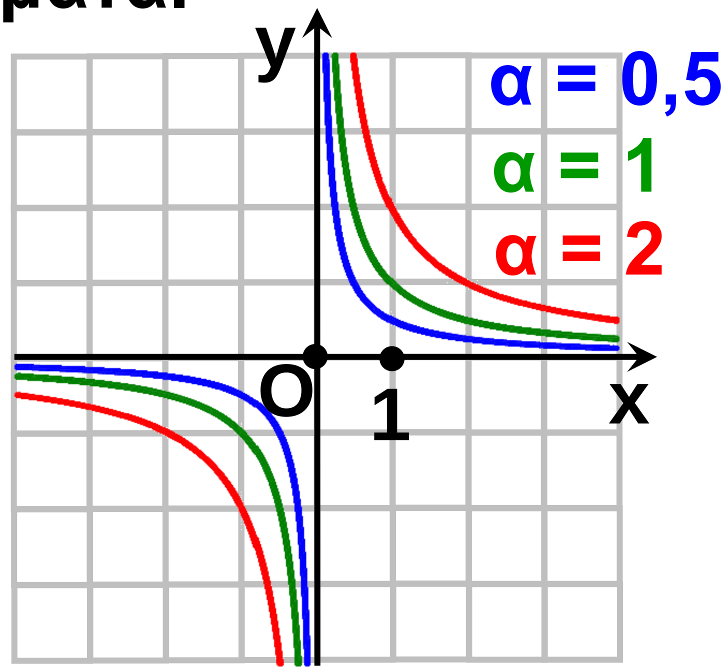
• Έχει γραφική παράσταση η οποία:
✓ αποτελείται από δύο κλάδους, έναν στο 2^o και έναν στο 4^o τεταρτημόριο,
✓ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων,
✓ έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$, που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων και τέλος
✓ έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα x'x και κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα y' y.

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
• Αν $\alpha > 0$, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση

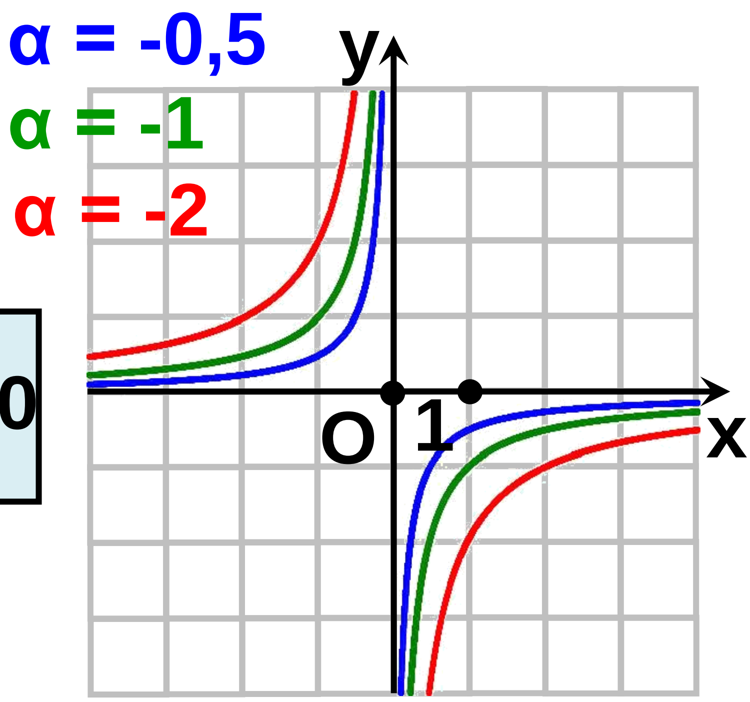
$g(x) = \dfrac{1}{x}$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα.

$y = \dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha > 0$



Σχήμα α'

$y = \dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha < 0$



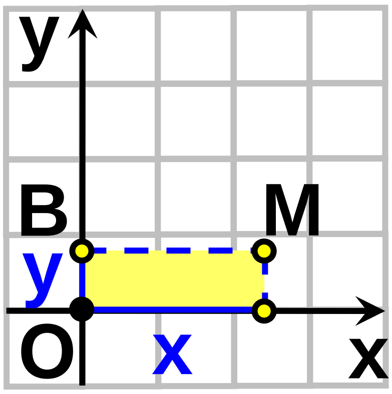
Σχήμα β'

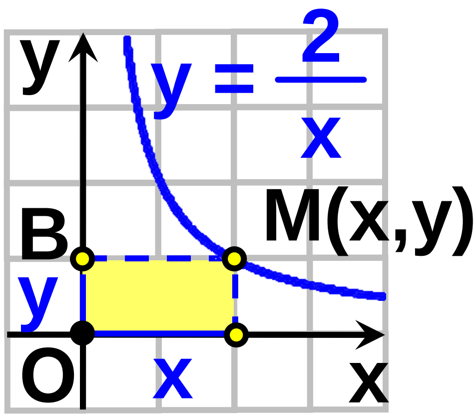
Στο σχήμα α' δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της $f(x) = \frac{α}{x}$ για α = 0,5, α = 1 και α = 2 .

• Αν α < 0, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $h(x) = -\frac{1}{x}$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα.
Στο σχήμα β' δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της $f(x) = \frac{α}{x}$ για α = -0,5, α = -1 και α = -2.
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{α}{x}$, με α ≠ 0, λέγεται ισοσκελής υπερβολή με κέντρο την αρχή των αξόνων και ασύμπτωτες τους άξονες x' x και y' y.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Μ κινείται στο 1^o τεταρτημόριο του συστήματος συντεταγμένων, έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογώνιου ΟΑΜΒ να παραμένει σταθερό και ίσο με 2τ.μ. Να αποδειχτεί ότι το σημείο Μ διαγράφει τον έναν κλάδο μιας ισοσκελούς υπερβολής.





ΛΥΣΗ

Αν με x συμβολίσουμε το μήκος και με y το πλάτος του ορθογωνίου, επειδή το εμβαδόν του είναι ίσο με

2τμ, θα ισχύει xy = 2 και x, y > 0 , οπότε θα έχουμε:

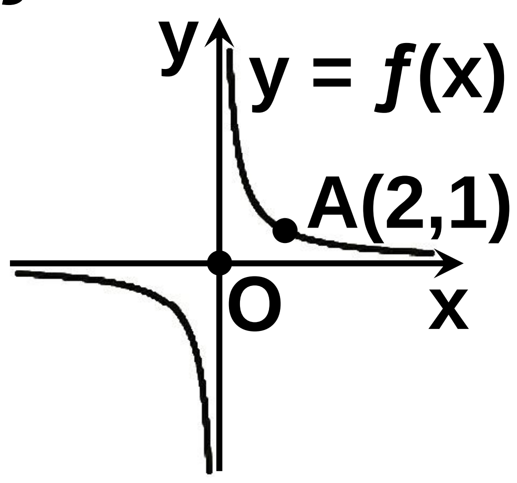
$$y = \frac{2}{x} \text{ , με } x > 0$$

Άρα το σημείο Μ θα διαγράφει τον κλάδο της υπερβολής $y = \frac{2}{x}$ που βρίσκεται στο 1^o τεταρτημόριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής του παρακάτω σχήματος.



2. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$

και $g(x) = \dfrac{1}{x} - 3$

ii) $\psi(x) = -\dfrac{1}{x}$, $h(x) = -\dfrac{1}{x} - 2$

και $q(x) = -\dfrac{1}{x} + 3$.

3. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i) $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

και $g(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

ii) $\psi(x) = -\dfrac{1}{x}$, $h(x) = -\dfrac{1}{x - 2}$

και $q(x) = -\dfrac{1}{x + 3}$.

4. i) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = 1$ και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις:

$$\frac{1}{x} \leq 1 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x} > x^2$$

ii) Να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τα παραπάνω συμπεράσματα.

5. Ομοίως για τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x^2$ και τις ανισώσεις:

$$\frac{1}{x} \leq x^2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x} > x^2$$

6. Οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$

μεταβάλλονται έτσι, ώστε το εμβαδόν του να παραμένει σταθερό και ίσο με 2 τετραγωνικές μονάδες. Να εκφράσετε το μήκος y της ΑΓ συναρτήσει του μήκους x της ΑΒ και στη συνέχεια να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

7.3 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Θα μελετήσουμε αρχικά τη συνάρτηση $g(x) = 2x^2 + 12x + 20$ που είναι ειδική περίπτωση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$.
Για τη μελέτη της συνάρτησης g μετασχηματίζουμε τον τύπο της ως εξής:

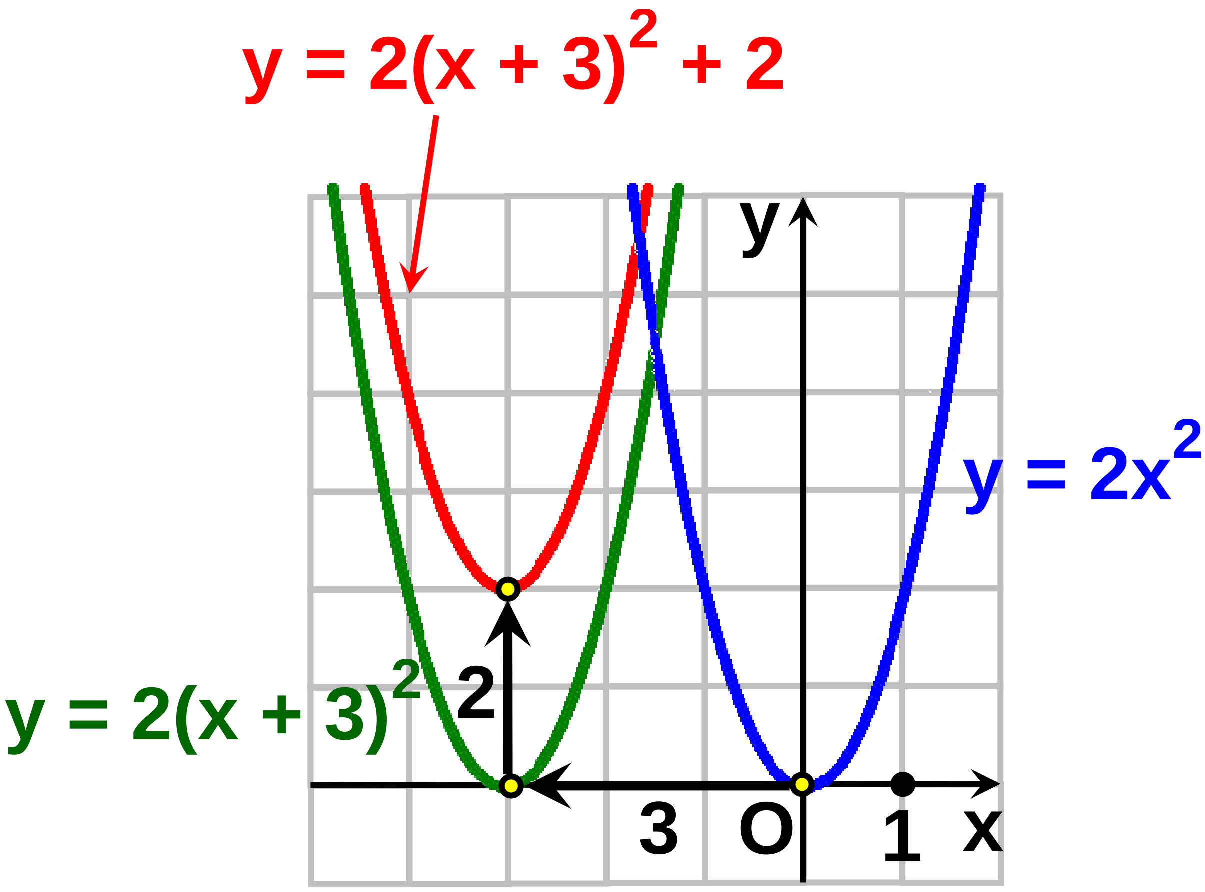
$$
\begin{aligned}
g(x) &= 2x^2 + 12x + 20 \\
&= 2(x^2 + 6x + 10) \\
&= 2[x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 10] \\
&= 2(x + 3)^2 + 1 \\
&= 2(x + 3)^2 + 2
\end{aligned}
$$

Έτσι έχουμε

$$g(x) = 2(x + 3)^2 + 2$$

Επομένως, για να παραστήσουμε γραφικά την g , χαράσσουμε πρώτα την $y = 2(x + 3)^2$ που προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = 2x^2$ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά, και στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = 2(x + 3)^2 + 2$ που προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y = 2(x + 3)^2$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

Άρα, η γραφική παράσταση της $g(x) = 2(x + 3)^2 + 2$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y = 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Είναι δηλαδή μια παραβολή ανοικτή προς τα άνω με κορυφή το σημείο Κ(-3,2) και άξονα συμμετρίας την ευθεία x = -3.



Θα μελετήσουμε τώρα τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$.

Όπως είδαμε στην §3.2 (μορφές τριωνύμου), η f(x) παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}$$

Επομένως η γραφική της παράστα-ση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y = \alpha x^2$, μιας οριζόντιας και μιας κατακόρυ-φης, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο

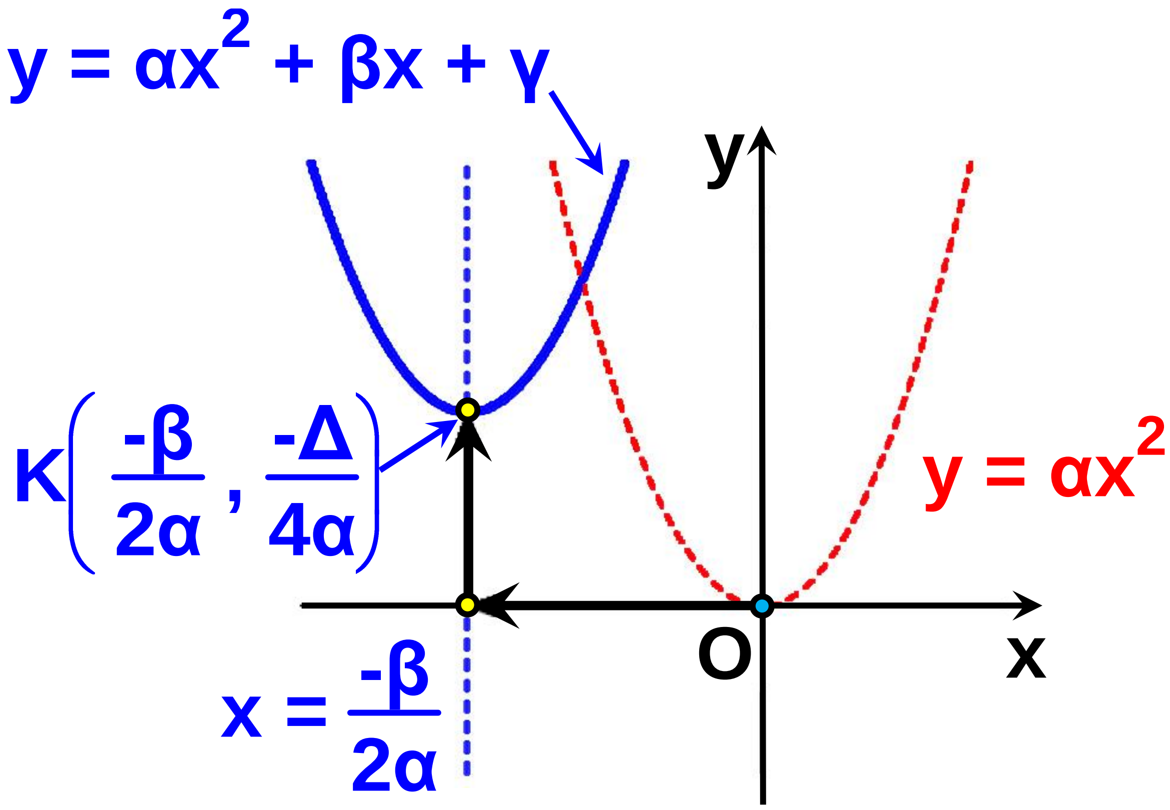
$K = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$. Συνεπώς είναι

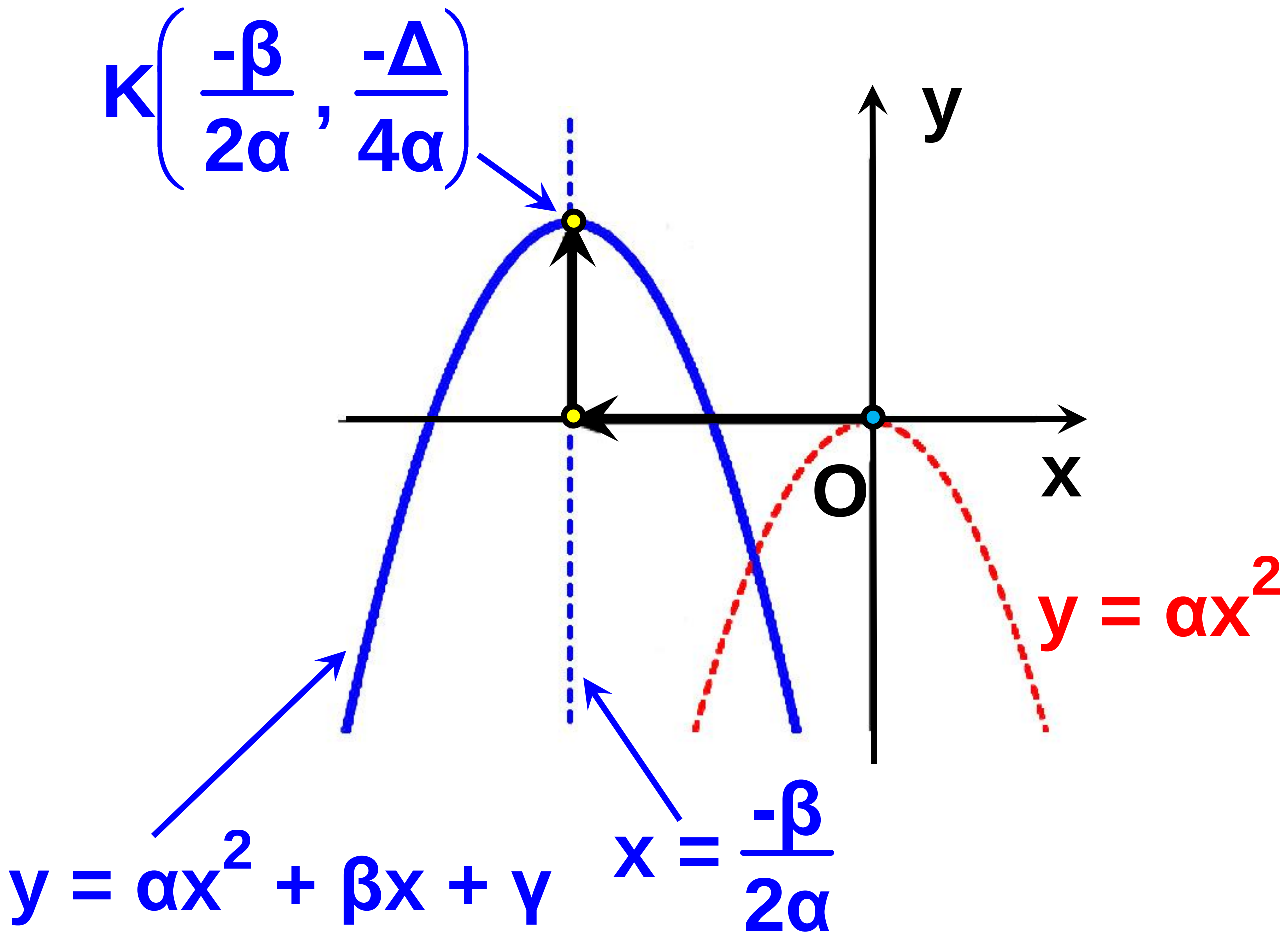
και αυτή μια παραβολή, που έχει

κορυφή το σημείο $K = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

άξονα συμμετρίας την ευθεία

$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.


y = αx² + βx + γ
y
K(-β/2α , -Δ/4α)
y = αx²
O
x
x = -β/2α


K(-β/2α , -Δ/4α)
y
x
O
y = αx²
y = αx² + βx + γ
x = -β/2α

Άρα, η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$:

- **Αν $\alpha > 0$,**

✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]$

και γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$$\left[-\dfrac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$$

✓ Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ **, το** $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right) = -\dfrac{\Delta}{4\alpha}$ **.**

x	$-\infty$	$\dfrac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $\alpha > 0$	$-\infty$ ↘	$\dfrac{-\Delta}{4\alpha}$ min	↗ $+\infty$

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παραπάνω πίνακα.

- **Αν $\alpha < 0$, η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$:**

✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ **και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα** $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$

✓ Παρουσιάζει μέγιστο $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, **το** $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $\alpha > 0$	$-\infty$ ↗	$\frac{-\Delta}{4\alpha}$ max	↘ $+\infty$

Τέλος η γραφική παράσταση της *f* είναι μια παραβολή που τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Γ(0, y) , διότι *f*(0) = y, ενώ για τα σημεία τομής της με τον άξονα x'x παρατηρούμε ότι:

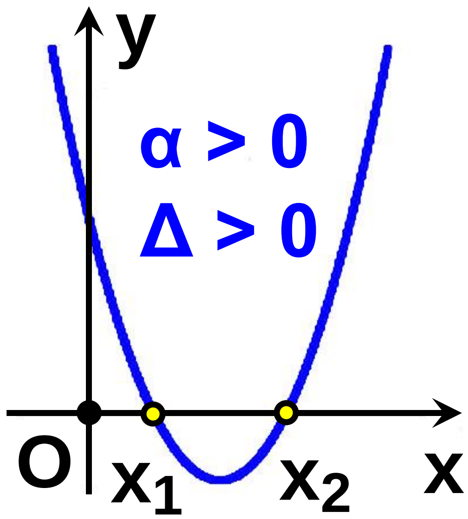
•Αν Δ > 0, το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + y$ έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 και επομένως η παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + y$ τέμνει τον άξονα x'x σε δύο σημεία, τα $A(x_1,0)$ και $B(x_2,0)$ (Σχ. α')·

• Αν Δ = 0, το τριώνυμο έχει διπλή

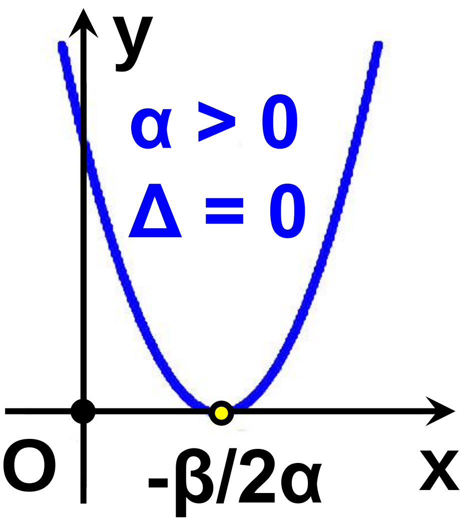
ρίζα την $-\frac{\beta}{2\alpha}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η παραβολή εφάπτεται του άξονα x'x στο σημείο $A\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, 0\right)$ (Σχ· β')·

- Αν $\Delta < 0$, το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επομένως η παραβολή δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα x'x (Σχ. γ').

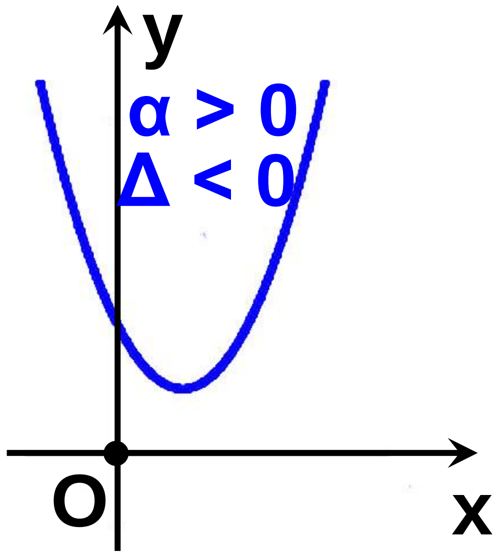
Η γραφική παράσταση της *f* εξαρτάται από το πρόσημο των α και Δ και φαίνεται κατά περίπτωση στα παρακάτω σχήματα:



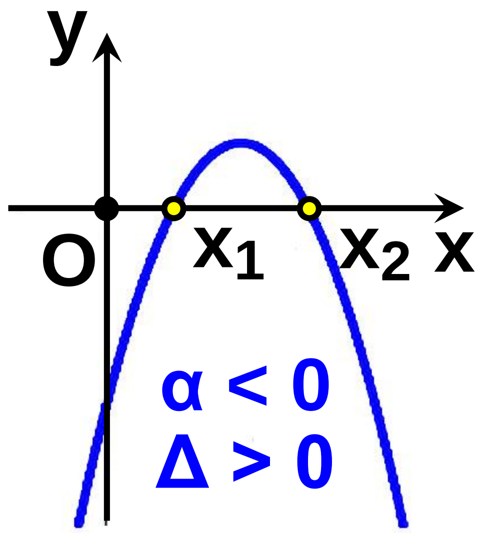
<u>Σχήμα α'</u>



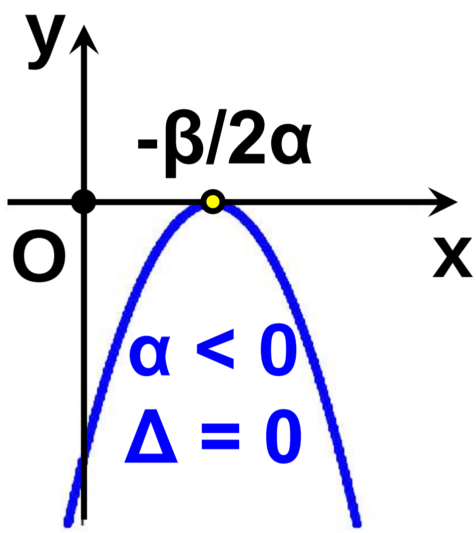
<u>Σχήμα β'</u>



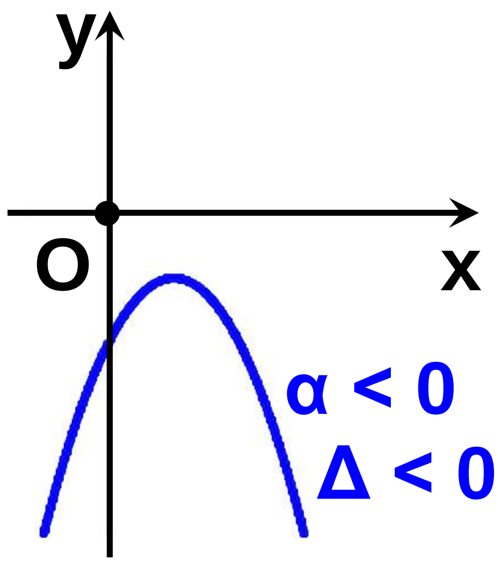
Σχήμα γ'



Σχήμα α'



Σχήμα β'



Σχήμα γ'

Τα συμπεράσματα της §3.2 για το πρόσημο του τριωνύμου προκύπτουν άμεσα και με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

ΛΥΣΗ

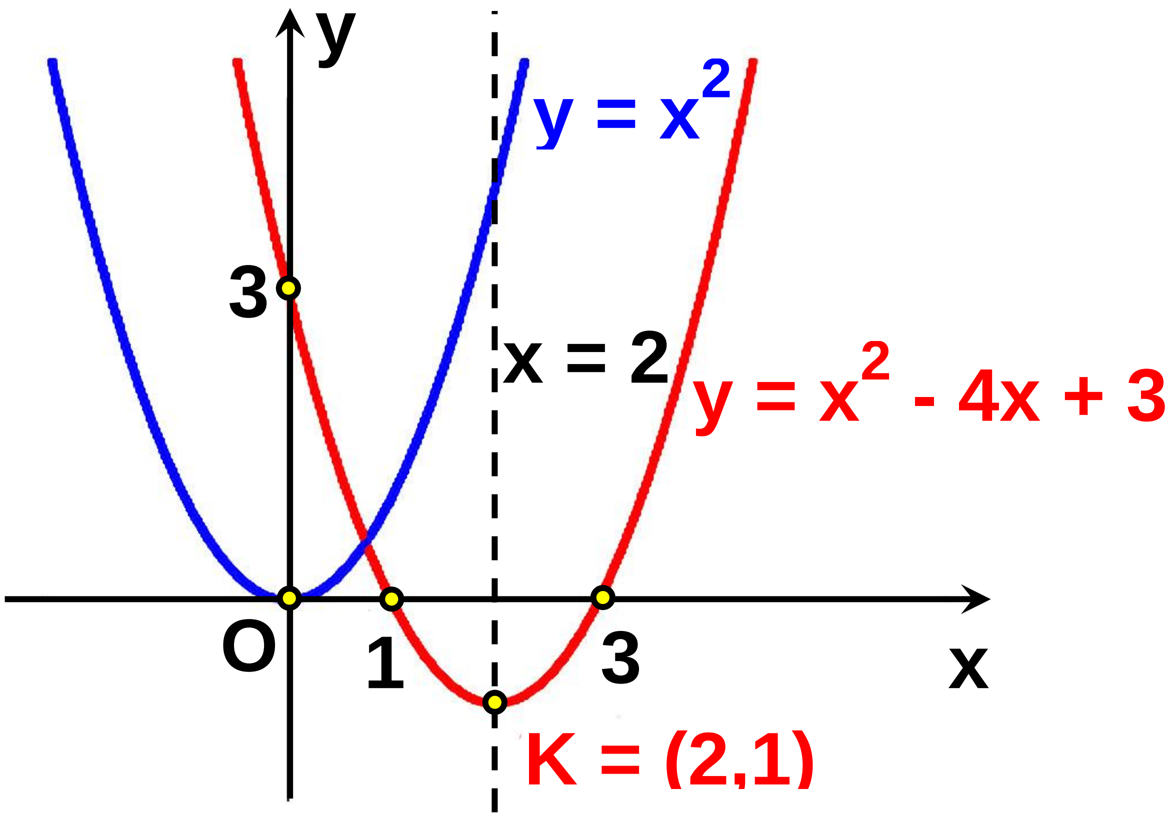
Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$

είναι $\alpha = 1 > 0$, $\dfrac{-\beta}{2\alpha} = 2$ και

$$\frac{-\Delta}{4\alpha} = f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = f(2) = -1\,.$$

Επομένως έχουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) = x^2 - 4x + 3$	$+\infty$ ↘	-1 min	↗ $+\infty$



Δηλαδή η συνάρτηση *f*,

✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞,2] και γνησίως αύξουσα στο [2, +∞),

✓ Παρουσιάζει για x = 2 ελάχιστο, το *f*(2) = -1.

Επιπλέον, η γραφική παράσταση της *f* είναι μια παραβολή η οποία:

✓ Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 2 και

✓ Τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία με τετμημένες 1 και 3 αντιστοίχως,

που είναι οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$, και τον άξονα y'y στο σημείο με τεταγμένη 3.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ στη μορφή $f(x) = α(x - p)^2 + q$ και στη συνέχεια να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$ θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της f.

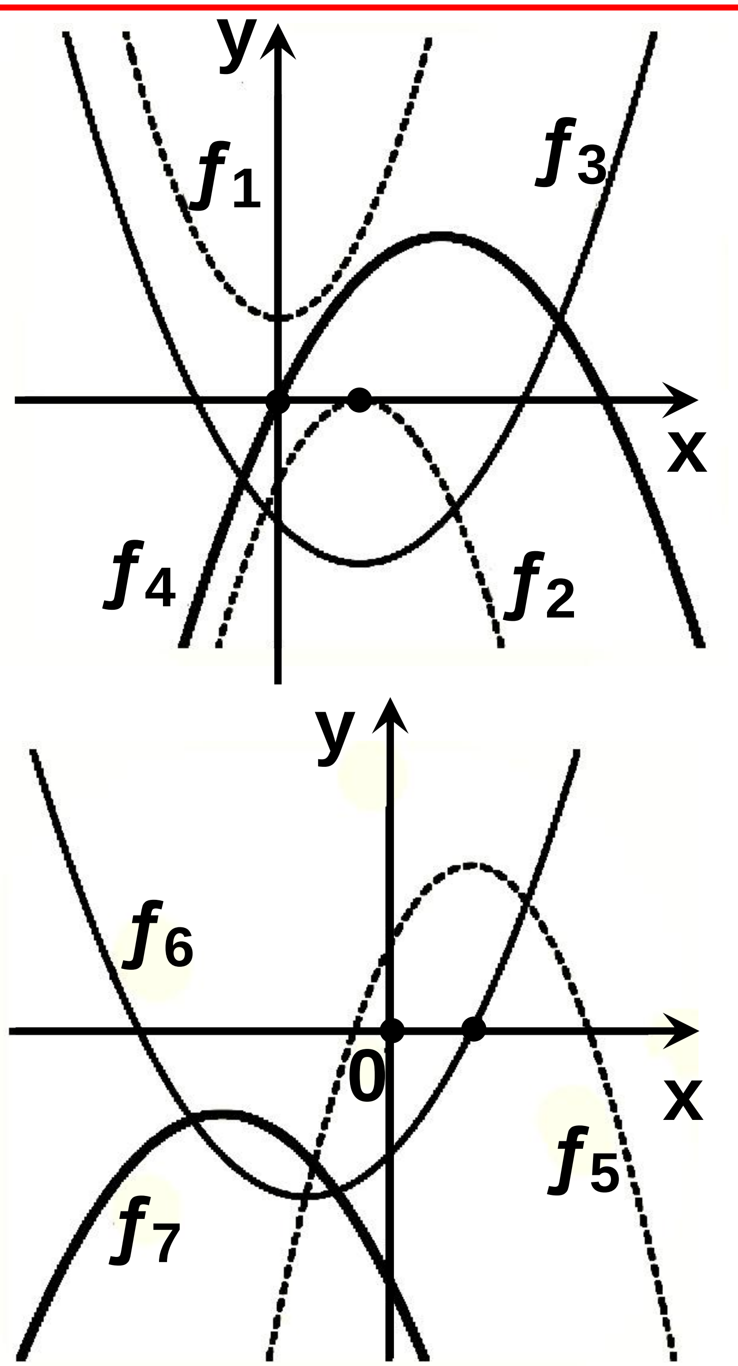
ii) Να κάνετε το ίδιο και για τη συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 8x - 9$, θεωρώντας ως g την $g(x) = -2x^2$.

2. Να βρείτε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ και
β) $g(x) = -3x^2 - 5x + 2$.

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις
α) $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ και
β) $g(x) = -2x^2 + 8x - 9$.

4. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις επτά τριωνύμων, δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να συμπληρώσετε τις στήλες του πίνακα που ακολουθεί με το πρόσημο των συντελεστών και της διακρίνουσας των αντίστοιχων τριωνύμων.



Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
α	+						
β	0						
γ	+						
Δ	-						

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **Δίνεται η παραβολή $y = x^2 + (k+1)x + k$. Να καθορίσετε τις τιμές του k, για τις οποίες η παραβολή:**

i) Εφάπτεται του άξονα x' x.

ii) Έχει τον y'y άξονα συμμετρίας.

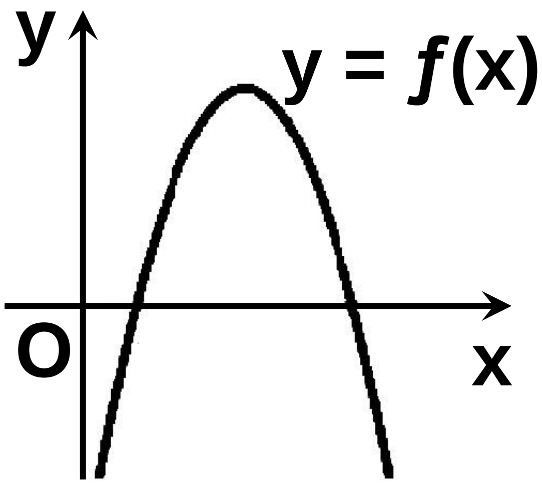
iii) Έχει για κορυφή ένα σημείο με τεταγμένη -4. Ποια είναι η τετμημένη της κορυφής;

2. **Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση ενός τριωνύμου $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε:**

i) Το πρόσημο του α.

ii) Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ και

iii) Τους συντελεστές του τριωνύμου, αν δίνεται ότι β = 6.



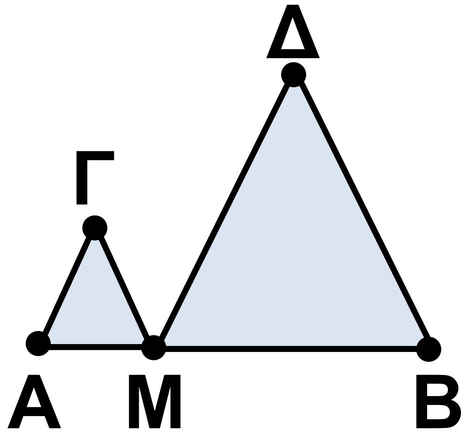
3. Οι διαστάσεις x,y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται, έτσι ώστε η περίμετρος του να παραμένει σταθερή και ίση με 20 μ .

i) Να εκφράσετε το y συναρτήσει του x και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο Ε = f(x) που δίνει το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του x.

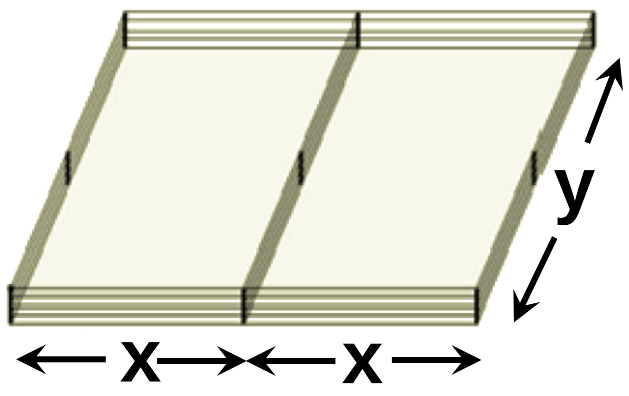
ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν μεγιστοποιείται για x = 5 και να βρείτε τη μέγιστη τιμή του.

4. Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6cm. Με πλευρές τα ΜΑ και ΜΒ

κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα. Για ποια θέση του Μ το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ελάχιστο;



5. **Ένας κτηνοτρόφος έχει σύρμα 200m και θέλει να περιφράξει δύο συνεχόμενους ορθογώνιους υπαίθριους χώρους με διαστάσεις x και y, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για ποιες τιμές των x και y το εμβαδόν και των δύο χώρων μεγιστοποιείται;**



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1.	**Αν η παραβολή $y = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ διέρχεται από το σημείο Α(1,2), τότε βρίσκεται στο 3ο και 4ο τεταρτημόριο.**	**Α**	**Ψ**
2.	**Αν το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$, τότε έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 1$.**	**Α**	**Ψ**

3.	Για οποιουσδήποτε $α, β \in R$ η παραβολή $y = αx^2$ και η υπερβολή $y = \frac{β}{x}$ έχουν ένα και μοναδικό κοινό σημείο.	Α	Ψ
4.	Η υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ και η ευθεία $y = -x$ τέμνονται.	Α	Ψ

ΙΙ. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω δύο περιπτώσεις με τα σύμβολα της ισότητας ή της ανισότητας.

1. Αν το τριώνυμο $f(x) = 2x^2 + βx + γ$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$, τότε θα ισχύει:

$f(-5)$ … 0 , $f(1)$ … 0, $f(5)$ … 0,
γ … 0, β … -4.

2. Αν το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + βx + γ$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = -3$ και $x_2 = 1$, θα ισχύει:

$f(-5)$ … 0, $f(-2)$ … 0 , $f(5)$ … 0,
γ … 0, β … -2.

III. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = αx^2 + βx + γ$, α ≠ 0. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν α = 2 και το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο Κ (1, -3), τότε

Α) $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$
Β) $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$
Γ) $f(x) = 2(x + 1)^2 + 3$
Δ) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$.

2. Αν $f(1) < 0$, $f(3) > 0$ και $f(5) < 0$, τότε

Α) Δ = 0 και α > 0
Β) Δ > 0 και α > 0
Γ) Δ > 0 και α < 0 .

3. Αν το τριώνυμο έχει κορυφή το σημείο Κ(1,2) και α > 0 , τότε:

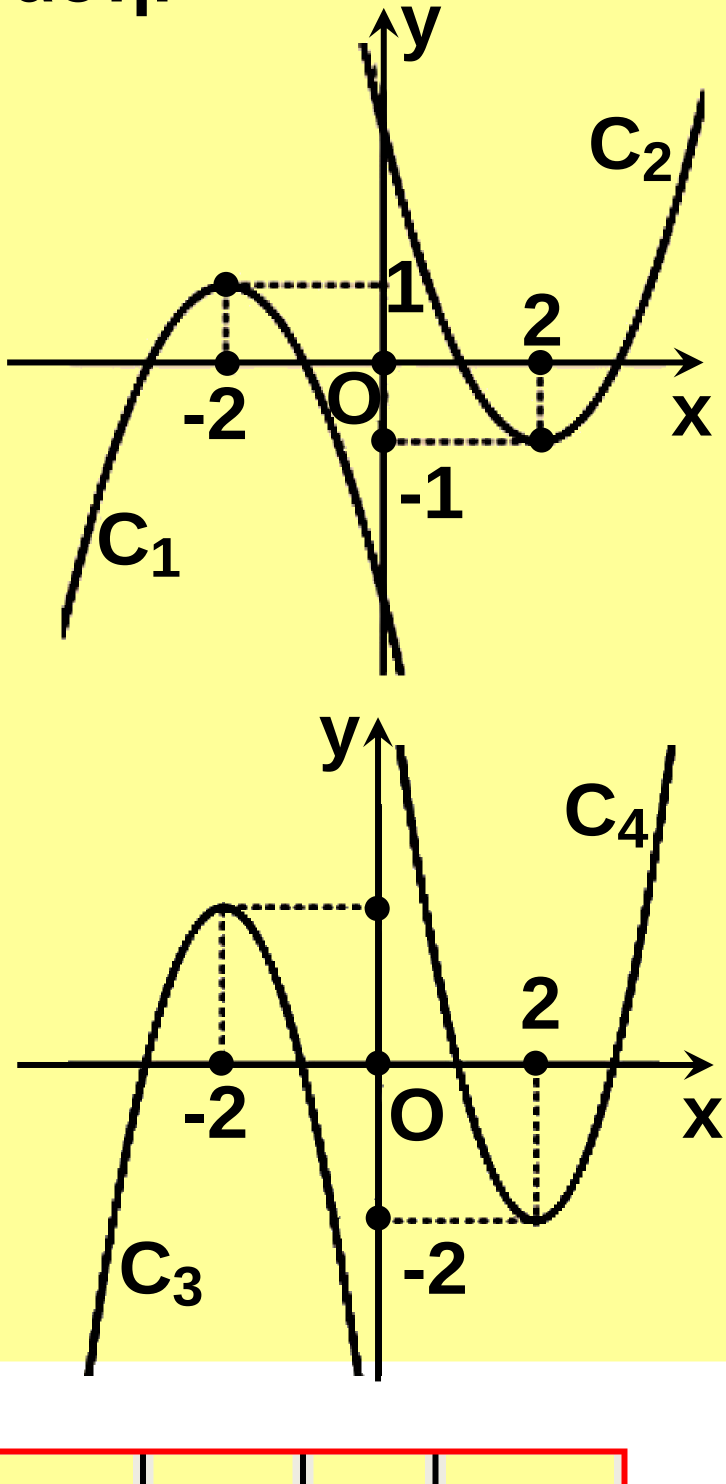
Α) Δ > 0 **Β) Δ = 0**
Γ) Δ < 0 **Δ) y < 0.**

4. Αν το τριώνυμο έχει κορυφή το σημείο Κ (1,0), τότε

Α) β = 0 **Β) Δ < 0**
Γ) Δ > 0 **Δ) Δ = 0.**

IV. Οι παρακάτω καμπύλες C_1, C_2, C_3 και C_4 είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
$f_1(x) = x^2 - 4x + y_1$,
$f_2(x) = 2x^2 - 8x + y_2$,
$f_3(x) = -x^2 - 4x + y_3$ και
$f_4(x) = -2x^2 - 8x + y_4$, όχι όμως με την ίδια σειρά. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις παραπάνω

συναρτήσεις με τη γραφική της παράσταση.



f_1	f_2	f_3	f_4

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1.

i) Να αποδείξετε την ταυτότητα
$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = \frac{1}{2}[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$.

ii) Να αποδείξετε ότι για όλους τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

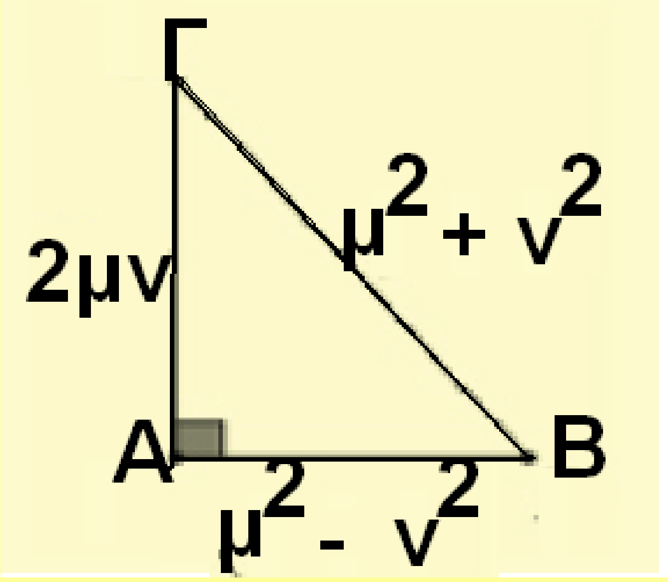
Πότε ισχύει η ισότητα;

2. **Λέμε ότι μια τριάδα θετικών ακεραίων (β, γ, α) είναι πυθαγόρεια τριάδα όταν $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, δηλαδή όταν οι β, γ, α είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.**

i) Αν (β, γ, α) είναι μια πυθαγόρεια τριάδα και κ είναι ένας θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι και η τριάδα ($\kappa\beta, \kappa\gamma, \kappa\alpha$) είναι επίσης πυθαγόρεια τριάδα.

ii) Αν μ και ν θετικοί ακέραιοι με μ>ν, να δείξετε ότι η τριάδα ($μ^2$ - $ν^2$, 2μν, $μ^2$ + $ν^2$) είναι πυθαγόρεια τριάδα.
Στη συνέχεια να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις πυθαγόρειες τριάδες που αντιστοιχούν στις τιμές των μ και ν που δίνονται στις δυο πρώτες στήλες:

μ	ν	$μ^2$-$ν^2$	2μν	$μ^2$+$ν^2$
2	1			
3	1			
3	2			
5	2			
5	3			
4	1			



3.

Α) Να αποδείξετε ότι

$$\alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$$

Τι σημαίνει η ανισότητα αυτή για ένα ορθογώνιο με διαστάσεις α και β ;

Πότε ισχύει η ισότητα;

Β) Με τη βοήθεια της παραπάνω ανισότητας (ή και με άλλο τρόπο), να αποδείξετε ότι:

i) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο Ρ το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.
ii) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδό Ε το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

4. Δίνεται η εξίσωση
$3(x + 1) - \alpha x = 4,\ \alpha \in \mathbb{R}$

i) Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$
ii) Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει λύση μεγαλύτερη του 1;

5. Δίνεται η εξίσωση
$\lambda^2(\chi - 1) + 3\lambda = \chi + 2,\ \lambda \in \mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή γράφεται ισοδύναμα:
$(\lambda - 1)(\lambda + 1)\,\chi = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό ¼

6. Από τη φυσική γνωρίζουμε ότι στην κατακόρυφη βολή ενός σώματος με αρχική ταχύτητα v_0 το ύψος h του σώματος συναρτήσει του χρόνου t της κίνησης του δίνεται από τον τύπο

$$h(t)=v_o t-\frac{1}{2}gt^2$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Α) Αν v_0 = 60m/sec και g10m/sec^2 :

i. **Να βρείτε πότε το σώμα θα φθάσει σε ύψος h =180 μέτρα.**
ii. **Να βρείτε πότε το σώμα θα βρεθεί σε ύψος h =100 μέτρα.**

Ποια είναι η ερμηνεία των προηγούμενων απαντήσεων;
B) Στη γενική περίπτωση όπου

$$h(t)=v_o t-\frac{1}{2}gt^2$$

με τα v_0 και g σταθερά, να βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει, ώστε το σώμα να φθάσει σε δεδομένο ύψος h_0 .

7. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$f(x) = |x| - 2$ και $g(x) = 2-|x|$

και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *f* και g.

8. A) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις

γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x| - 1 \text{ και } g(x) = |x| - 3$$

και με τη βοήθεια αυτών να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης

$$|x| - 1 < |x| - 3$$

Β) Στη συνέχεια να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

9.

Α) Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = |x|,\ g(x) = |x| - 3 \text{ και}$$
$$h(x) = ||x| - 3|$$

Β)

Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων να προσδιορίσετε το πλήθος των

λύσεων του συστήματος

$$\begin{cases} y = \left| |x| - 3 \right| \\ y = \alpha \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του α $\in\mathbb{R}$.

10.

Σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy.

i. **Να δείξετε ότι η εξίσωση $y^2 - x^2 = 0$ παριστάνει τις διχοτόμους δ_1 και δ_2 των γωνιών των αξόνων τις οποίες και να σχεδιάσετε.**

ii. **Ποια είναι η απόσταση ενός σημείου Μ (x, y) του επιπέδου από το σημείο Κ (α, 0) του άξονα x′x ; Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x - \alpha)^2 + y^2 = 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$ παριστάνει στο επίπεδο κύκλο C με κέντρο**

Κ και ακτίνα 1. Σχεδιάστε τον κύκλο για μια τιμή του α.

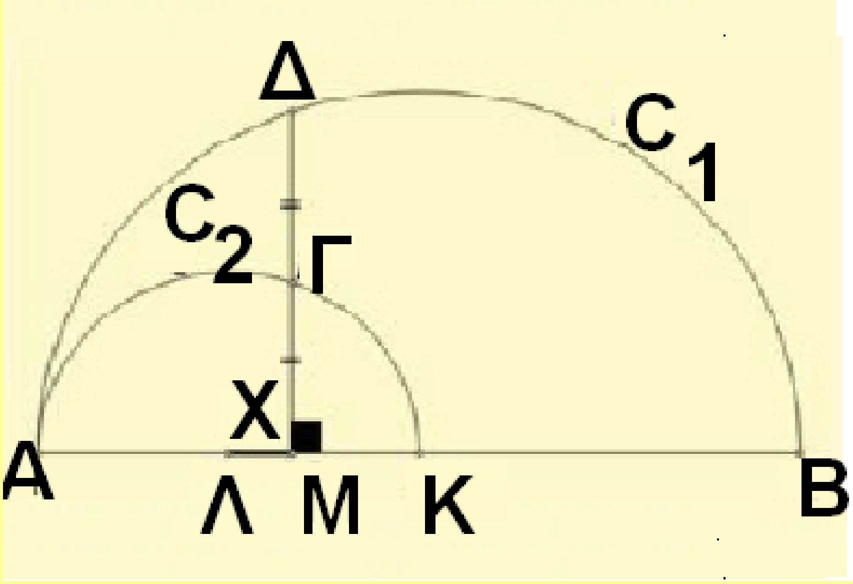
iii. Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων του συστήματος

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 0 \\ (x-\alpha)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

11.

Στο παρακάτω σχήμα τα C_1 και C_2 είναι ημικύκλια με κέντρα Κ και Λ και ακτίνες $R_1 = 6cm$ και $R_2 = 3cm$ αντιστοίχως, ενώ το Μ είναι ένα σημείο της διακέντρου ΚΛ και η ΜΔ είναι κάθετη στην ΚΛ. Να βρείτε το μήκος x του τμήματος ΛΜ, αν γνωρίζουμε ότι το σημείο Γ είναι μέσο του ΜΔ.



12.

Θεωρούμε έναν άξονα x'x και παίρνουμε πάνω σ' αυτόν τα σταθερά σημεία Α(−1) , Β(1) και ένα μεταβλητό σημείο Μ(x) .

Θέτουμε

$f(x) = (MA) + (MB)$ και

$g(x) = |\ (MA) - (MB)\ |$

i. **Να αποδείξετε ότι:**
$f(x) = |x+1| + |x-1|$ και
$g(x) = |\ |x+1| + |x-1|\ |$

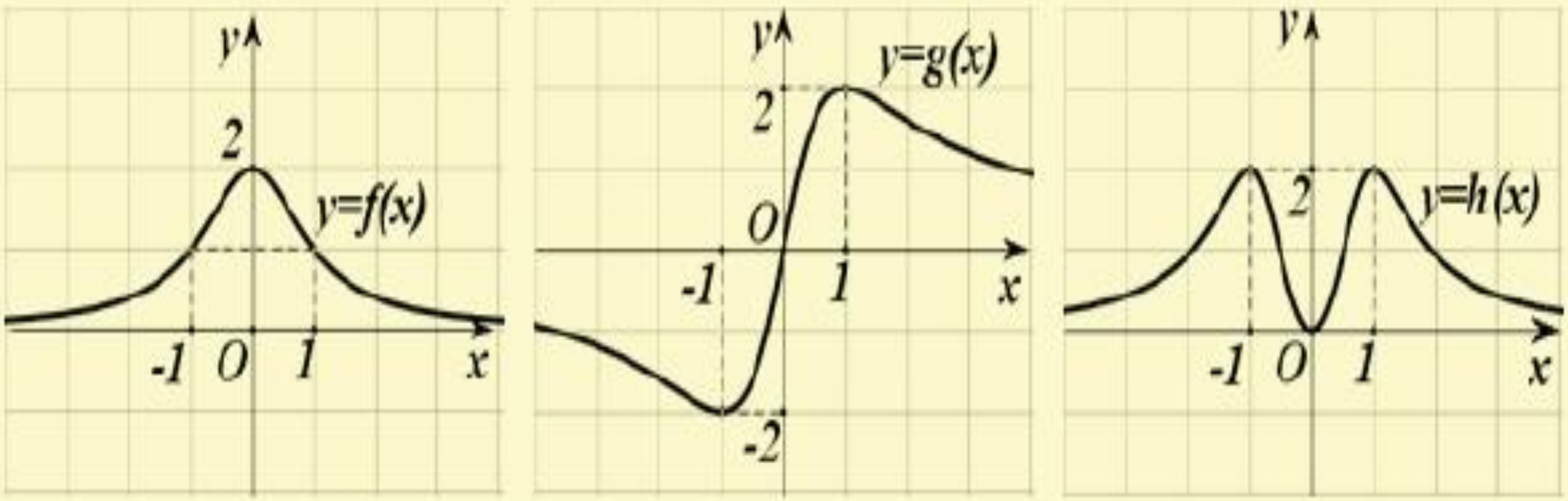
ii. **Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g.**

iii. Να βρείτε με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή (εφόσον υπάρχουν) των συναρτήσεων *f* και g, καθώς και τις θέσεις στις οποίες παρουσιάζονται.

13.

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1}, \qquad g(x) = \frac{4x}{x^2+1} \quad \& \qquad h(x) = \frac{4x^2}{x^4+1}$$



i. Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων f, g, h, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.
ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

14.
Α) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{x}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
ii. Να αποδείξετε ότι αν το σημείο Μ(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, το σημείο Μ '(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2$.
iii. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε πρώτα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g

και στη συνέχεια, με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Ποιο είναι το είδος της μονοτονίας και ποιο το ακρότατο της συνάρτησης f;

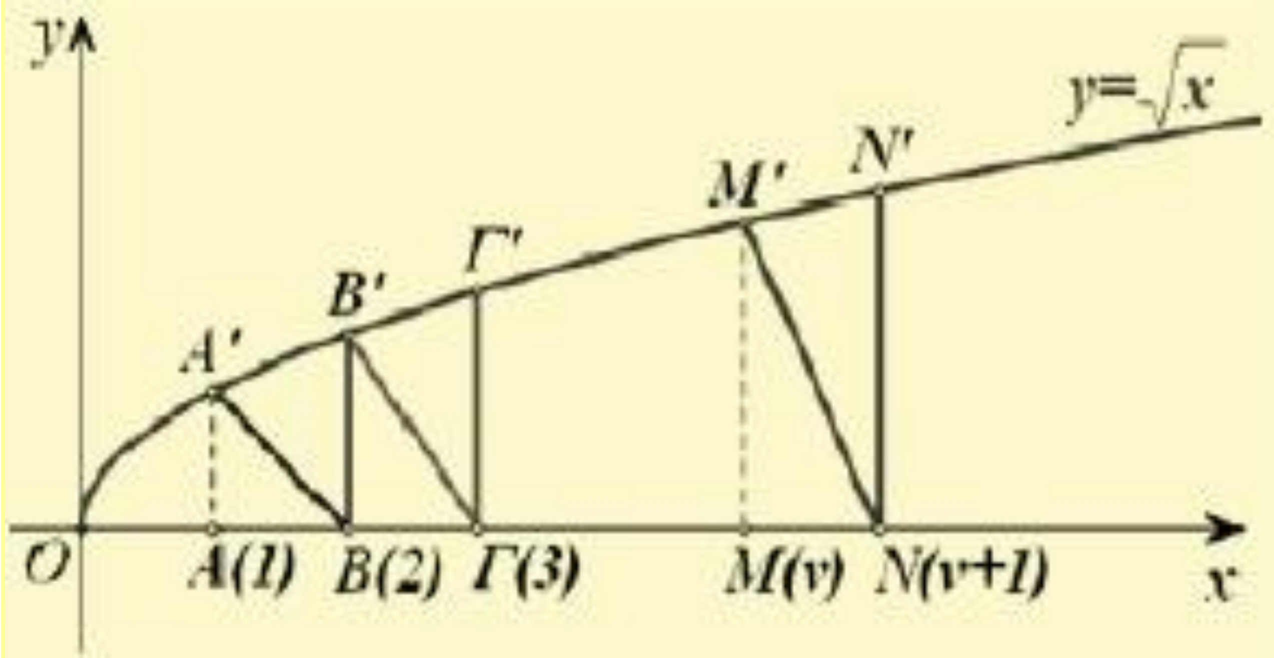
Β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x)=\sqrt{|x|}$$

είναι άρτια και στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της

$$f(x)=\sqrt{x}$$



Αν Α', Β', Γ ' , …, Μ ', Ν ' είναι τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες 1, 2, 3,…, ν, ν +1 αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα

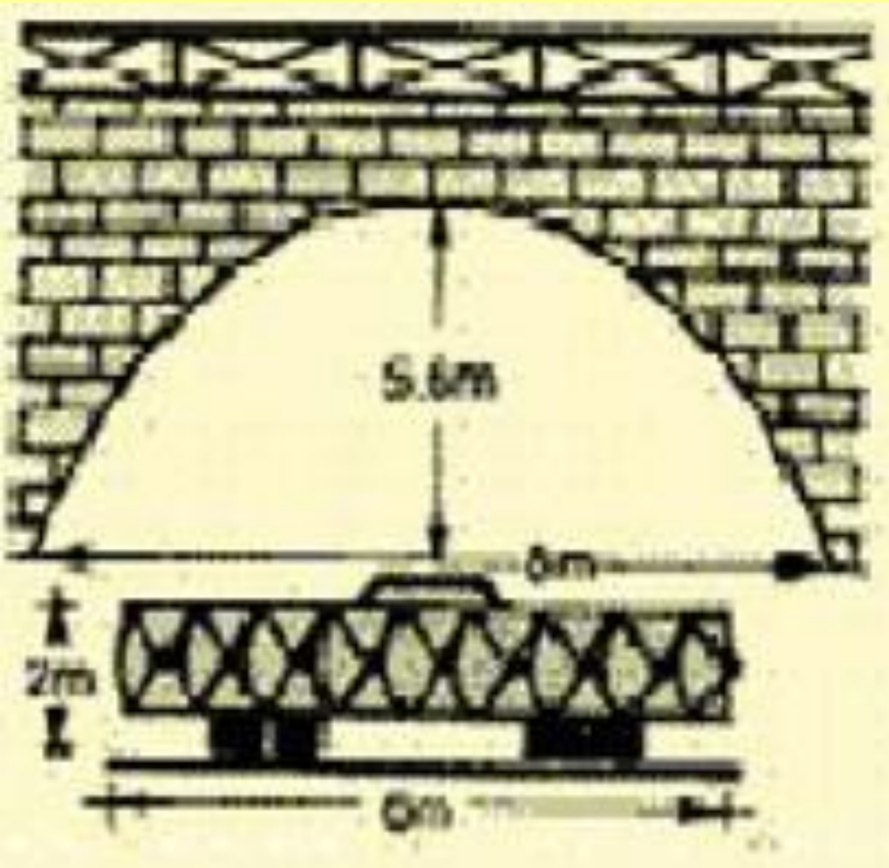
$$B\overset{\triangle}{A'}B',$$

$$\Gamma\overset{\triangle}{B'}\Gamma',$$

$$N\overset{\triangle}{M'}N'$$

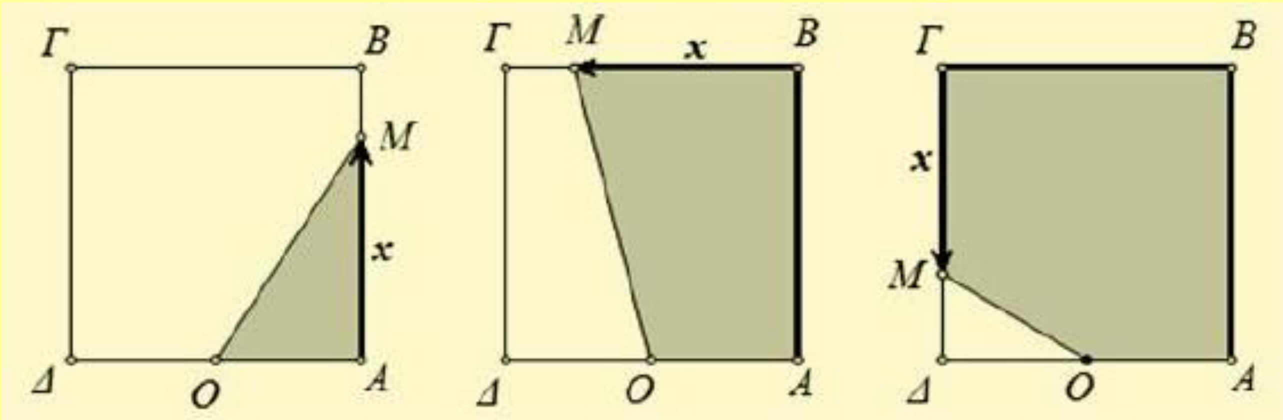
είναι ισοσκελή.

15.
Μία γέφυρα έχει ένα παραβολικό τόξο του οποίου το πλάτος είναι 8m και ύψος είναι 5,6m. Κάτω από τη γέφυρα θέλει να περάσει γεωργικό μηχάνημα του οποίου η καρότσα έχει πλάτος 6m και ύψος 2m. Μπορεί το μηχάνημα να περάσει;



16.

Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 20cm και το μέσον Ο της ΑΔ . Ένα κινητό σημείο Μ ξεκινά από το Α και, διαγράφοντας την πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔ , καταλήγει στο Δ .



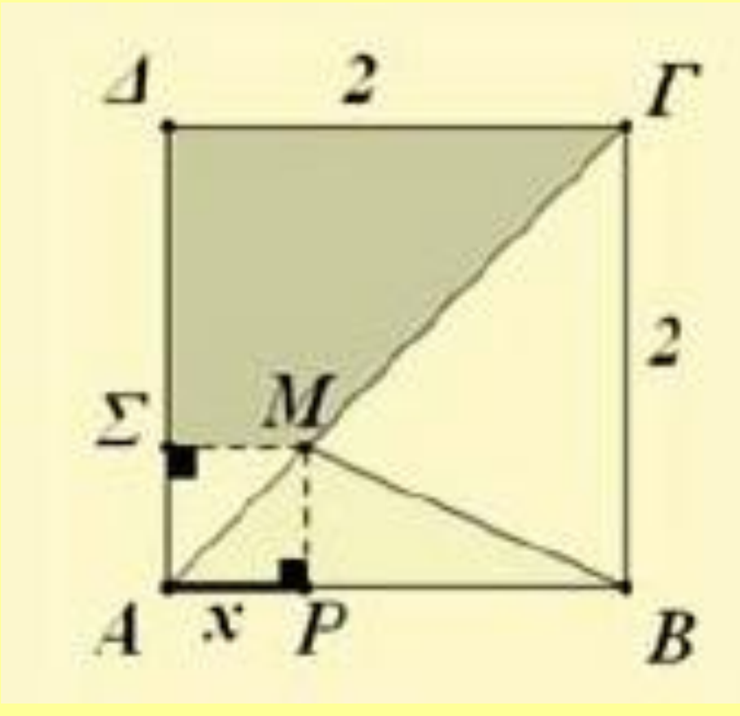
Αν με x συμβολίσουμε το μήκος της διαδρομής που έκανε το κινητό Μ και με *f* (x) το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου,

i. **Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης *f*.**
ii. **Να παραστήσετε γραφικά την *f*.**

iii. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ισχύει *f* (x) = 120 cm_2.

17.

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2 μ. και το Μ είναι ένα σημείο της διαγωνίου ΑΓ με (ΑΡ) = x . Συμβολίζουμε με *f* (x) το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ και με g (x) το εμβαδόν του τραπεζίου ΜΓΔΣ .

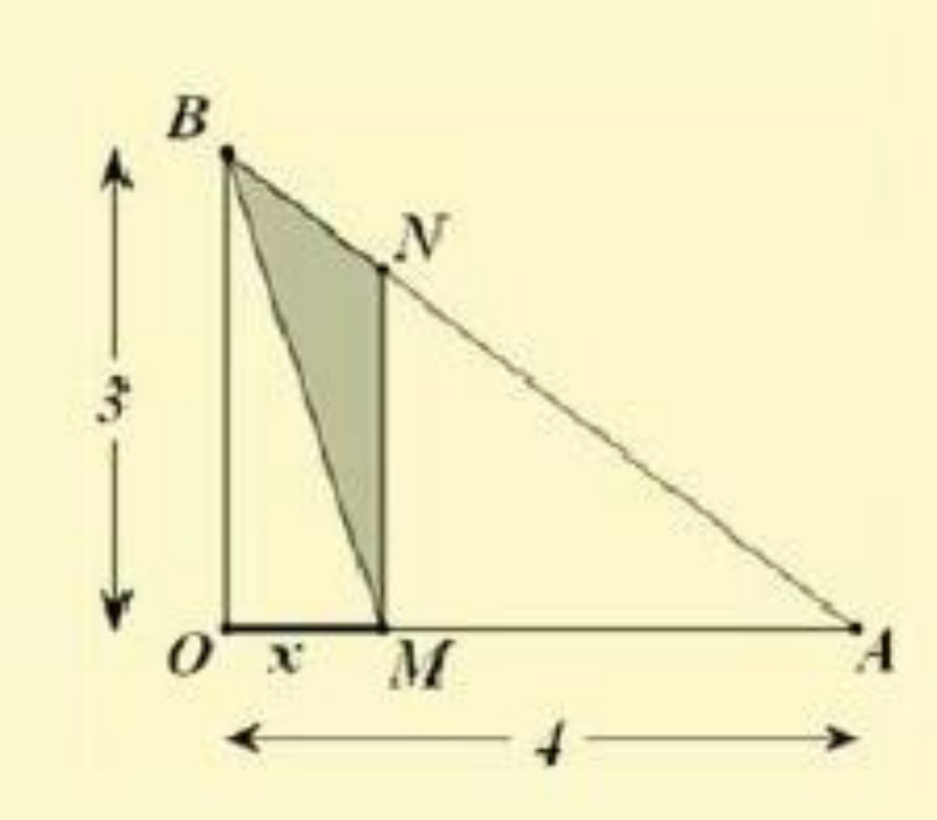


i. Να αποδείξετε ότι
$f(x) = x, 0 \leq x \leq 2$ και
$g(x) = -0{,}5x^2 + 2, 0 \leq x \leq 2$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες τα δύο εμβαδά είναι ίσα.

iii. Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις f και g και να βρείτε, με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, με προσέγγιση την τιμή του x για την οποία τα δύο εμβαδά είναι ίσα.

18.
Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο, το Μ είναι τυχαίο σημείο της ΟΑ και ΜΝ//ΟΒ. Αν (ΟΑ)=4, (ΟΒ)=3 και (ΟΜ)=x, και Ε(x) είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΝ

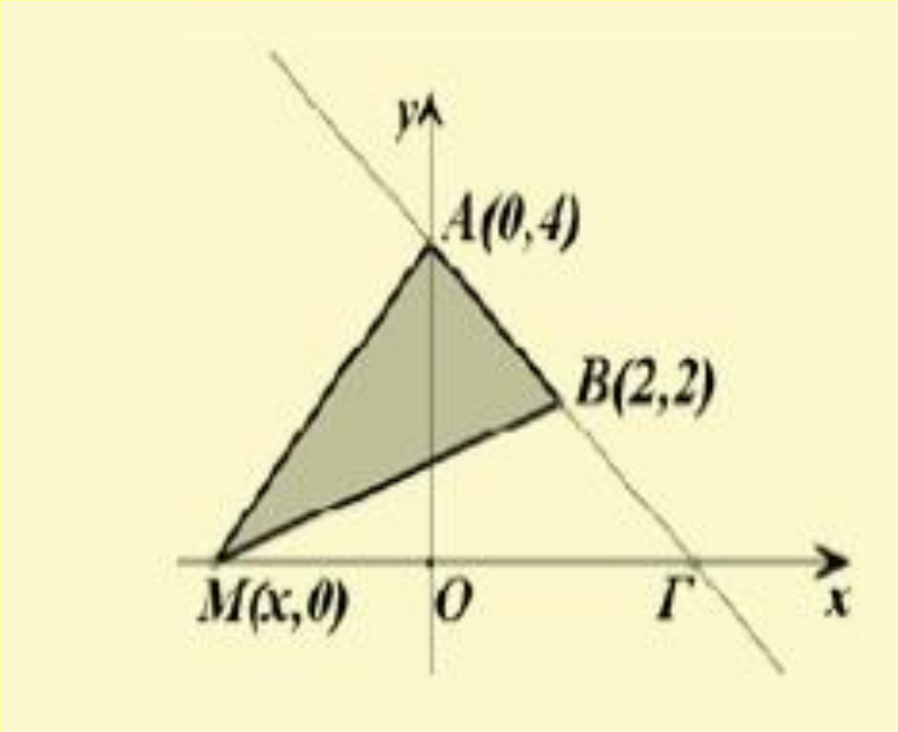


i) **Να αποδείξετε ότι**

$$(MN) = \frac{3(4-x)}{4} \text{ και } E(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x \,.$$

ii) **Να βρείτε τη θέση του M για την οποία το εμβαδόν E(x) μεγιστοποιείται. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του E(x).**

19.
Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε τα σημεία Α(0,4) και Β(2,2) , καθώς και το σημείο Μ(x,0) που κινείται κατά μήκος του άξονα x ' x .



i) **Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ στο οποίο τέμνει η ευθεία ΑΒ τον άξονα x ' x.**
ii) **Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου**

$M\overset{\triangle}{A}B$

συναρτήσει της τετμημένης x του σημείου M και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

20.

Σε ένα τμήμα AB = 10km μιας λεωφόρου πέφτει συνεχώς χιόνι και το ύψος του χιονιού αυξάνεται 1cm την ώρα. Όταν αρχίζει η χιονόπτωση ένα εκχιονιστικό μηχάνημα αρχίζει από το άκρο A να καθαρίζει το χιόνι κινούμενο κατά μήκος του δρόμου με ταχύτητα 10km/h . Μόλις φτάσει στο B γυρίζει και καθαρίζει το δρόμο αντιστρόφως από το B προς το A και συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο.

i. Να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα για το ύψος του χιονιού στο Α , παραβλέποντας το χρόνο στροφής στα Α και Β.
ii. Να κάνετε το ίδιο για το ύψος του χιονιού στο μέσο Μ του ΑΒ.

21.
Έστω ο δειγματικός χώρος Ω = {0, 1, 2, 3,..., 100}. Δίνονται και οι πιθανότητες

$$P(\kappa)=\frac{1}{2^{\kappa}}$$

κ = 1, 2,..., 100.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα P(0).

22.
Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων

και Α, Β υποσύνολα του Ω. Υποθέτουμε ότι $P(A')\leq 0,28$ και $P(B')\leq 0,71$. Να αποδείξετε ότι

i) $P(A\cap B)\geq 1,01-P(A\cup B)$ και

ii) $A\cap B\neq \emptyset$.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

§1.1

Α' Ομάδας

1-5. Να χρησιμοποιήσετε δενδροδιαγράμματα.

6. i) Ασυμβίβαστα ii) Δεν είναι ασυμβίβαστα iii) Δεν είναι ασυμβίβαστα iv) Ασυμβίβαστα.

7. $\{ααα, αακ, ακα, ακκ, καα, κακ, κκα, κκκ\}$.

Β' Ομάδας

1. $\Omega = \{αα, αβα, αββ, βαα, βαβ, ββ\}$.

2. Να βρείτε το δειγματικό χώρο και τα ενδεχόμενα με τη βοήθεια πίνακα διπλής εισόδου.

§1.2

Α' Ομάδας

1. i) $\frac{1}{13}$ ii) $\frac{12}{13}$.

2. $\frac{1}{4}$.

3. i) $\frac{15}{40}$ ii) $\frac{25}{40}$ iii) $\frac{25}{40}$.

4. $\frac{9}{30}$.

5. i) $\frac{3}{11}$ ii) $\frac{8}{11}$.

6. i) 50% ii) 30%.

7. $\frac{11}{30}$.

8. $\frac{2}{3}$.

9. 0,4.

10. $\frac{3}{4}$.

11. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \Leftrightarrow$
$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$ κτλ.

12. 65%.

13. α) 14%   β) 12%.

14. 10%.

Β΄ Ομάδας

1. i) $\kappa + \lambda - \mu$ ii) $1 - \kappa - \lambda + \mu$
iii) $\kappa + \lambda - 2\mu$.

2. 55%.

3. $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}$.

4. Αν $P(A) = x$, τότε $P(A') = 1 - x$ κτλ.

5. Να λάβετε υπόψη ότι $A \cap B \subseteq A$ και $P(A \cup B) \leq 1$.

6. Να λάβετε υπόψη ότι $P(A') = 1 - P(A)$ και $P(A \cup B) \leq 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

§2.1

Α΄ Ομάδας

1. ii) 1 **2.** 1 **3.** i) 4.000 ii) 9.999 iii) 3 **4.** ii) 4 **5.** ii) 1 **7.** $7 \cdot 2^{\nu}$.

Β΄ Ομάδας

1. i) $\alpha - 1$ ii) $\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}$ **2.** i) $(\alpha-1)^2$ ii) 1.

3. i) x^2y^2 ii) $\dfrac{xy}{x-y}$ **4.** 1.

§2.2

Α΄ Ομάδας

1. i) Πάρτε τη διαφορά ii) Πάρτε τη διαφορά. **2.** Άθροισμα τετραγώνων.

3. i) $2, -1$ ii) $1, -2$.

4. i) $9,8$ και 10 ii) $-0,9$ και $-0,7$.

iii) $\dfrac{45}{54}$ και $\dfrac{46}{53}$ iv) $48,34$ και $50,32$.

5. i) $10,2$ και $16,2$ ii) $6,38$ και $15,68$.

6. Απαλοιφή παρονομαστών. **7.** $5-x<0$.

Β΄ Ομάδας

1. i) Απαλοιφή παρονομαστών,
ii) απαλοιφή παρονομαστών.

2. Πάρτε τη διαφορά.

3. Εκτέλεση πράξεων.

4. i) Πολλαπλασιάστε με το 2
ii) πολλαπλασιάστε με το 2.

§2.3

Α΄ Ομάδας

1. i) $\pi - 3$ ii) $4 - \pi$ iii) 1 iv) 0

2. 1 **3.** i) -1 ii) 1

4. 1 **5.** 2 ή 0 ή -2

6. i) $d(2{,}37, D) \leq 0{,}005$

ii) $2{,}365$ και $2{,}375$.

Β΄ Ομάδας

1. Χρησιμοποιήστε τριγωνική ανισότητα,

3. i) $x = y = 0$ ii) $x \neq 0$ ή $y \neq 0$.

4. i) $\frac{\alpha}{\beta} < 1 < \frac{\beta}{\alpha}$.

ii) Αρκεί να δειχθεί $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$.

5. i) $9{,}5$ έως $10{,}5$ ii) $15{,}2$ έως $16{,}8$

iii) $3{,}8\pi$ έως $4{,}2\pi$.

§2.4

Α΄ Ομάδας

1. i) 10 ii) 2 iii) $\frac{1}{10}$.

2. i) $4-\pi$ ii) 20 iii) $|x-1|$ iv) $\frac{|x|}{2}$

10. i) $\frac{10+2\sqrt{3}}{11}$ ii) $4\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$

iii) $13+2\sqrt{42}$.

Β΄ Ομάδας

2. ii) Χρησιμοποιείστε το ερώτημα (i).

3. i) $\frac{25}{6}$ ii) $\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

§3.1

Α΄ Ομάδας

1. i) 5 ii) -1 iii) -7 iv) $\frac{11}{3}$.

2. i) Αδύνατη ii) ταυτότητα.

3. i) Αν $\lambda \neq 1$, τότε $x = 1$,

αν $\lambda = 1$, ταυτότητα.

ii) Αν $\lambda \neq 2$, τότε $x = \frac{\lambda}{\lambda - 2}$,

αν $\lambda = 2$, αδύνατη.

iii) Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε $x = \frac{1}{\lambda}$,

αν $\lambda = 0$, αδύνατη,

αν $\lambda = 1$, ταυτότητα.

iv) Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε $x = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$,

αν $\lambda = 0$, ταυτότητα,

αν $\lambda = 1$, αδύνατη.

4. i) $x=2{,}5$ ii) $x=\dfrac{15}{8}$ **5.** 2.750 και 1.250 .

6. i) $t=\dfrac{v-v_0}{\alpha}$ ii) $R_1=\dfrac{R_2R}{R_2-R}$.

7. i) 4 και -1 ii) 2 και -1 .

8. i) 0 και 1 ii) -1 και 0 .

9. i) 2 και 1 ii) 1 και 2 .

10. i) 2, 1 και -1 ii) 2 και 1

11. i) -1 ii) αδύνατη,

12. i) αδύνατη ii) $x\in\mathbb{R}$ με $x\neq 0$ και $x\neq -2$ iii) αδύνατη

iv) $x\in\mathbb{R}$ με $x\neq 1$ και $x\neq -1$.

13. $(-1,0,1)$, $(1,2,3)$ και $(-3,-2,-1)$.

14. i) 4 και -1 ii) 3 και $\dfrac{5}{3}$

iii) 1 iv) αδύνατη.

15. i) -1 και 1 ii) αδύνατη.

16. i) -5 και $-\dfrac{9}{5}$ ii) 1 και 3 .

Β΄ Ομάδας

2. $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, **3.** $50ml$

4. 3 λεπτά,

5. Αν $\alpha \neq 0$, τότε $x = -\dfrac{\alpha}{2}$,

αν $\alpha = 0$, τότε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$.

6. $x = 0$, **7.** -2 και 2 , **8.** 2 και $\dfrac{3}{2}$.

§3.2

Α΄ Ομάδας

1. i) 5 ii) 3 iii) 1 .

2. i) -5 ii) -3 iii) -1 .

3. i) 8 και -8 ii) 3 και -3 iii) 2 και -2 .

4. i) 0 και 2 ii) 0 και -1 iii) 0 .

5. 3, 3 και 9 . **6.** i) 3 ii) $-\frac{1}{5}$ iii) 1 και 4 .

§3.3

Α΄ Ομάδας

1. i) $\frac{3}{2}$ και 1 ii) 3 iii) αδύνατη.

2. i) 1,3 και $-1,3$ ii) 0 και 2 iii) αδύνατη.

3. i) $\Delta = 4(\lambda - 1)^2$ ii) $\Delta = (\alpha - \beta)^2$.

4. 1 και -1 , **5.** $\Delta = -4(\alpha - \beta)^2$.

6. i) $x^2-5x+6=0$ ii) $2x^2-3x+1=0$

iii) $x^2-10x+1=0$.

7. i) 5 και -3 ii) $\dfrac{9+\sqrt{41}}{2}$ και $\dfrac{9-\sqrt{41}}{2}$.

8. i) $\sqrt{5}$ και $\sqrt{3}$ ii) 1 και $-\sqrt{2}$.

9. $-(\alpha+\beta)$ και $(\beta-\alpha)$. **10.** 24 και 10.

11. i) $3,\ -3,\ 4$ και -4. ii) 5 και -5

iii) $6,\ -6,\ 2$ και -2, **12.** 0 και 2.

13. $1, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ και $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

14. i) 2 και -3 ii) -1.

15. i) 2 και -2 ii) $-\dfrac{1}{2}$ και $\dfrac{1}{2}$ iii) αδύνατη.

Β΄ Ομάδας

3. -7 και 1.   **4.** Θέτουμε όπου x το $\frac{1}{\rho}$.

5. i) α και $-\frac{1}{\alpha}$ ii) β και $\frac{\alpha^2}{\beta}$.

6. i) $\Delta = 4\lambda^2 + 32$ ii) -2 και 4, $\lambda = -1$.

7. 3, 4 και 5.   **8.** 1.   **9.** 12 ώρες, 24 ώρες.

10. $\alpha = 9$, ρίζες είναι οι : $3, -3, 1$ και -1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

§4.1

Α΄ Ομάδας

1. i) $x < -\frac{3}{10}$ ii) αδύνατη   iii) $x \in \mathbb{R}$.

2. i) $1 \le x < 3$,   **3.** Όχι.,   **4.** 0, 1 και 2.

5. i) $x \in (-3,3)$ ii) $x \in [-3,5]$

iii) $x \in (-3,2)$.

6. i) $x \in (-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$

ii) $x \in (-\infty,-3) \cup (5,+\infty)$

iii) $x \in (-\infty,-3] \cup [2,+\infty)$, **7.** i) $x \geq 3$

ii) $x \leq \frac{1}{3}$, **8.** i) $x \in (-1,3)$ ii) $x \in \mathbb{R}$.

9. $x \in [-2,8]$ **10.** $|x+2| < 5$ **11.** $[5,10]$

Β΄ Ομάδας

1. i) $x \in \left[1, \frac{7}{4}\right]$ ii) $x \in \left[\frac{4}{3}, 2\right]$.

2. i) $x \in [-4,-2] \cup [2,4]$

ii) $x \in [1,3] \cup [7,9]$

3. i) 1 iii) $x \geq 1$.

4. i) 4 iii) $1 \leq x \leq 7$.

§4.2

Α΄ Ομάδας

1. i) $(x-1)(x-2)$ ii) $(2x+1)(x-2)$.

2. i) $\dfrac{x-1}{2x+1}$ ii) $\dfrac{2(x-3)}{x-7}$ iii) $\dfrac{2x-3}{x-1}$.

3. i) $x^2-2x-15>0$,

για $x\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

ii) $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$

iii) $x^2-4x+3>0$ για $x\in\mathbb{R}$.

4. i) $-x^2+4x-3>0$ για $x\in(1,3)$

ii) $-9x^2+6x-1=-(3x-1)^2$

iii) $-x^2+2x-2<0$ για $x\in\mathbb{R}$.

5. i) $x\in[0,4]$ ii) $x\in[-4,1]$.

6. i) $x \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$ ii) $x \in \left(-1,\dfrac{5}{2}\right)$

7. i) $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ ii) $x = 3$.

8. i) Αδύνατη ii) $x \in \mathbb{R}$. **9.** $x \in (1,3)$.

10. $x \in (-4,-1) \cup (3,4)$.

11. $x \in (1,2) \cup (3,5)$.

Β΄ Ομάδας

1. i) $(\alpha-\beta)(\alpha+2\beta)$, $(\alpha+2\beta)(\alpha-3\beta)$

ii) $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-3\beta}$, $\alpha \neq 3\beta$ και $\alpha \neq -2\beta$.

2. $(2x-\alpha)(x+\beta)$.

3. $\dfrac{x+\beta}{x-2\alpha}$, $x \neq \alpha$ και $x \neq 2\alpha$.

4. i) 4 ii) $\lambda < 0$ ή $\lambda > 4$

iii) $0 < \lambda < 4$.

5. $0<\lambda<\dfrac{4}{9}$.

6. i) $\Delta=-8\lambda^2-24\lambda,\quad \lambda<-3$ ή $\lambda>0$

ii) $\lambda<-3$.

7. Το Μ βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία που τριχοτομούν την ΑΓ.

8. ii) $A>0$ με α,β ομόσημους,

$A<0$ με α,β ετερόσημους.

§4.3

Α΄ Ομάδας

1.

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

2.

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad$ 1 $\quad 2 \quad$ $+\infty$
$P(x)$	$-$ $\;0\;$ $+$ $\;0\;$ $-$ $\;0\;$ $-$

3. $x \in (-3,1) \cup (3,+\infty)$.

4. $x \in [-3,0] \cup [3,+\infty)$.

5. $x \in (-\infty,-2] \cup \{-1\} \cup [1,+\infty)$.

6. $x \in \left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right) \cup (1,3)$.

7. i) $x \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$ ii) $x \in \left[-\dfrac{1}{2},3\right)$.

8. $x \in (-2,-1] \cup (1,2]$.

B΄ Ομάδας

1. i) $x \in \left(1,\dfrac{7}{2}\right)$ ii) $x \in (-\infty,-2] \cup \left(-\dfrac{5}{3},+\infty\right)$.

2. $x \in (-\infty,-3] \cup (1,4]$.

3. i) $x \in \left(1, \frac{5}{3}\right) \cup [2,5]$.

ii) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup [3, +\infty)$.

4. $x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (0,1)$.

5. $1{,}59 < x < 4{,}41$.

6. $1 < t < 4$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

§5.1

Α΄ Ομάδας

1. i) 3, 5, 7, 9, 11 ii) 2, 4, 8, 16, 32

iii) 2, 6, 12, 20, 30 iv) 0, 1, 2, 3, 4

v) 1, –0,1, 0,01, –0,001, 0,0001

vi) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{15}{16}, \frac{33}{32}$ vii) 4, 3, 2, 1, 0

viii) $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ix) $2, 1, \frac{8}{9}, 1, \frac{32}{25}$

x) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ xi) $1, -1, 1, -1, 1$

2. i) $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2$ ii) $0, 1, 2, 5, 26$

iii) $3, 4, 6, 10, 18$

3. i) $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{\nu+1} = 1 + \alpha_\nu$

ii) $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu$

iii) $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 1$

iv) $\alpha_1 = 8$ και $\alpha_{\nu+1} = 5 + \alpha_\nu$

4. i) $\alpha_\nu = 2\nu - 1$ ii) $\alpha_\nu = 3 \cdot 5^{\nu-1}$

§5.2

Α' Ομάδας

1. i) $\alpha_\nu = 3\nu + 4$ ii) $\alpha_\nu = 2\nu + 9$ iii) $\alpha_\nu = -3\nu + 8$

iv) $\alpha_\nu = \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}$ v) $\alpha_\nu = 3\nu - 3$

2. i) $\alpha_{15} = 68$ ii) $\alpha_{20} = 144$ iii) $\alpha_{30} = 323$

iv) $\alpha_{35} = 289$ v) $\alpha_{50} = \frac{101}{3}$ vi) $\alpha_{47} = 35$

3. i) $\alpha_1 = 7\ \omega = 1$ ii) $\alpha_1 = 2, \omega = 4$ iii) $\alpha_1 = 14, \omega = 3$

4. i) $\alpha_{50} = 8{,}5$ ii) $\alpha_{18} = 121$

5. i) Ο $20^{\underline{ος}}$ όρος ii) ο $60^{\underline{ος}}$ όρος

6. i) -15 ii) $x = 16$

7. i) 20 και 30

8. i) 1840 ii) 1560 iii) 3360 iv) 3620

9. i) -9320 ii) 2080

10. i) 4950 ii) 1386 iii) -2030

11. i) 9 όρους ii) 8 όρους

12. i) 53,585

Β′ Ομάδας

1. Πάρτε τη διαφορά $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$, $\alpha_1 = 8$ $\omega = -4$

2. i) 40000 ii) 90300 iii) 36036

3. i) 3900 ii) 6615

4. i) 2205 ii) -4220

5. $S = (1+2+\ldots+200)-(4+8+\ldots+200)-(9+18+\ldots+198)$
$+(36+72+\ldots+180) = 13263$

6. Απαιτούνται τουλάχιστον 20 πρώτοι όροι.

7. 1η γραμμή: 10, 780

2η γραμμή: 4, 1539

3η γραμμή: 1, 34

4η γραμμή: –38 –368

8. 78 το 12/ωρο και άρα 156 το 24/ωρο

9. 81840, 2480

10. 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73

11. $\dfrac{\nu+1}{2}$

12. 40m βάθος

§5.3

Α΄ Ομάδας

1. i) $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^{\nu-1}$ ii) $\alpha_\nu = 2 \cdot 3^{\nu-2}$ iii) $\alpha_\nu = 3^{\nu+1}$

iv) $\alpha_\nu = \dfrac{1}{2^{\nu+1}}$ v) $\alpha_\nu = \dfrac{1}{2^{\nu-5}}$ vi) $\alpha_\nu = \dfrac{2}{3^{\nu-3}}$

vii) $\alpha_\nu = (0,4)^{\nu-1}$ viii) $\alpha_\nu = (-2)^\nu$ ix) $\alpha_\nu = (-3)^\nu$

2. i) $\alpha_9 = 64$ ii) $\alpha_7 = 1458$ iii) $\alpha_8 = \frac{1}{3}$

iv) $\alpha_{10} = -512$ v) $\alpha_9 = \left(\frac{3}{2}\right)^5$

3. i) $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ ii) $\alpha_1 = 1$

4. i) $\lambda = 2$ ii) $\lambda = \frac{2}{3}$

5. i) $\alpha_{14} = \frac{1000}{8192}$ ii) $\alpha_{21} = 16\sqrt{2}$

6. 9 όροι

7. i) Ο $10^{\text{ος}}$ όρος ii) Ο $11^{\text{ος}}$ όρος

8. i) 10,1 ii) $x = 3$

9. i) 1023 ii) 8572 iii) 1364

10. i) 10922 ii) $\simeq 8$ iii) 171

11. 12288

12. $\simeq 0{,}74$m

B′ Ομάδας

1. Πάρτε το λόγο $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$

2. $\nu = 14$

3. i) Σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με $1^{\underline{o}}$ όρο α_1^2 και λόγο λ^2

ii) Σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με $1^{\underline{o}}$ όρο α_1^k και λόγο λ^k

4. $\alpha_1 = \sqrt{3}, \lambda = \sqrt{3}$ ή $\alpha_1 = -(3 + 2\sqrt{3}), \lambda = -\sqrt{3}$

5. 1023

6. $\alpha_{\nu+1} = 1{,}02 \cdot \alpha_\nu$, $\simeq 109{,}8$ εκατομμύρια

7. $I_{\nu+1} = 0{,}9 \cdot I_\nu$, $\simeq 0{,}35\ I_0$

8. i) $\lambda = \sqrt[12]{2}$, ii) $261 \cdot \sqrt[12]{2^5}$

9. i) $D_{\nu+1} = 0{,}9D_\nu$ ii) $\simeq 20{,}87$ lt

10. $9{,}223 \cdot 10^{11}$ τόννοι

11. i) $S_\nu = 3 \cdot 4^{\nu-1}$ ii) $U_\nu = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\nu-1}$

§5.4

Α′ Ομάδας

1. 6381,4 ευρώ

2. 37.204,87 ευρώ

3. 5%

4. 27342,05 ευρώ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

§6.1

Α΄ Ομάδας

1. i) $\mathbb{R}-\{1\}$ ii) $\mathbb{R}-\{0,4\}$ iii) $\mathbb{R}$

iv) $(0,+\infty)$.

2. i) $[1,2]$

ii) $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

iii) $[1,3]$ iv) $[0,1)\cup(1,+\infty)$.

3. -125 , 3 , 15 .

4. i) $f(x)=(x+2)^2, x\in\mathbb{N}$ ii) $4,5,8,10$.

5. i) $x=3$ ii) αδύνατο iii) $x=2$ ή $x=-2$

§6.2

Α΄ Ομάδας

2. $2<x<5$ και $1<y<6$.

3. i) $(-1,-3)$ ii) $(1,3)$ iii) $(3,-1)$

iv) $(1,-3)$.

4. i) $2\sqrt{5}$ ii) 5 iii) 4 iv) 5 .

5. i) $AB=A\Gamma$ ii) $(B\Gamma)^2=(AB)^2+(A\Gamma)^2$.

6. $(AB)=(B\Gamma)=(\Gamma\Delta)=(\Delta A)=5$.

7. i) 2 ii) -1 iii) 4 .

8. i) $(4,0)$, $(0,-4)$ ii) $(2,0)$, $(3,0)$,

$(0,6)$ iii) $(1,0)$, $(0,1)$ iv) $(0,1)$

v) $(1,0)$ vi) $(-2,0)$, $(2,0)$.

9. i) $(0,-1),(-1,0),(1,0)$ ii) $x<-1$ ή $x>1$

10. i) $(2,-2)$, $(5,4)$ ii) $2<x<5$.

§6.3

Α΄ Ομάδας

1. i) 45° ii) 60° iii) 135° iv) 120°.

2. i) 1 ii) -1 iii) 0 iv) -2.

3. i) $y=-x+2$ ii) $y=x+1$ iii) $y=2x-1$.

4. i) $y=x+1$ ii) $y=-x+3$ iii) $y=1$.
iv) $y=-2x+5$. **5.** -40° C. **6.** Αποτελείται από την ημιευθεία $y=-x+2$, $x\le 0$, το ευθ. τμήμα $y=2$, $0\le x\le 1$ και την ημιευθεία $y=x+1$, $x\ge 1$.

7. i) -1, 1 και -2, 0, 1.
ii) $x\in(-\infty,1)-\{-1\}$, $x\in[-2,0]\cup[1,+\infty)$

8. i) $x\in[-1,1]$, $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Β΄ Ομάδας

1. i) $f(-6)=1$, $f(-5)=\dfrac{1}{2}$, $f(-4)=0$,

$f(-3)=-\dfrac{1}{2}$, $f(-2)=-1$, $f(-1)=0$,

$$f(0)=1,\quad f(1)=1,\quad f(2)=1,$$

$$f(3)=0,\quad f(4)=-1,\quad f(5)=-2$$

ii) $f(x)=0: -4, -1, 3 \quad f(x)=-1: -2, 4$

$$f(x)=1: \ x \in [0,2] \cup \{-6\}$$

iii) $y=0,5 \cdot x, \quad x \in [2,5] \cup \{-2\}$

2. $y=x-1, \ x \geq 1$.

3. i) $\mathrm{B}(t)=2000-100t, \ 0 \leq t \leq 20,$

$$\Delta(t)=600+100t, \ 0 \leq t \leq 20,$$

ii) t=7min **4.** $f(x)=-x+8, \ 0 \leq x \leq 4$.

5. i) $h_1(t)=-\dfrac{20}{3}t+20, \ 0 \leq t \leq 3$

$$h_2(t)=-5t+20, \ 0 \leq t \leq 4$$

ii) 2,4 h iii) 2,4 h.

§6.4

Α΄ Ομάδας

5. i) $2(x-2)^2$ ii) $2(x-3)^2-3$

iii) $2(x+2)^2$ iv) . $2(x+3)^2-3$

§6.5

Α΄ Ομάδας

1. $f \searrow (-\infty,1]$, $f \nearrow [1,+\infty)$, $g \nearrow (-\infty,0]$,

$g \searrow [0,2]$, $g \nearrow [2,+\infty)$, $h \searrow (-\infty,-1]$,

$h \nearrow [-1,0]$, $h \searrow [0,1]$, $h \nearrow [1,+\infty)$.

2. $f(1)=-1$ ολικό ελάχιστο,

η g δεν έχει ολικά ακρότατα,

$h(-1)=-2$, $h(1)=-2$ ολικό ελάχιστο.

3. i) Αρκεί $f(x)\geq f(3)$

ii) Αρκεί $g(x)\leq g(1)$

4. i) Άρτια ii) άρτια iii) τίποτα
iv) περιττή v) τίποτα vi) περιττή

5. i) Άρτια ii) τίποτα iii) περιττή
iv) περιττή v) άρτια vi) άρτια

6. i) Περιττή ii) άρτια iii) τίποτα,

7. i) Άρτια ii) περιττή iii) τίποτα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

§7.1

Α΄ Ομάδας

1. $y = 2x^2$. **4.** $x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$,

$x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.

Β΄ Ομάδας

2. $f \downarrow (-\infty, 0]$, $f \uparrow [0, +\infty)$,

$f(0) = 0$, ελάχιστο.

3. i) α) $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$

β) $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$. **4.** $\sqrt{3}$.

§7.2

Α΄ Ομάδας

1. $y=\dfrac{2}{x}$.

4. $\dfrac{1}{x}\le 1 \Leftrightarrow x<0$ ή $x\ge 1$,

$\dfrac{1}{x}>1 \Leftrightarrow 0<x<1$,

5. $\dfrac{1}{x}\le x^2 \Leftrightarrow x<0$ ή $x\ge 1$

$\dfrac{1}{x}>x^2 \Leftrightarrow 0<x<1$.

6. $y=\dfrac{4}{x}$.

§7.3

Α΄ Ομάδας

1. i) $y=2\cdot(x-1)^2+3$.

ii) $y=-2\cdot(x-2)^2-1$.

2. α) $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$ ελάχιστο.

β) $g\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{49}{12}$ μέγιστο.

Β΄ Ομάδας

1. i) 1 ii) -1 iii) -3, 5.

2. i) $\alpha<0$ ii) $\Delta>0$ iii) $\alpha=-1$, $\gamma=-5$.

3. i) $f(x)=-x^2+10x$ ii) $f(5)=25$.

4. i) $\mathrm{E}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^2-6x+18\right)$ ii) MA=MB

5. 30, 40.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

2. ii)

3	4	5
8	6	10
5	12	13
21	20	29
16	30	34
15	8	17

4. ii) $2 < \alpha < 3$. **5.** iii) $\lambda = 3$ ή $\lambda = 1$.

6. A) i) $t = 6$ ii) $t_1 = 2$, $t_2 = 10$.

7. $E = 8$τ.μ. . **8.** $x < 2$.

9. B) Αν $\alpha < 0$, αδύνατο, αν $\alpha = 0$, δύο λύσεις, αν $0 < \alpha < 3$ τέσσερις λύσεις, αν $\alpha = 3$ τρεις λύσεις, αν $\alpha > 3$ δύο λύσεις.

10. iii) Αν $\alpha = \pm\sqrt{2}$ δύο λύσεις, αν $0 < \alpha < \sqrt{2}$ ή $-\sqrt{2} < \alpha < 0$, τέσσερις λύσεις, αν $\alpha = \pm 1$ τρεις λύσεις, αν $\alpha < -\sqrt{2}$ ή $\alpha > \sqrt{2}$ αδύνατο.

11. $x=1$.

12. iii) f : ελάχιστο 2, g : ελάχιστο 0, μέγιστο 2,

15. ναι.

16. i) $f(x)=\begin{cases} 5x, & 0\le x\le 20 \\ 10x-100, & 20\le x\le 40 \\ 5x+100, & 40\le x\le 60 \end{cases}$

iii) $x=22$.

17. ii) $x=\sqrt{5}-1$.

18. ii) $x=2$, $\mathrm{E}=1,5$τ.μ .

19. i) 4, 0 ii) $\mathrm{E}(x)=|x-4|$

21. Να λάβετε υπόψη ότι
$P(0)+P(1)+\ldots+P(100)=1$

22. i) $P(A')=1-P(A)$ κτλ.
ii) Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 5ου ΤΟΜΟΥ