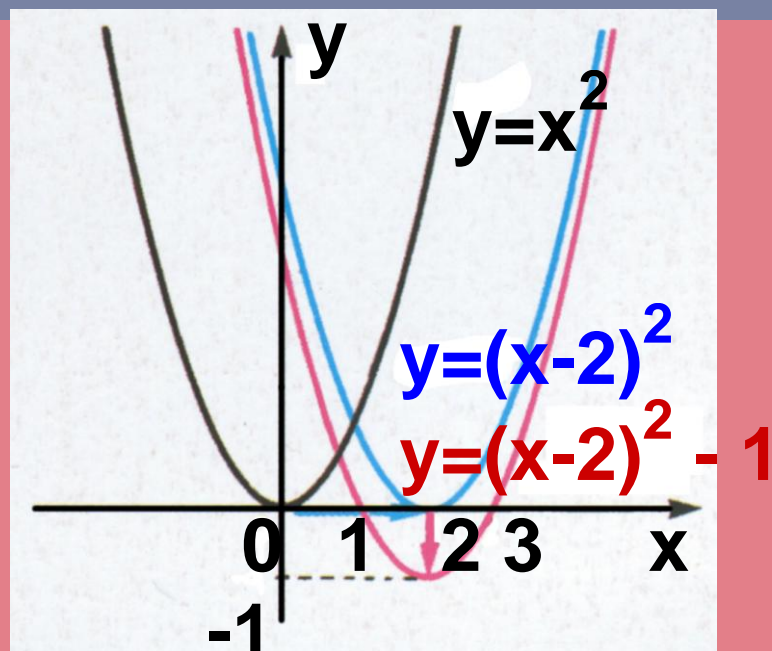


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ
ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Άλγεβρα και στοιχεία Πιθανοτήτων

Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



Τόμος 1ος

Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων

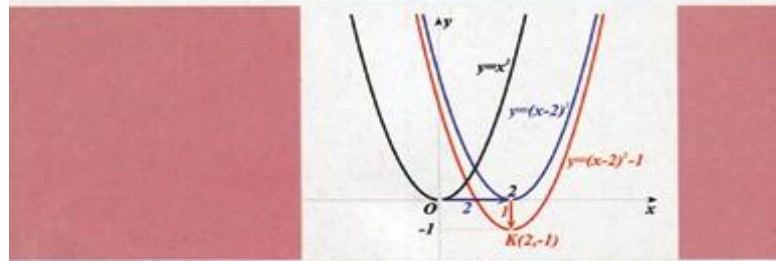
Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 1^{ος}
1η έκδοση

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ • ΑΘΗΝΑ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός,
Κατσαργύρης Βασίλειος,
Παπασταυρίδης Σταύρος,
Πολύζος Γεώργιος,
Σβέρκος Ανδρέας

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

**Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Ομοτ.
Καθηγητής Πανεπιστημίου
Αθηνών Κατσαργύρης Βασίλειος,
Καθηγητής Βαρβακείου,
Πειραματικού Λυκείου
Παπασταυρίδης Σταύρος,
Καθηγητής Πανεπιστημίου
Αθηνών
Πολύζος Γεώργιος, Μόνιμος
Πάρεδρος του Π.Ι.
Σβέρκος Ανδρέας, Καθηγητής 2^{ου}
Πειραματικού Λυκείου Αθηνών**

**ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ
ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ Π. Ι.**

Σκούρας Αθανάσιος,

Σύμβουλος του Π. Ι.

Πολύζος Γεώργιος,

Μόνιμος Πάρεδρος του Π. Ι.

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ
ΑΝΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ**

Ελευθερόπουλος Ιωάννης

Καθηγητής Μαθηματικών,

Αποσπασμένος στο Π. Ι.

Ζώτος Ιωάννης

Καθηγητής Μαθηματικών,

Αποσπασμένος στο Π. Ι.

Καλλιπολίτου Ευρυδίκη

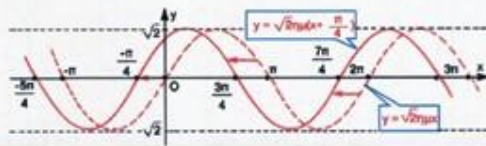
Καθηγήτρια Μαθηματικών,

Αποσπασμένη στο Π. Ι.

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ • ΑΘΗΝΑ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Ομοτ.

Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος, Καθηγητής

Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου

Παπασταυρίδης Σταύρος,

Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας

Πολύζος Γεώργιος, Μόνιμος

Πάρεδρος του Π.Ι.

Σβέρκος Ανδρέας, Καθηγητής 2ου

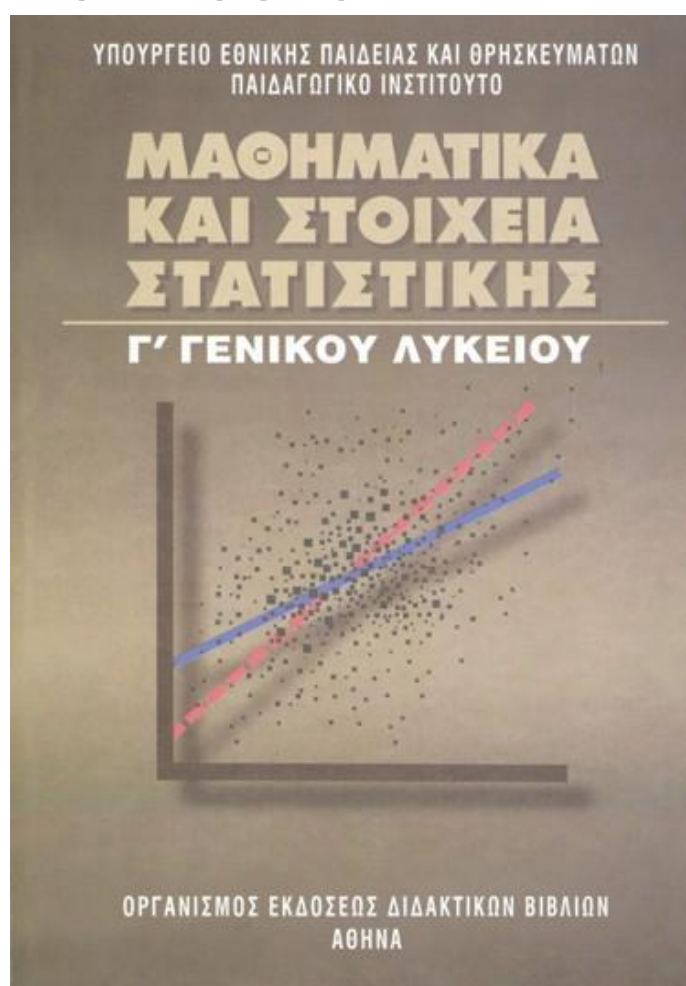
Πειραματικού Λυκείου Αθηνών

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ: 1991

ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ:

**1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997,
1998**

**Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο
αναλυτικό πρόγραμμα έγινε από το
Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.**



ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

**Αδαμόπουλος Λεωνίδας,
Επ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού
Ινστιτούτου**

**Δαμιανού Χαράλαμπος,
Αναπλ. Καθηγητής Παν/μίου
Αθηνών
Σβέρκος Ανδρέας,
Σχολικός Σύμβουλος**

ΚΡΙΤΕΣ:

**Κουνιάς Στρατής,
Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών
Μακρής Κωνσταντίνος,
Σχολικός Σύμβουλος
Τσικαλουδάκης Γεώργιος,
Καθηγητής Β/θμιας
Εκπαίδευσης**

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

**Μπουσούνη Λία Καθηγήτρια
Β/θμιας Εκπαίδευσης**

ΔΑΚΤΥΛΟΓΡΑΦΗΣΗ:

Μπολιώτη Πόπη

ΣΧΗΜΑΤΑ:

Μπούτσικας Μιχάλης

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ
ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

**Ομάδα Εργασίας του
Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής
Πολιτικής**

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ

**Γραμμένος Νικόλαος,
Εκπαιδευτικός**

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

**Νικόπουλος Ιωάννης,
Εκπαιδευτικός**

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνει την ύλη της Άλγεβρας και των Πιθανοτήτων που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Α' τάξης του Γενικού Λυκείου.

Το βιβλίο αυτό προήλθε από αναμόρφωση της Α' έκδοσης (2010) του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος. Προστέθηκαν επίσης δυο ακόμα κεφάλαια: το κεφάλαιο «Πιθανότητες» και το κεφάλαιο «Πρόοδοι».

Το κεφάλαιο «Πιθανότητες» είναι μέρος του αντίστοιχου κεφαλαίου από το βιβλίο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010) του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Λ. Αδαμόπουλος, Χ. Δαμιανού και Α. Σβέρκος. Το κεφάλαιο «Πρόοδοι» είναι μέρος του αντίστοιχου κεφαλαίου από το βιβλίο ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010), του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος.

Το περιεχόμενο του βιβλίου περιλαμβάνει σε γενικές γραμμές τα εξής:

Στο 1^ο Κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στη Θεωρία των Πιθανοτήτων. Η απόδειξη των ιδιοτήτων της πιθανότητας ενός ενδεχομένου γίνεται μόνο στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Η

Θεωρία των Πιθανοτήτων
ασχολείται με καταστάσεις όπου
υπάρχει αβεβαιότητα, και αυτό την
κάνει ιδιαίτερα σημαντική στις
εφαρμογές της καθημερινής ζωής.

Στο 2^ο Κεφάλαιο

επαναλαμβάνονται,
συμπληρώνονται και επεκτείνονται
οι βασικές ιδιότητες των
πραγματικών αριθμών.

Στο 3^ο Κεφάλαιο

επαναλαμβάνονται, επεκτείνονται
και εξετάζονται συστηματικά όσα
είναι γνωστά από το Γυμνάσιο για
τις εξισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού.

Επίσης εξετάζονται εξισώσεις που,
για να επιλυθούν, ανάγονται σε 1^{ου}
και 2^{ου} βαθμού.

Στο 4^ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται
ανισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού καθώς
και ανισώσεις που, για να

επιλυθούν, ανάγονται σε 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού.

Στο 5^ο Κεφάλαιο γίνεται εισαγωγή στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών, και εξετάζονται η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος ως ειδικές περιπτώσεις κανονικότητας (pattern) σε ακολουθίες.

Στο 6^ο Κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της συνάρτησης. Η συνάρτηση είναι μια θεμελιώδης έννοια που διαπερνά όλους τους κλάδους των Μαθηματικών και έχει κεντρική σημασία για την περαιτέρω ανάπτυξη και εφαρμογή τους.

Στο 7^ο Κεφάλαιο γίνεται μελέτη των συναρτήσεων $f(x)=ax^2$,

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

και

**$f(x)=ax^2+bx+c$. Η μελέτη της
 $f(x)=ax^2+bx+c$ είναι ο κεντρικός
στόχος του κεφαλαίου αυτού.**

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ε.1 ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Στη παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε μερικές βασικές έννοιες της Λογικής, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο, για τη σαφέστερη διατύπωση μαθηματικών εννοιών, προτάσεων κτλ. Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουμε αναφέρονται σε έννοιες και ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο.

Η συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β . Είναι γνωστό ότι: Αν οι αριθμοί α και β είναι ίσοι, τότε και τα τετράγωνα τους θα είναι ίσα.

Αυτό σημαίνει ότι:

Αν ο ισχυρισμός « $\alpha = \beta$ » είναι αληθής, τότε και ο ισχυρισμός « $\alpha^2 = \beta^2$ » θα είναι αληθής.

**Γι' αυτό λέμε ότι ο ισχυρισμός « $\alpha^2 = \beta^2$ » συνεπάγεται τον ισχυρισμό « $\alpha = \beta$ » και γράφουμε:
 $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$.**

Γενικά:

P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P να αληθεύει και ο Q , τότε λέμε ότι ο P συνεπάγεται τον Q και γράφουμε $P \Rightarrow Q$.

Ο ισχυρισμός « $P \Rightarrow Q$ » λέγεται συνεπαγωγή και πολλές φορές διαβάζεται «αν P, τότε Q». Ο P λέγεται υπόθεση της συνεπαγωγής, ενώ ο Q λέγεται συμπέρασμα αυτής⁽¹⁾ .

(1) Στην καθημερινή πράξη, συνήθως, δεν χρησιμοποιούμε συνεπαγωγές με ψευδή υπόθεση. Αλλά και η μαθηματική επιστήμη δεν έχει ανάγκη τέτοιου είδους συνεπαγωγών. Όμως, για τεχνικούς λόγους που συνδέονται με την ευκολία της έκφρασης μαθηματικών ζητημάτων, θα υιοθετήσουμε τη σύμβαση ότι η συνεπαγωγή « $P \Rightarrow Q$ » να είναι αληθής και στην περίπτωση που η υπόθεση P είναι ψευδής. Έτσι, η συνεπαγωγή « $P \Rightarrow Q$ » είναι ψευδής, μόνο όταν η υπόθεση P είναι αληθής και το συμπέρασμα Q είναι ψευδές και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση. Εκ πρώτης όψεως η σύμβαση αυτή φαίνεται περίεργη, αλλά στο πλαίσιο του παρόντος βιβλίου δεν μπορούν να εξηγηθούν οι λόγοι που οδήγησαν σε αυτή.

Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε τις γνωστές μας από το Γυμνάσιο συνεπαγωγές:

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 \quad (1)$$

και

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma \quad (2),$$

που ισχύουν για όλους τους πραγματικούς α , β και γ .

Παρατηρούμε ότι:

✓ Για την πρώτη συνεπαγωγή, δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή δεν ισχύει η συνεπαγωγή

$\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β , αφού για παράδειγμα είναι

$$(-3)^2 = 3^2, \text{ ενώ } -3 \neq 3.$$

✓ Για τη δεύτερη, όμως, συνεπαγωγή ισχύει και το αντίστροφο. Δηλα-

δή για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει και η συνεπαγωγή:

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$$

Γι' αυτό λέμε ότι οι δύο ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι και γράφουμε:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma .$$

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P , να αληθεύει και ο Q και όταν αληθεύει ο Q , να αληθεύει και ο P , τότε λέμε ότι ο P συνεπάγεται τον Q και αντιστρόφως ή, αλλιώς, ότι ο P είναι ισοδύναμος με τον Q και γράφουμε $P \Leftrightarrow Q$.

Ο ισχυρισμός « $P \Leftrightarrow Q$ » λέγεται **ισοδυναμία** και αρκετές φορές διαβάζεται « **P αν και μόνο αν Q** ».

Ο σύνδεσμος «ή»

Γνωρίζουμε ότι:

Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β είναι ίσος με το μηδέν.

Για να δηλώσουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους α και β είναι ίσος με το μηδέν, γράφουμε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$. Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός P ή Q αληθεύει μόνο στην περίπτωση που ένας τουλάχιστον από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει.

Ο ισχυρισμός «P ή Q» λέγεται
διάζευξη των P και Q . Για
παράδειγμα η εξίσωση

$$(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$$

αληθεύει, αν και μόνο αν ένας
τουλάχιστον από τους παράγοντες
 $x^2 - x$ και $x^2 - 1$ είναι ίσος με το
μηδέν, δηλαδή, αν και μόνο αν
ισχύει η διάζευξη:

$$x^2 - x = 0 \text{ ή } x^2 - 1 = 0.$$

Παρατηρούμε εδώ ότι:

- ✓ Για $x = 1$ αληθεύουν και οι δύο
εξισώσεις, ενώ
- ✓ Για $x = 0$ αληθεύει μόνο η πρώτη
και για $x = -1$ αληθεύει μόνο η δεύτε-
ρη.

Ο σύνδεσμος «και»

Γνωρίζουμε ότι:

«Το γινόμενο δύο πραγματικών

αριθμών α και β είναι διάφορο του μηδενός, αν και μόνον αν και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός».

Για να δηλώσουμε ότι και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός γράφουμε

$$\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός P και Q αληθεύει μόνο στην περίπτωση που και οι δύο ισχυρισμοί αληθεύουν.

Ο ισχυρισμός « P και Q » λέγεται σύζευξη των P και Q .

Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός

$$x(x - 1) = 0 \text{ και } (x - 1)(x + 1) = 0$$

αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, δηλαδή για $x = 1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β . Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1. $\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$ Α Ψ

2. $\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$ Α Ψ

3. $\alpha^2 \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$ Α Ψ

4. $\alpha \neq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 4$ Α Ψ

5. $\alpha > 2 \Rightarrow \alpha^2 > 4$ Α Ψ

6. $\alpha < 2 \Rightarrow \alpha^2 < 4$ Α Ψ

7. $\alpha^2 < 4 \Rightarrow \alpha < 2$ Α Ψ

$$8. \alpha^2 > 4 \Rightarrow \alpha > 2$$

Α Ψ

$$9. \alpha < 2 \text{ και } \beta < 3 \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 6$$

Α Ψ

II. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τους ισχυρισμούς της ομάδας Α' με τον ισοδύναμό του ισχυρισμό από τη ομάδα Β'.

Α' ΟΜΑΔΑ	
1	$x(x - 2) = 0$
2	$x(x - 2) \neq 0$
3	$x^2 = 4$
4	$x^2 = 4$ και $x < 0$
5	$x(x - 2) = 0$ και $x(x - 1) = 0$
6	$x^2 = 4$ και $x > 0$

Β' ΟΜΑΔΑ	
Α	$x \neq 0$ και $x \neq 2$
Β	$x = 2$
Γ	$x = -2$ ή $x = 2$
Δ	$x = 0$
Ε	$x = 0$ ή $x = 2$
Ζ	$x = -2$

E.2 ΣΥΝΟΛΑ

Η έννοια του συνόλου

Πολλοί άνθρωποι συνηθίζουν να συλλέγουν διάφορα πράγματα, όπως π.χ. γραμματόσημα, νομίσματα, πίνακες ζωγραφικής, εφημερίδες, βιβλία κτλ. Οι περισσότεροι συλλέκτες ταξινομούν τις συλλογές τους σε κατηγορίες, π.χ. «γραμματόσημα που προέρχονται από την ίδια χώρα», «νομίσματα του περασμένου αιώνα», «πίνακες της αναγέννησης» κτλ.

Επίσης από αρχαιοτάτων χρόνων οι άνθρωποι ενδιαφέρθηκαν για τους αριθμούς και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες, όπως είναι π. χ. «οι άρτιοι αριθμοί», «οι πρώτοι αριθμοί» κτλ.

Συλλογές ή κατηγορίες όπως οι παραπάνω ή ακόμη ομάδες

αντικειμένων, ομοειδών ή όχι, που μπορούμε με κάποιο τρόπο να τα ξεχωρίσουμε, ονομάζονται στα Μαθηματικά σύνολα. Σύμφωνα με τον μεγάλο μαθηματικό Cantor:

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

ΣΧΟΛΙΟ

Ένα σύνολο πρέπει να είναι, όπως συνηθίζουμε να λέμε, «καλώς ορισμένο». Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του μπορούν να

αναγνωρίζονται με σιγουριά. Για παράδειγμα δεν μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των μεγάλων πραγματικών αριθμών. Αυτό δεν είναι σύνολο, με τη μαθηματική έννοια του όρου, διότι δεν υπάρχει κανόνας που να καθορίζει αν ένας πραγματικός αριθμός είναι ή δεν είναι μεγάλος. Αν όμως θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 1000000, τότε αυτοί αποτελούν σύνολο.

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο στα Μαθηματικά, χρησιμοποιούμε ένα από τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου, ενώ για τα στοιχεία του χρησιμοποιούμε τα μικρά γράμματα αυτών. Για παράδειγμα:
✓ με N συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,

- ✓ με Z το σύνολο των ακεραίων αριθμών,
- ✓ με Q το σύνολο των ρητών αριθμών και
- ✓ με R το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Τα σύμβολα \in και \notin

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου A , γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο A », ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου A γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο A ». Για παράδειγμα

$$\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}, \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}, -2 \in \mathbb{Z},$$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{2} \in \mathbb{R} \text{ κτλ.}$$

Παράσταση συνόλου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:

α) Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντας τα με το κόμμα. Έτσι π.χ., αν το σύνολο A έχει ως στοιχεία τους αριθμούς 2, 4 και 6, γράφουμε:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία, γράφοντας μερικά μόνο από αυτά και αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Έτσι για παράδειγμα το σύνολο B των ακεραίων από το 1 μέχρι το 100 συμβολίζεται ως εξής

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 100\},$$

ενώ το σύνολο των κλασμάτων της μορφής $\frac{1}{v}$, όπου v θετικός ακέραιος, συμβολίζεται ως εξής:

$$\Gamma = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του».

β) Αν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών επιλέξουμε εκείνους που έχουν την ιδιότητα να είναι θετικοί, τότε φτιάχνουμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$, όπου $x > 0$ ».

Ομοίως το σύνολο των άρτιων
ακεραίων συμβολίζεται

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ άρτιος}\}$$

Γενικά, αν από ένα σύνολο Ω
επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του,
που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα I ,
τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο
που συμβολίζεται με:

$$\{x \in \Omega \mid x \text{ έχει την ιδιότητα } I\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των
 $x \in D$, όπου x έχει την ιδιότητα I ». Ο
παραπάνω τρόπος παράστασης
ενός συνόλου λέγεται «παράσταση
του συνόλου με περιγραφή των
στοιχείων του».

Ίσα σύνολα

Ας θεωρήσουμε τώρα τα σύνολα:

$$A = \{1, 2\} \quad \text{και}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x - 2) = 0\}$$

Επειδή οι λύσεις της εξίσωσης $(x - 1)(x - 2) = 0$ είναι οι αριθμοί 1 και 2, το σύνολο B έχει τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το A. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι τα σύνολα A και B είναι ίσα.

Γενικά:

Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Με άλλα λόγια:

«Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A».

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A = B$.

Υποσύνολα συνόλου

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα

$A = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ και

$B = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου A είναι και στοιχείο του συνόλου B . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B .

Γενικά:

Ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B , όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B .

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$A \subseteq B$. Άμεσες συνέπειες του

ορισμού είναι οι:

i) $A \subseteq A$, για κάθε σύνολο A .

ii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.

iii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.

Το κενό σύνολο

Ας αναζητήσουμε τα στοιχεία του συνόλου $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$. Είναι φανερό ότι τέτοια στοιχεία δεν υπάρχουν, αφού η εξίσωση $x^2 = -1$ είναι αδύνατη στο \mathbb{R} . Το σύνολο αυτό, που δεν έχει κανένα στοιχείο, λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με \emptyset ή $\{\}$.

Δηλαδή:

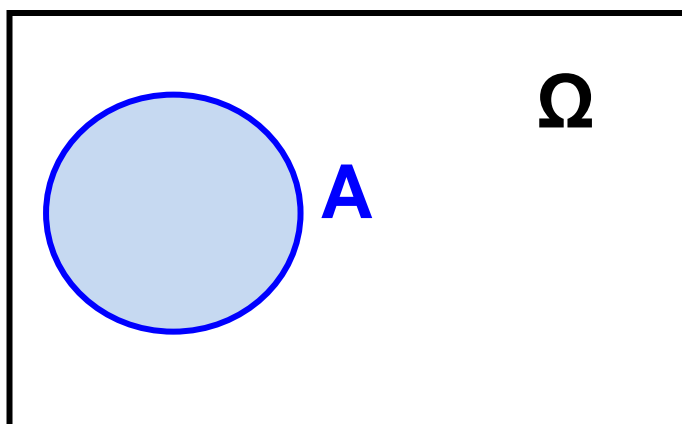
Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.

Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Διαγράμματα Venn

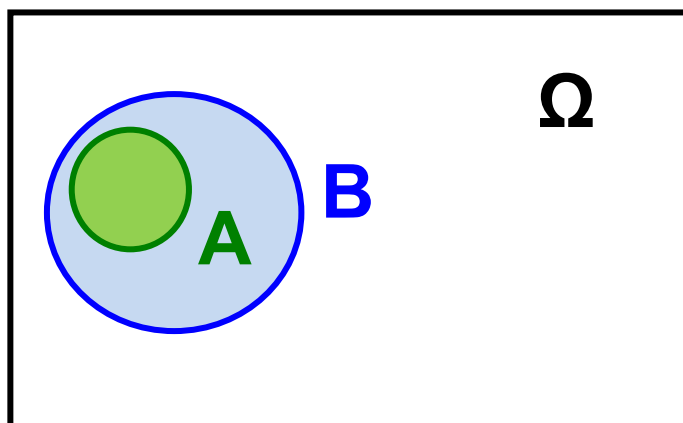
Μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων γίνεται με τα διαγράμματα Venn.

• Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με Ω . Για παράδειγμα, τα σύνολα \mathbb{R} , \mathbb{Z} και \mathbb{Q} , είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου $\Omega = \mathbb{R}$.



Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.

- Αν $A \subseteq B$, τότε το A παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το B .



Πράξεις με σύνολα

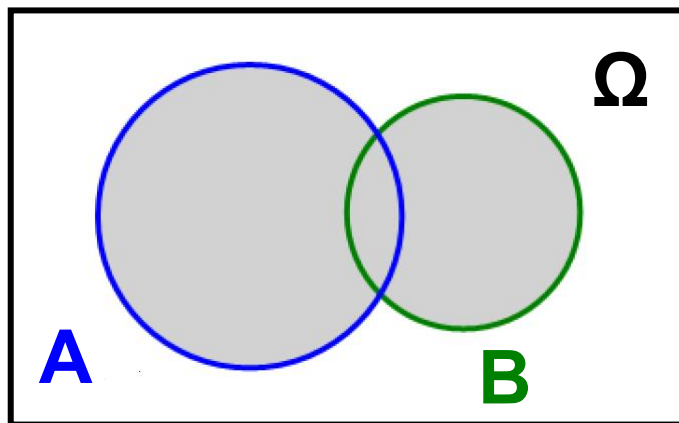
Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ένα βασικό σύνολο και δύο υποσύνολά του:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

- Το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, που έχει ως στοιχεία τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των A και B , δηλαδή το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα A και B λέγεται ένωση των συνόλων A και B .

Γενικά:

Ένωση δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα A και B και συμβολίζεται με $A \cup B$.



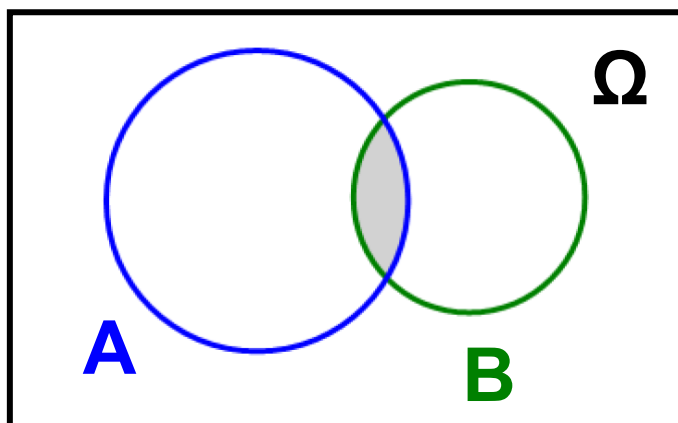
Δηλαδή είναι:

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

- Το σύνολο $\{3, 4\}$ που έχει ως στοιχεία τα κοινά μόνο στοιχεία των A και B λέγεται τομή των A και B .

Γενικά:

Τομή δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα A, B και συμβολίζεται με $A \cap B$



Δηλαδή είναι:

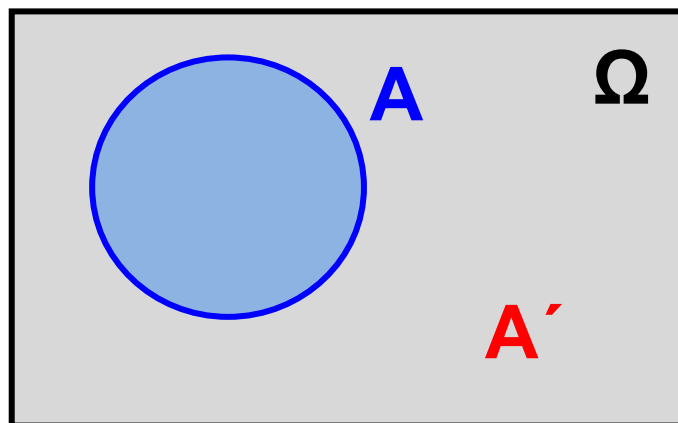
$$\mathbf{A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}}$$

Στην περίπτωση που δύο σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν $A \cap B = \emptyset$, τα δύο σύνολα λέγονται ξένα μεταξύ τους.

- Το σύνολο $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A , λέγεται συμπλήρωμα του συνόλου A .

Γενικά:

Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου A ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται με A' .



Δηλαδή είναι:

$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- Ι. 1. Στους παρακάτω πίνακες να συμπληρώσετε με το σύμβολο "✓" εκείνα τα τετραγωνάκια των οποίων ο αντίστοιχος αριθμός ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.**
- 2. Πώς ονομάζονται οι αριθμοί για τους οποίους έχουν συμπληρωθεί τα τετραγωνάκια μόνο της τελευταίας γραμμής;**
- 3. Να χρησιμοποιήσετε τα διαγράμματα του Venn για να παραστήσετε τις διαδοχικές σχέσεις εγκλεισμού των συνόλων N , Z , Q και R και να τοποθετήσετε μέσα σε αυτά τους αριθμούς αυτούς.**

	$\in \mathbb{N}$	$\in \mathbb{Z}$	$\in \mathbb{Q}$	$\in \mathbb{R}$
-3,5				
0				
$\sqrt{10}$				
$-\frac{13}{5}$				
π				
2,3				
$\frac{20}{5}$				
$\sqrt{100}$				
-5				

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Αν $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 16\}$ και $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 24\}$, τότε:

α) $A \cup B$

β) $A \cap B$

2. Ας θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το σύνολο Ω των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου και τα υποσύνολά του $A = \{x \in \Omega \mid x \text{ φωνήεν}\}$ και $B = \{x \in \Omega \mid x \text{ σύμφωνο}\}$.

Τότε:

α) $A \cup B = \dots\dots$ β) $A \cap B = \dots\dots$

γ) $A' = \dots\dots$ δ) $B' = \dots\dots$

III. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο τις σωστές απαντήσεις.

1. Έστω δύο σύνολα A και B . Τότε:

α) $A \subseteq A \cap B$ β) $B \subseteq A \cap B$

γ) $A \cap B \subseteq A$ δ) $A \cap B \subseteq B$

2. Έστω δύο σύνολα A και B . Τότε:

α) $A \subseteq A \cup B$ β) $A \cup B \subseteq B$

γ) $A \cup B \subseteq A$ δ) $A \cup B \subseteq B$

IV. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Έστω Ω ένα βασικό σύνολο, \emptyset το κενό σύνολο και $A \subseteq \Omega$. Τότε:

α) $\emptyset' = \dots\dots$ β) $\Omega' = \dots\dots$ γ) $(A')' = \dots\dots$

2. Έστω $A \subseteq B$. Τότε

α) $A \cap B = \dots\dots$ β) $A \cup B = \dots\dots$

1 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Εισαγωγή

Υπάρχει σε πολλούς η εντύπωση ότι το κύριο κίνητρο για την ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων προήλθε από το ενδιαφέρον του ανθρώπου για τα τυχερά παιχνίδια. Σημαντική μάλιστα ώθηση στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού των Μαθηματικών αποτέλεσε η γόνιμη αλληλογραφία που αναπτύχθηκε ανάμεσα στους Pascal και Fermat το 17ο αιώνα με αφορμή διάφορα προβλήματα που προέκυψαν από την ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια.

Μολονότι όμως τα τυχερά παιχνίδια ήταν ευρέως διαδεδομένα και στους Αρχαίους Έλληνες και στους Ρωμαίους, η Θεωρία των Πιθανοτήτων δεν αναπτύχθηκε κατά την αρχαιότητα, όπως συνέβη με άλλους κλάδους των Μαθηματικών, αλλά πολύ αργότερα, το 16ο και 17ο αιώνα μ.Χ. Γι'αυτό πολλοί απορρίπτουν την άποψη ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων οφείλει τη γένεσή της στην ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια και την αποδίδουν στις ανάγκες να λυθούν προβλήματα που παρουσιάστηκαν με την ανάπτυξη του εμπορίου, των ασφαλίσεων, της συλλογής εσόδων του κράτους κτλ. Η ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων οφείλεται επίσης και στις ανάγκες των Φυσικών Επιστημών όπως η

**εφαρμογή της Θεωρίας Σφαλμάτων
σε αστρονομικές παρατηρήσεις.**

**Η Θεωρία των Πιθανοτήτων
αναπτύχθηκε ακόμα περισσότερο
το 18ο αιώνα με τις αξιοσημείωτες
εργασίες των μαθηματικών
Bernoulli, De Moivre, Laplace και
Gauss. Ιδιαίτερα ο Laplace με τις
εργασίες του άνοιξε μια καινούργια
εποχή για τη Θεωρία Πιθανοτήτων.
Γιατί ο Laplace δεν περιορίζεται
μόνο στη μαθηματική ανάλυση των
τυχερών παιγνιδιών, αλλά
εφαρμόζει τα συμπεράσματά του
και σε ένα πλήθος από
επιστημονικά και πρακτικά
προβλήματα. Έτσι, με αφορμή τη
μελέτη των σφαλμάτων που
προκύπτουν στις
επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του
ίδιου αστρονομικού μεγέθους
ανακαλύπτεται η περίφημη**

κανονική κατανομή του Gauss. Κατόπιν αποδεικνύεται ότι η κανονική κατανομή απεικονίζει όχι μόνο την κατανομή των σφαλμάτων των αστρονομικών παρατηρήσεων αλλά και την κατανομή πολλών βιολογικών, κοινωνικών και φυσικών φαινομένων. Έτσι, στη διάρκεια του 19ου αιώνα γεννιούνται νέοι κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως είναι η Θεωρία των Σφαλμάτων, τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά και η Στατιστική Μηχανική.

Στις μέρες μας η Θεωρία των Πιθανοτήτων με τις εργασίες πολλών διάσημων μαθηματικών, όπως είναι οι Chebyshev, Markov, Von Mises, Kolmogorov κ.ά., έχει σημειώσει αλματώδη πρόοδο. Καινούργια θεωρητικά

αποτελέσματα παρέχουν νέες δυνατότητες για τη χρησιμοποίηση των μεθόδων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι εφαρμογές των Πιθανοτήτων αναφέρονται σε ένα ευρύτατο φάσμα επιστημών όπως η Φυσική, η Χημεία, η Γενετική, η Ψυχολογία, η Οικονομολογία, η Τηλεπικοινωνία, η Μετεωρολογία κτλ.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ανήκει στους κλάδους των Μαθηματικών που συμβαδίζουν με την ανάπτυξη των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας. Αυτό δε σημαίνει βέβαια ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι απλώς ένα βοηθητικό εργαλείο για τη λύση πρακτικών προβλημάτων των άλλων επιστημών. Απεναντίας έχει μετασχηματιστεί σε έναν αυτοτελή

κλάδο των καθαρών Μαθηματικών, που έχει δικά του προβλήματα και δικές του μεθόδους.

1.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Πείραμα Τύχης

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, αν θερμάνουμε αποσταγμένο νερό σε 100° Κελσίου στην επιφάνεια της θάλασσας, δηλαδή σε ατμοσφαιρική πίεση 760 mm Hg, το νερό θα βράσει. Επίσης, αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει στο κενό υπό την επίδραση της βαρύτητας, μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το διάστημα που θα διανύσει σε ορισμένο χρόνο t . Κάθε τέτοιο πείραμα κατά το οποίο η γνώση

των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται αιτιοκρατικό (deterministic) πείραμα.

Υπάρχουν όμως και πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται πείραμα τύχης (random experiment). Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια εβδομάδα σε ένα σημείο μιας εθνικής οδού, αφού ο αριθμός αυτός εξαρτάται από πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες.

Πειράματα τύχης είναι και τα εξής:

- 1. Ρίχνεται ένα νόμισμα και καταγράφεται η άνω όψη του.**
- 2. Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.**
- 3. Διαλέγεται αυθαίρετα μια οικογένεια με δύο παιδιά και εξετάζεται ως προς το φύλο των παιδιών και τη σειρά γέννησής τους.**
- 4. Ρίχνεται ένα νόμισμα ώσπου να φέρουμε “γράμματα” αλλά όχι περισσότερο από τρεις φορές.**
- 5. Επιλέγεται τυχαία μια τηλεφωνική συνδιάλεξη και καταγράφεται η διάρκειά της.**
- 6. Γίνεται η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ και καταγράφεται το αποτέλεσμα.**
- 7. Την παραμονή του Πάσχα, στις 5 μ.μ., μετράται το μήκος της ουράς των αυτοκινήτων στα πρώτα**

διόδια της Εθνικής οδού Αθηνών-Λαμίας.

8.Επιλέγεται τυχαία μια μέρα της εβδομάδος και μετράται ο αριθμός των τηλεθεατών που παρακολούθησαν το απογευματινό δελτίο ειδήσεων στην ΕΤ1.

9.Επιλέγεται τυχαία μια ραδιενεργός πηγή και καταγράφεται ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Δειγματικός Χώρος

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών

αποτελεσμάτων λέγεται δειγματικός χώρος (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω . Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\} .$$

Έτσι, στο πρώτο από τα παραπάνω πειράματα τύχης, αν με K συμβολίσουμε το αποτέλεσμα να φέρουμε “κεφαλή” και με Γ το αποτέλεσμα να φέρουμε “γράμματα”, τότε ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{K, \Gamma\}$. Επίσης, στο δεύτερο από τα παραπάνω πειράματα τύχης η ένδειξη της άνω έδρας μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ενδεχόμενα

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται ενδεχόμενο (event) ή γεγονός. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού τα σύνολα $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ και $\Gamma = \{6\}$ είναι ενδεχόμενα. Το A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό, το B να φέρουμε περιττό αριθμό και το Γ να φέρουμε 6. Είναι φανερό ότι ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Ένα ενδεχόμενο λέγεται απλό όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και σύνθετο αν έχει περισσότερα στοιχεία. Για παράδειγμα, το Γ είναι ένα απλό ενδεχόμενο, ενώ τα A και B είναι σύνθετα ενδεχόμενα. Όταν το

αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται ή συμβαίνει. Γι' αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και ευνοϊκές περιπτώσεις για την πραγματοποίησή του. Έτσι, για παράδειγμα, το ενδεχόμενο $A=\{2,4,6\}$ έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται, όταν φέρουμε 2 ή 4 ή 6.

Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω . Γι' αυτό το Ω λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο \emptyset

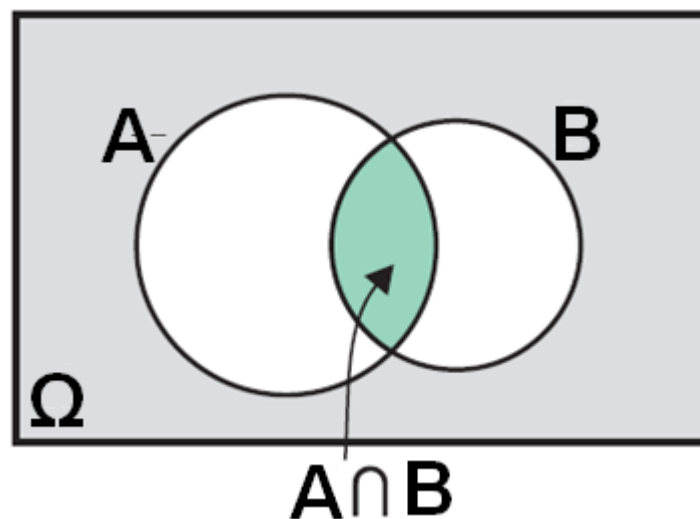
που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το \emptyset είναι το αδύνατο ενδεχόμενο.

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A θα το συμβολίζουμε με $N(A)$. Επομένως, αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $A = \{2, 4, 6\}$ έχουμε $N(A) = 3$, $N(\Omega) = 6$ και $N(\emptyset) = 0$.

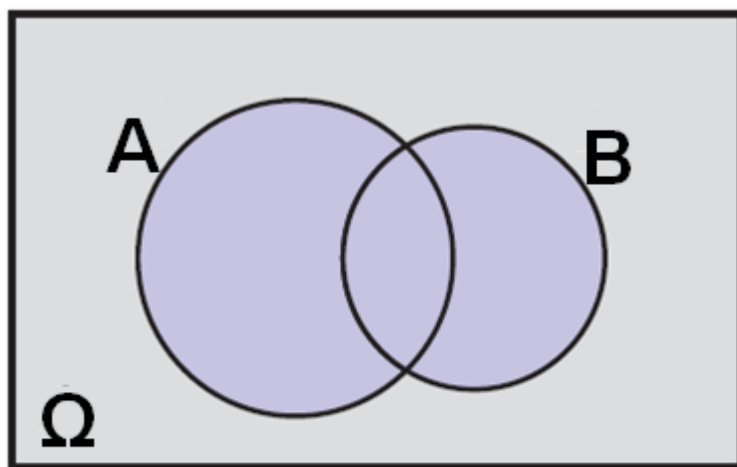
Πράξεις με Ενδεχόμενα

Όπως είδαμε, τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω . Επομένως, μεταξύ των ενδεχομένων ενός πειράματος μπορούν να οριστούν οι γνωστές πράξεις μεταξύ των συνόλων, από τις οποίες προκύπτουν νέα ενδεχόμενα. Έτσι, αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα, έχουμε:

- Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται “Α τομή Β” ή “Α και Β” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.

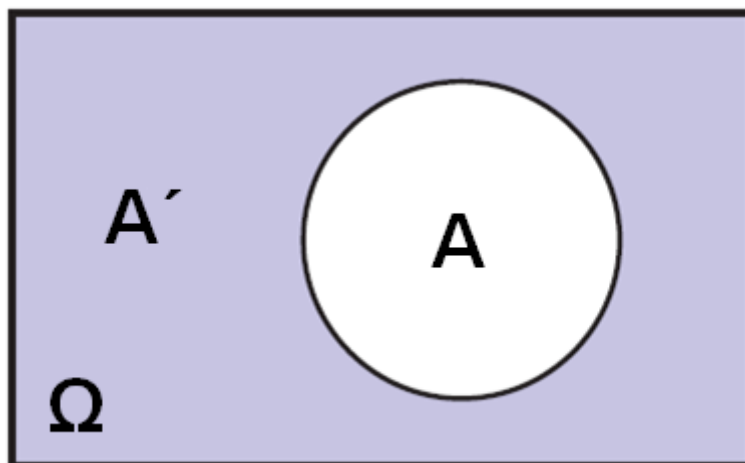


- Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται “Α ένωση Β” ή “Α ή Β” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.

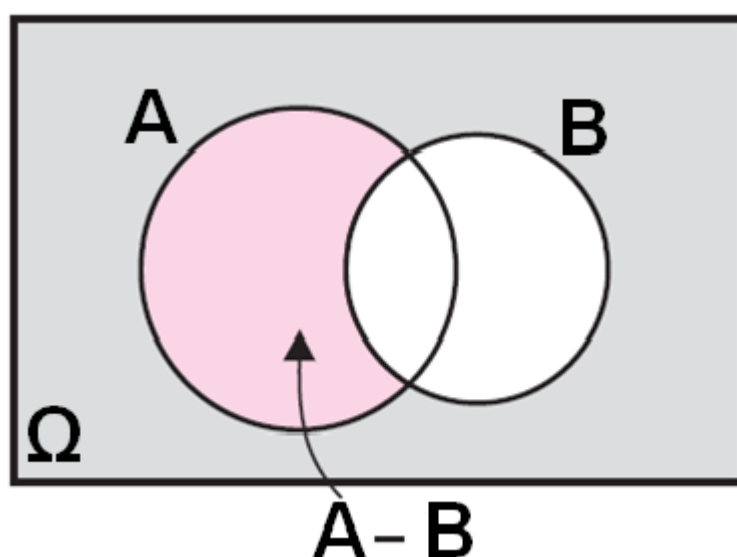


$A \cup B$

- Το ενδεχόμενο A' , που διαβάζεται “όχι A” ή “συμπληρωματικό του A” και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A. Το A' λέγεται και “αντίθετο του A”.



- Το ενδεχόμενο $A - B$, που διαβάζεται “διαφορά του B από το A ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B . Είναι εύκολο να δούμε ότι $A - B = A \cap B'$.



Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη

αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται	$\omega \in A$
---------------------------------------	----------------

Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
--	---

Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματο- ποιείται	$\omega \in A \cup B$
--	-----------------------

Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B	$\omega \in A \cap B$
---	-----------------------

Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in$ $(A \cup B)'$
---	-------------------------------

Πραγματοποιείται	$\omega \in A - B$
------------------	--------------------

μόνο το A

(ή $\omega \in A \cap B'$)

Η πραγματοποίηση
του A συνεπάγεται
την

$$A \subseteq B$$

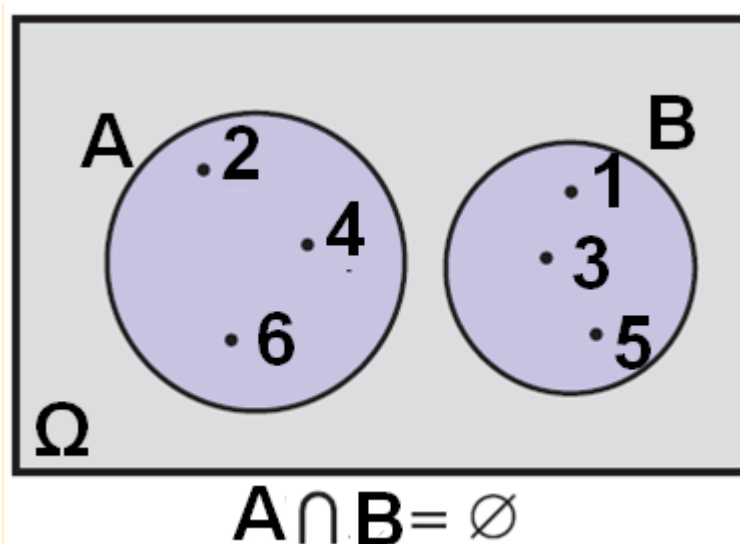
πραγματοποίηση
του B

Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού έστω τα ενδεχόμενα $A=\{1,2,3,4\}$ και $B=\{2,4,6\}$. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ο αριθμός 1, τότε τα ενδεχόμενα A , $A \cup B$, $A - B$, B' , πραγματοποιούνται, ενώ τα A' , B , $(A \cup B)'$, $(A - B)$, $A \cap B$ δεν πραγματοποιούνται.

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Στη ρίψη ενός ζαριού αν A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό και B το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό, έχουμε $A = \{2, 4, 6\}$ και $B = \{1, 3, 5\}$.

Παρατηρούμε ότι τα A και B δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, αφού δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Στην περίπτωση αυτή τα A και B λέγονται ασυμβίβαστα.



Γενικά:

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$. Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1^η Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.

i) Να γραφτεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος.

ii) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A_1 : “Ο αριθμός των K υπερβαίνει τον αριθμό των Γ ”

A_2 : “Ο αριθμός των K είναι ακριβώς 2”

A_3 : “Ο αριθμός των K είναι

τουλάχιστον 2”

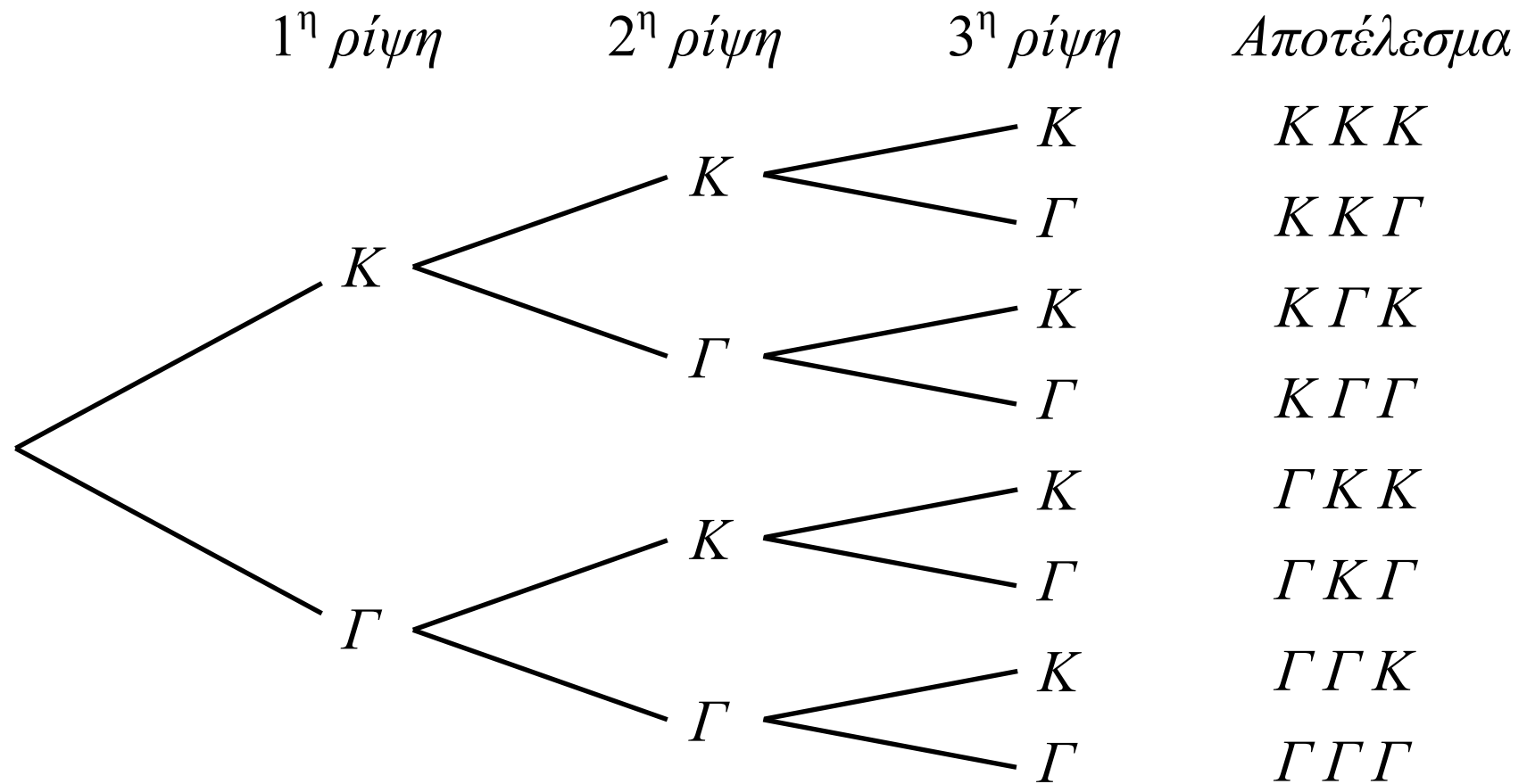
A4: “Ίδια όψη και στις τρεις ρίψεις”

A5: “Στην πρώτη ρίψη φέρνουμε Κ”.

iii) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A'_3 ,
 $A_5 \cap A_2$, $A_5 \cup A_4$,

ΛΥΣΗ

i) Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο, θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεντροδιάγραμμα:



Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες με στοιχεία το Κ και το Γ και είναι

$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$.

ii) Έχοντας υπόψη το δειγματικό χώρο Ω και την αντίστοιχη ιδιότητα έχουμε:

$A_1 = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$.

$A_2 = \{ΚΚΚ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$.

$A_3 = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$.
(Παρατηρούμε ότι $A_3 = A_1$)

$A_4 = \{ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$.

$A_5 = \{ΚΚΚ, ΚΓΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ\}$.

iii) Το A'_3 περιέχει εκείνα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που δεν περιέχει το A_3 , περιέχει δηλαδή τα στοιχεία στα οποία ο

αριθμός των Κ είναι μικρότερος από 2. Επομένως,
 $A'_3 = \{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$.

Το ενδεχόμενο $A_5 \cap A_2$ περιέχει τα κοινά στοιχεία των A_5 και A_2 , δηλαδή τα στοιχεία με δύο ακριβώς Κ, εκ των οποίων το ένα στην πρώτη θέση. Επομένως, $A_5 \cap A_2 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ\}$.

Το ενδεχόμενο $A_5 \cup A_4$ περιέχει τα στοιχεία που στην πρώτη θέση έχουν Κ ή τα στοιχεία που έχουν ίδιες και τις τρεις ενδείξεις. Επομένως, $A_5 \cup A_4 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$.

2^η Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B ενός πειράματος με δειγματικό χώρο Ω . Να παρασταθούν με διαγράμματα Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια συνόλων τα ενδεχόμενα που ορίζονται με τις εκφράσεις:

i) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B .

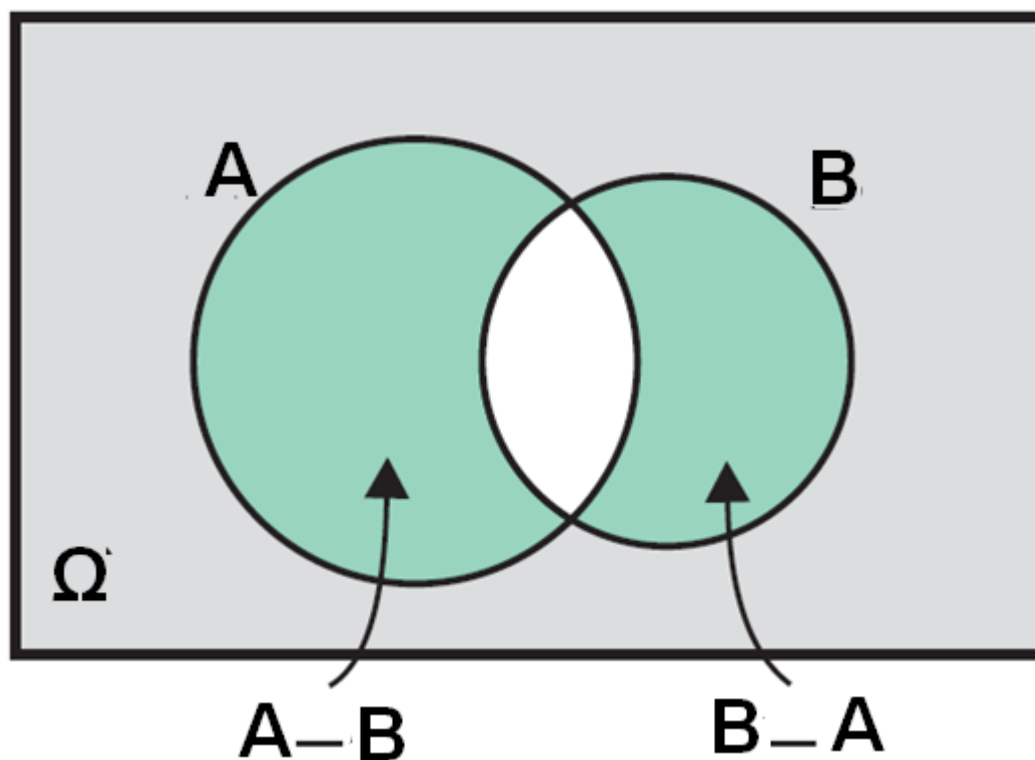
ii) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B .

ΛΥΣΗ

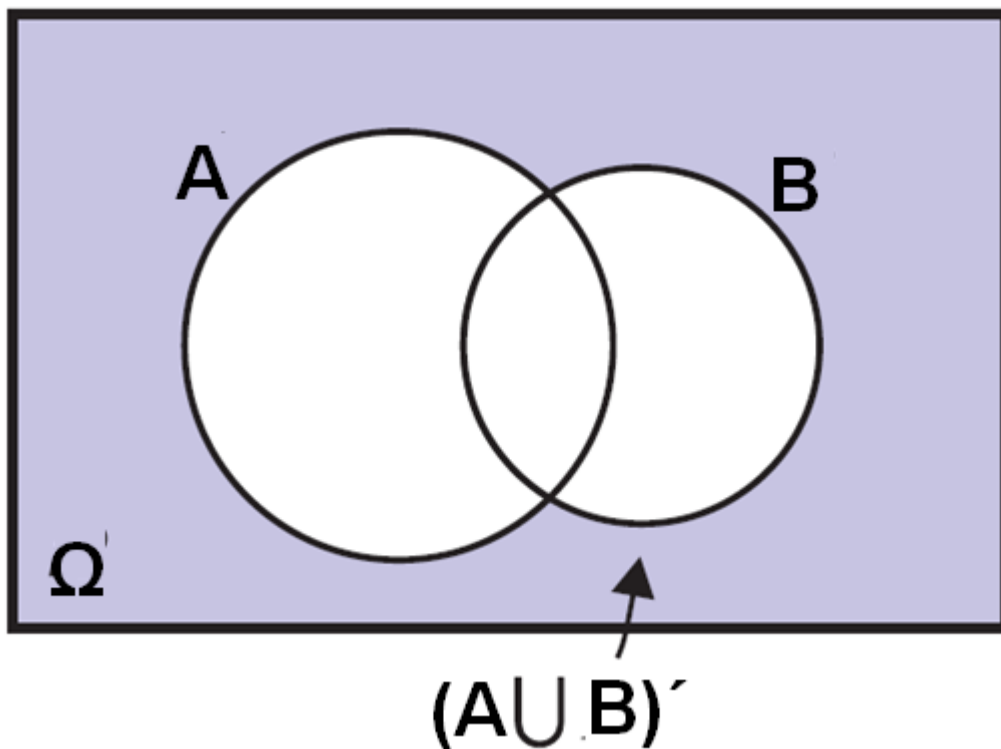
i) Επειδή θέλουμε να πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B , γραμμοσκιάζουμε τις επιφάνειες των A και B με εξαίρεση την τομή τους, δηλαδή την κοινή επιφάνειά τους.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή πραγματοποιείται ένα μόνο από τα $A-B$ και $B-A$. Άρα, το

ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A-B) \cup (B-A)$ ή ισοδύναμα το $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.



ii) Επειδή θέλουμε να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B, γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του Ω που είναι εκτός της ένωσης των A και B. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του $A \cup B$, δηλαδή το $(A \cup B)'$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο

κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση).

i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη”;

iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα”;

2. Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα, χωρίς όμως τώρα να γίνει επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας πριν την εξαγωγή της δεύτερης.

(Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση).

3. Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο ή στη Μακεδονία. Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο ή με πλοίο. Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της, με τρένο ή με αεροπλάνο. Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε:

i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο A: “Η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο στον τόπο των διακοπών της”.

4. Ένα ξενοδοχείο προσφέρει γεύμα που αποτελείται από τρία πιάτα. Το κύριο πιάτο, το

συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Γεύμα	Επιλογές
Κύριο πιάτο	Κοτόπουλο ή φιλέτο
Συνοδευτικό	Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα
Γλυκό	Παγωτό ή τούρτα ή ζελέ

Ένα άτομο πρόκειται να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο.

i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο A: “το άτομο επιλέγει παγωτό”

iii) Να βρείτε το ενδεχόμενο B: “το άτομο επιλέγει κοτόπουλο”

iv) Να βρείτε το ενδεχόμενο

$$A \cap B$$

v) Αν Γ το ενδεχόμενο: “το άτομο επιλέγει ρύζι”, να βρείτε το ενδεχόμενο

$$(A \cap B) \cap \Gamma$$

5. Η διεύθυνση ενός νοσοκομείου κωδικοποιεί τους ασθενείς σύμφωνα με το αν είναι ασφαλισμένοι ή όχι και σύμφωνα με την κατάσταση της υγείας τους, η οποία χαρακτηρίζεται ως καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Η διεύθυνση καταγράφει με 0 τον ανασφάλιστο ασθενή και με 1 τον ασφαλισμένο, και στη συνέχεια δίπλα γράφει ένα από τα γράμματα α, β, γ ή δ, ανάλογα με το αν η κατάστασή του είναι καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Θεωρούμε το πείραμα της

κωδικοποίησης ενός νέου ασθενούς. Να βρείτε:

i) Το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

ii) Το ενδεχόμενο A: “η κατάσταση του ασθενούς είναι σοβαρή ή κρίσιμη και είναι ανασφάλιστος”.

iii) Το ενδεχόμενο B: “η κατάσταση του ασθενούς είναι καλή ή μέτρια”.

iv) Το ενδεχόμενο Γ: “ο ασθενής είναι ασφαλισμένος”.

6. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα:

i) Ρίχνουμε ένα ζάρι. A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και B

είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.

ii) Επιλέγουμε ένα άτομο. Α είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και Β το ενδεχόμενο να είναι καθολικός.

iii) Επιλέγουμε μια γυναίκα. Α είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και Β το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια.

iv) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. Α είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και Β το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.

7.Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως

προς τη σειρά γέννησής τους. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

- 1. Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.**
- 2. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:**

A: “Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης”.

B: “Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός”

Γ: “Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5”

Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} & A \cap B, \\ & A \cap \Gamma, \\ & B \cap \Gamma, \\ & (A \cap B) \cap \Gamma. \end{aligned}$$

1.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Εισαγωγή

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης, όπως είδαμε, είναι η αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα του πειράματος θα εμφανιστεί σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του. Επομένως, αν A είναι ένα ενδεχόμενο, δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε αν το A θα πραγματοποιηθεί ή όχι. Γι' αυτό είναι χρήσιμο να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ενδεχόμενο A έναν αριθμό, που θα είναι ένα μέτρο της “προσδοκίας” με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίησή του. Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε πιθανότητα του A και τον συμβολίζουμε με $P(A)$.

Πώς όμως θα προσδιορίσουμε για κάθε ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης την πιθανότητά του; Δηλαδή πώς θα βρούμε μια διαδικασία με την οποία σε κάθε ενδεχόμενο θα αντιστοιχίζουμε την πιθανότητά του; Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά.

Έννοια και Ιδιότητες Σχετικής Συχνότητας

Αν σε n εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται k φορές, τότε ο λόγος ονομάζεται σχετική συχνότητα του A και συμβολίζεται με $\frac{k}{n}$. Ιδιαίτερα αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\lambda\}$ και σε n εκτελέσεις

του πειράματος αυτού τα απλά
ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_\lambda\}$
πραγματοποιούνται $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_\lambda$
φορές αντιστοίχως, τότε για τις
σχετικές συχνότητες

$$f_1 = \frac{\kappa_1}{\nu}, f_2 = \frac{\kappa_2}{\nu}, \dots, f_\lambda = \frac{\kappa_\lambda}{\nu}$$

των απλών ενδεχομένων θα
έχουμε:

1.

$$0 \leq f_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, \lambda$$

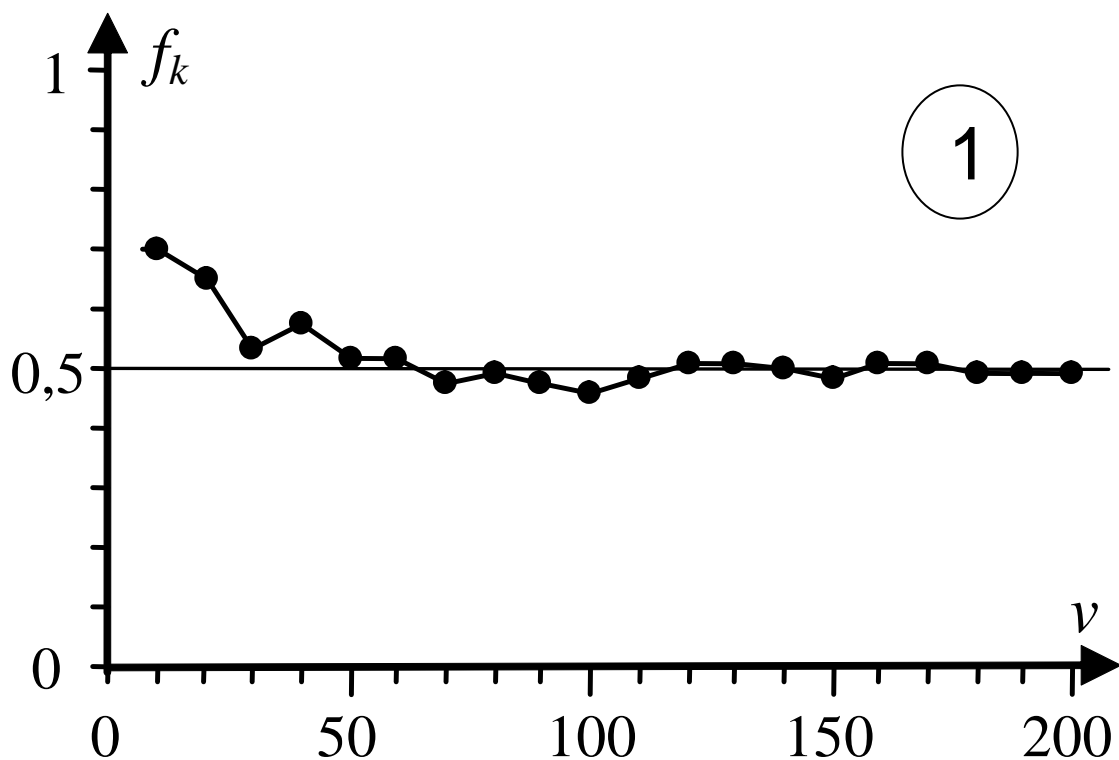
(αφού $0 \leq \kappa_i \leq \nu$)

2.

$$f_1 + f_2 + \dots + f_\lambda = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_\lambda}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$$

Ας εκτελέσουμε τώρα το ακόλουθο πείραμα: Ρίχνουμε ένα συμμετρικό και ομογενές νόμισμα και σημειώνουμε με Κ το αποτέλεσμα “κεφαλή” και με Γ το αποτέλεσμα “γράμματα”.

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται το πλήθος των Κ και οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες στις 10, 20, 30, ..., 200 ρίψεις του νομίσματος ενώ στο σχήμα 1 παριστάνεται το αντίστοιχο διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων Πίνακας ρίψεων ενός νομίσματος

ν	κ	f_k
10	7	0,700
20	13	0,650
30	16	0,533
40	23	0,575
50	26	0,520
60	31	0,517
70	33	0,471
80	39	0,488
90	43	0,478

100	46	0,460
110	53	0,482
120	61	0,508
130	66	0,508
140	70	0,500
150	73	0,486
160	81	0,506
170	87	0,512
180	89	0,494
190	93	0,489
200	99	0,495

Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός n των ρίψεων η σχετική συχνότητα f_k εμφάνισης της “κεφαλής” σταθεροποιείται γύρω από την τιμή $0,5$ ή, όπως λέμε “τείνει” στον αριθμό $0,5$. Αυτό επιβεβαιώνει την “προσδοκία” μας ότι στη ρίψη ενός συμμετρικού και ομογενούς νομίσματος ή, όπως λέμε, ενός “αμερόληπτου”

νομίσματος, οι σχετικές συχνότητες των ενδεχομένων $\{K\}, \{\Gamma\}$ είναι ίσες. Ανάλογα παραδείγματα μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών. Θα προσπαθήσουμε τώρα στηριζόμενοι στις προηγούμενες διαπιστώσεις να ορίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση του αμερόληπτου νομίσματος. Ρίχνουμε ένα τέτοιο νόμισμα και παρατηρούμε την όψη που θα εμφανιστεί. Όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα $\{Κ\}, \{Γ\}$ τείνει στον αριθμό

$$\frac{1}{2}$$

Ομοίως θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε ότι στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ και $\{6\}$ τείνει στον αριθμό

$$\frac{1}{6}$$

Σε πειράματα όπως τα προηγούμενα λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα ή, ισοδύναμα, τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Ας δούμε τώρα ποια αναμένουμε να είναι η σχετική συχνότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα.

Έστω για παράδειγμα, το ενδεχόμενο να φέρουμε ζυγό αριθμό στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού. Επειδή το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι 2 ή 4 ή 6 και καθένα από τα αποτελέσματα αυτά εμφανίζεται με σχετική συχνότητα

$$\frac{1}{6}$$

η συχνότητα εμφάνισης του ζυγού αριθμού αναμένεται να είναι

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

Γενικά, σε ένα πείραμα με n ισοπίθانا αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με k στοιχεία θα τείνει στον αριθμό

$$\frac{k}{n}$$

Γι' αυτό είναι εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθانا αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Έτσι, έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, που διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

1.
$$P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$$

2.
$$P(\emptyset) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$$

3. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει
$$0 \leq P(A) \leq 1,$$

αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Για να μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας σε ένα δειγματικό χώρο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, είναι απαραίτητο τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθانا. Υπάρχουν όμως πολλά πειράματα τύχης, των οποίων ο δειγματικός χώρος δεν αποτελείται από ισοπίθانا απλά ενδεχόμενα. Όπως για παράδειγμα ο αριθμός των αυτοκινητιστικών δυστυχημάτων μια ορισμένη εβδομάδα, η ρίψη ενός ζαριού που δεν είναι συμμετρικό κτλ. Για τις

περιπτώσεις αυτές
χρησιμοποιούμε τον παρακάτω
αξιοματικό ορισμό της
πιθανότητας, ο οποίος έχει
ανάλογες ιδιότητες με τη σχετική
συχνότητα.

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v\}$ ένας
δειγματικός χώρος με
πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.
Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$
αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό
αριθμό, που τον συμβολίζουμε με
 $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

$$0 \leq P(\omega_i) \leq 1$$

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_v) = 1$$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε
πιθανότητα του ενδεχομένου
 $\{\omega_i\}$.

Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός
ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$

ορίζουμε το άθροισμα $P(a_1)+P(a_2)+\dots+P(a_k)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου \emptyset ορίζουμε τον αριθμό $P(\emptyset)=0$.

Αν

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n},$$

$i=1,2,\dots,n$, τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου. Στην πράξη, ιδιαίτερα στην περίπτωση που δεν ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου A λαμβάνεται το όριο της σχετικής του συχνότητας.

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ και χρησιμοποιούμε τη φράση “παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω ”, εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, γνωστές ως “κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων”. Οι κανόνες αυτοί θα αποδειχθούν στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύουν και στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθانا.

1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

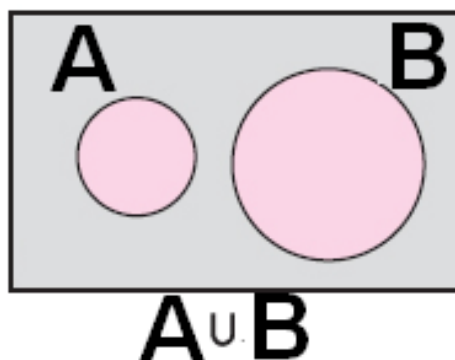
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$, τότε το $A \cup B$ έχει $\kappa + \lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δε θα ήταν ασυμβίβαστα.

Δηλαδή, έχουμε
 $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$.

Επομένως:

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B) &= \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} \\
 &= \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} \\
 &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} \\
 &= P(A) + P(B)
 \end{aligned}$$



Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως απλός προσθετικός νόμος (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$.

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \cap A' = \emptyset$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

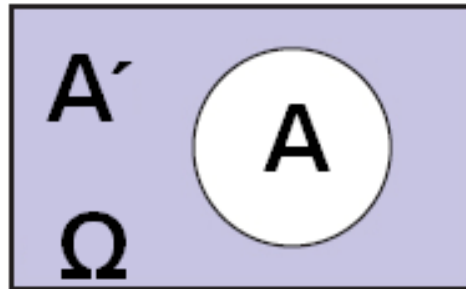
$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A')$$

Οπότε :

$$P(A')=1-P(A).$$



3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B), \quad (1)$$

αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

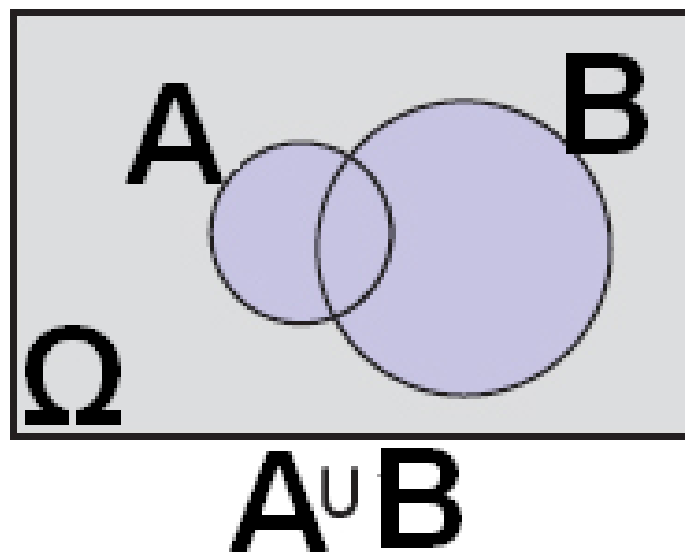
Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$**P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)**$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως προσθετικός νόμος (additive law).



4.

Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

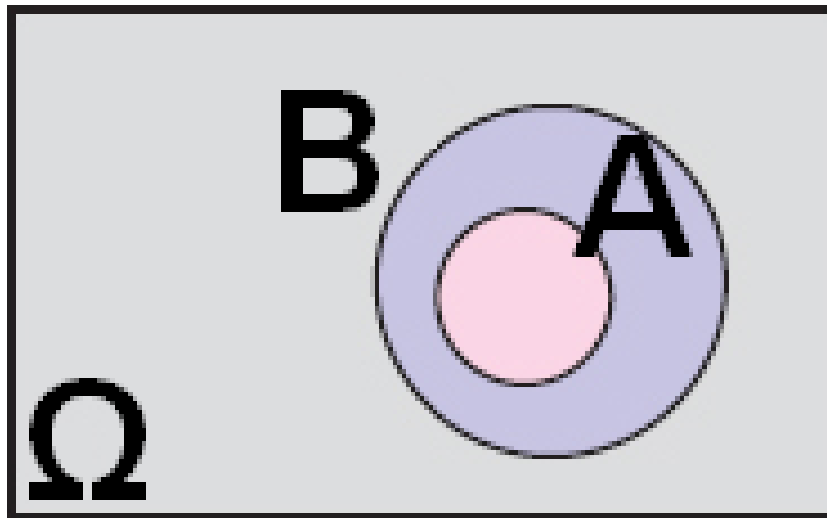
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \leq N(B)$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$P(A) \leq P(B)$$



5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

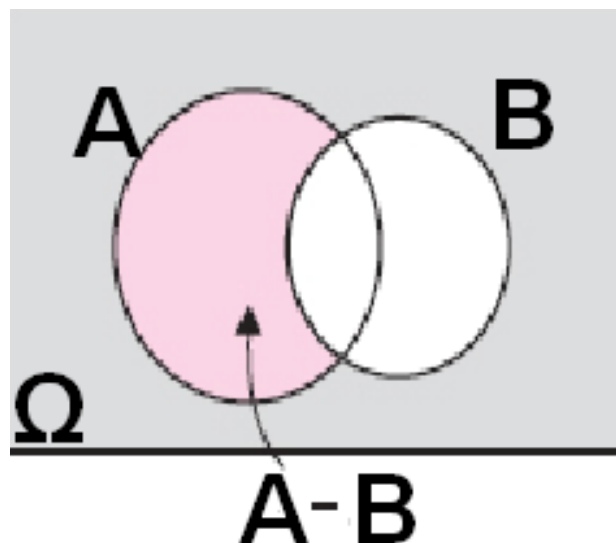
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και

$(A-B) \cup (A \cap B) = A$, έχουμε:

$$P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)$$

Άρα $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Ρίχνουμε δύο “αμερόληπτα” ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς.

ΛΥΣΗ

- Για να βρούμε το δειγματικό χώρο του πειράματος, χρησιμοποιούμε έναν πίνακα “διπλής εισόδου”, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

2ο						
1ο	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Από τον πίνακα αυτόν έχουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω έχει 36 ισοπίθانا δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή $N(\Omega)=36$.

- Το ενδεχόμενο A: “να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς”, είναι ΤΟ

$$A = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\}$$

δηλαδή $N(A) = 10$

Επομένως,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Άρα, η πιθανότητα να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς είναι ή

$$\frac{5}{18} \approx 0,28$$

, στη γλώσσα των ποσοστών, περίπου 28%.

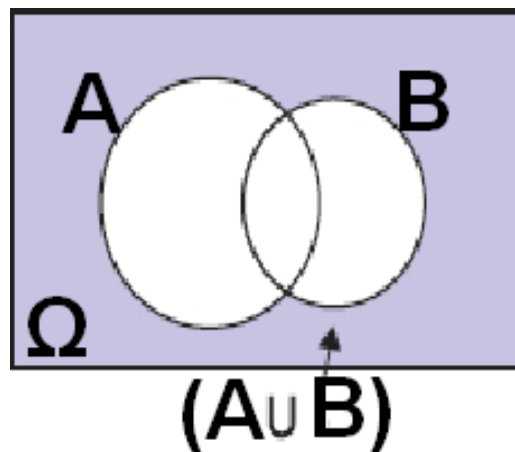
2η Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται $P(A)=0,5$, $P(B)=0,4$ και $P(A \cap B)=0,2$.
Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:

- i) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B .
- ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B .

ΛΥΣΗ

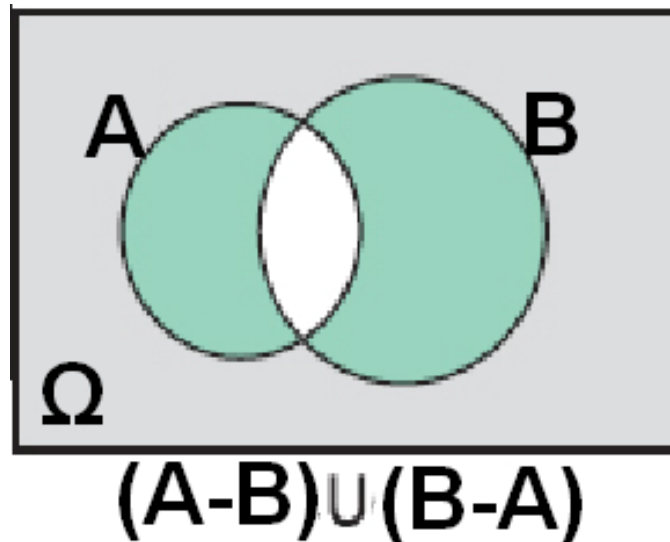
i) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B είναι το $(A \cup B)'$. Επομένως

$$\begin{aligned}
P((A \cup B)') &= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\
&= 1 - (0,5 + 0,4 - 0,2) \\
&= 1 - 0,7 \\
&= 0,3.
\end{aligned}$$



ii) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B είναι το $(A - B) \cup (B - A)$. Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:

$$\begin{aligned}
P((A-B) \cup (B-A)) &= P(A-B) + P(B-A) \\
&= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\
&= 0,5 + 0,4 - 2 \cdot 0,2 \\
&= 0,5 .
\end{aligned}$$



3η Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A)=0,6$ και $P(B)=0,5$.

i) Να εξεταστεί αν τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,5 .$$

ΛΥΣΗ

i) Αν τα A και B ήταν ασυμβίβαστα, από τον απλό προθετικό νόμο των πιθανοτήτων θα είχαμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,6 + 0,5 = 1,1$$

ισχύει, δηλαδή, $P(A \cup B) > 1$, που είναι άτοπο. Άρα, τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

ii) Επειδή $A \cap B \subseteq B$ και $A \cap B \subseteq A$, έχουμε

$$P(A \cap B) \leq P(B) \text{ και } P(A \cap B) \leq P(A),$$

επομένως $P(A \cap B) \leq 0,5$ (1)

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - P(A \cap B)$$

Όμως

$$P(A \cup B) \leq 1.$$

Επομένως:

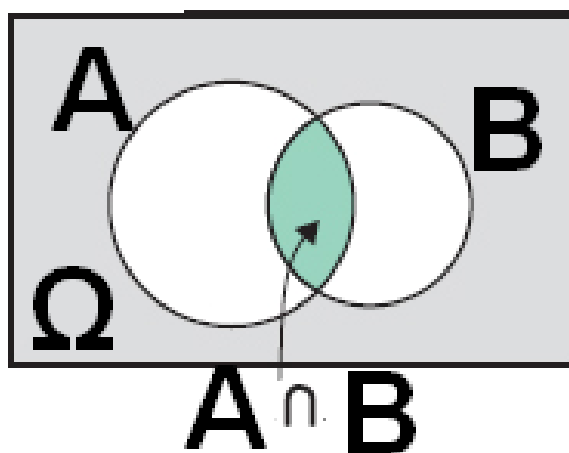
$$0,6 + 0,5 - P(A \cap B) \leq 1$$

$$0,6 + 0,5 - 1 \leq P(A \cap B)$$

$$0,1 \leq P(A \cap B) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,5$$



Ασκήσεις

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων i) το χαρτί να είναι πέντε ii) το χαρτί να μην είναι πέντε.

2. Να βρείτε την πιθανότητα στη ρίψη δύο νομισμάτων να εμφανιστούν δύο “γράμματα”.

3. Ένα κουτί περιέχει μπάλες: 10 άσπρες, 15 μαύρες, 5 κόκκινες και 10 πράσινες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι:

i) μαύρη ii) άσπρη ή μαύρη iii) ούτε κόκκινη ούτε πράσινη.

4. Σε μια τάξη με 30 μαθητές, ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέρφια έχουν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Αριθμός μαθητών	4	11	9	3	2	1
Αριθμός αδελφών	0	1	2	3	4	5

Αν επιλέξουμε τυχαία από την τάξη ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τρία παιδιά.

5. Έστω τα σύνολα $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N} / 10 \leq \omega \leq 20\}$, $A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$ και $B = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 4\}$. Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα στοιχείο του Ω , να βρείτε τις πιθανότητες

- i) να ανήκει στο A
- ii) να μην ανήκει στο B .

6. Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να

κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30%, η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40%. Να βρείτε την πιθανότητα i) να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος ii) να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος.

7. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$P(A) = \frac{17}{30}$$

$$P(B) = \frac{7}{15}$$

και

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

Να βρείτε την $P(A \cap B)$.

8. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

και

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

Να βρείτε την $P(B)$.

9. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου είναι γνωστό ότι $P(A)=P(B)$, $P(A \cup B)=0,6$ και $P(A \cap B)=0,2$. Να βρείτε την $P(A)$.

10. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω

δίνεται ότι

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B') = \frac{2}{3}$$

και

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

Να βρείτε την $P(A \cup B)$.

11. Για δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

12. Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχουν κάρτα D, το 55% έχουν κάρτα V

και το 15% έχουν και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μία τουλάχιστον από τις δυο κάρτες;

13. Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει

- α) τουλάχιστον μία ασθένεια;
- β) μόνο μία ασθένεια;

14. Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μη μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες.

B' ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω έχουμε $P(A)=\kappa$, $P(B)=\lambda$ και $P(A \cap B)=\mu$, να βρείτε τις πιθανότητες:

i) να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A και B .

ii) να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B

iii) να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B .

2. Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση, το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαίως ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο.

3. Αν

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$$

, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A')$.

4. Αν $0 < P(A) < 1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} \geq 4$$

5. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=0,6$ και $P(B)=0,7$, να δείξετε ότι $0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,6$.

6. Για δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(B) - P(A') \leq P(A \cap B)$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 1^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Αν ρίξουμε δύο νομίσματα τα αποτελέσματα μπορεί να είναι δύο “κεφαλές”, μια “κεφαλή” και μια “γράμματα”, η δύο “γράμματα”, και επομένως, καθένα από αυτά τα ενδεχόμενα έχει πιθανότητα

$$\frac{1}{3}$$

Τι είναι λάθος στο επιχείρημα αυτό; Ποιο είναι το σωστό;

2. Ένα νόμισμα ρίχνεται 5 φορές και έρχεται κάθε φορά “κεφαλή”. Επομένως, η πιθανότητα να φέρουμε “κεφαλή” σε μια ρίψη του νομίσματος είναι

$$\frac{5}{5} = 1$$

Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα αυτό.

3. Τρία συνηθισμένα ζάρια, ένα άσπρο, ένα μαύρο και ένα κόκκινο, τοποθετούνται σε ένα κουτί. Ένα πείραμα συνίσταται στην τυχαία επιλογή ενός ζαριού από το κουτί, στη ρίψη του ζαριού αυτού και στην παρατήρηση του χρώματος και της ένδειξης της άνω έδρας του.

(α) Τι σημαίνει εδώ η λέξη “τυχαία”;

(β) Το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου του πειράματος είναι

(i) $3 \cdot 6$ (ii) 3^6 (iii) 6^3 (iv) $3 \cdot 6^3$.

(Σε καθεμιά από τις ερωτήσεις 4-6 μία μόνο από τις συνοδευτικές απαντήσεις είναι σωστή. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση).

(Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση)

4. Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι 0,4, ποια είναι η πιθανότητα της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου αυτού;

(α) 0,2 (β) 0,8 (γ) 0,6

(δ) 1,4.

5. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι τέτοια ώστε

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

ποια είναι η $P(A \cup B)$;

(α) 1

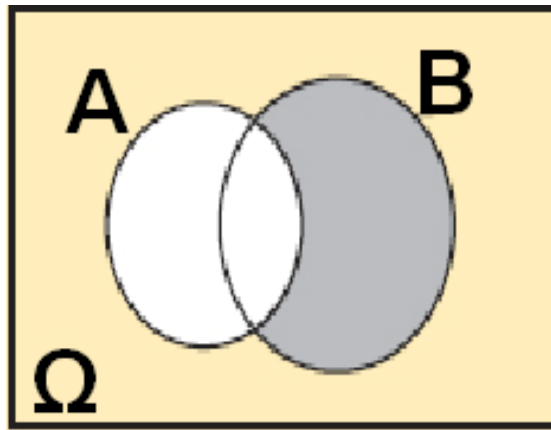
(β) $\frac{3}{4}$

(γ) $\frac{1}{4}$

(δ) $\frac{1}{16}$

(ε) τίποτα από τα προηγούμενα.

6. Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο διπλανό διάγραμμα Venn το σκιασμένο εμβαδόν;



(α) B (β) A' (γ) $A-B$ (δ) $B-A$.

(Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις 7-9 είναι σωστή ή λάθος. Αν είναι σωστή, κυκλώστε το Σ , αν είναι λάθος, κυκλώστε το Λ).

7. Δύο συμπληρωματικά

ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους.

Σ Λ

8. Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι αντίθετα.

Σ Λ

9. Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ξένα μεταξύ τους, τότε και τα συμπληρωματικά τους A' και B' είναι ξένα μεταξύ τους

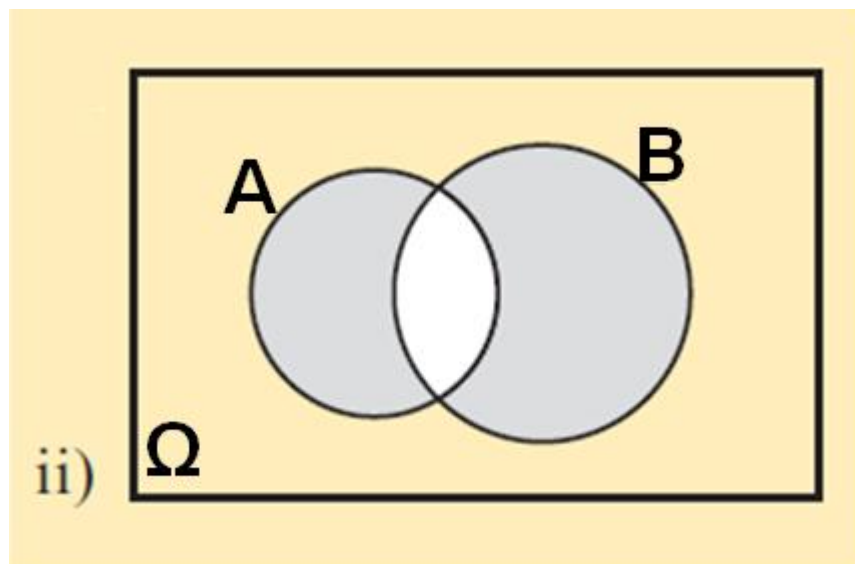
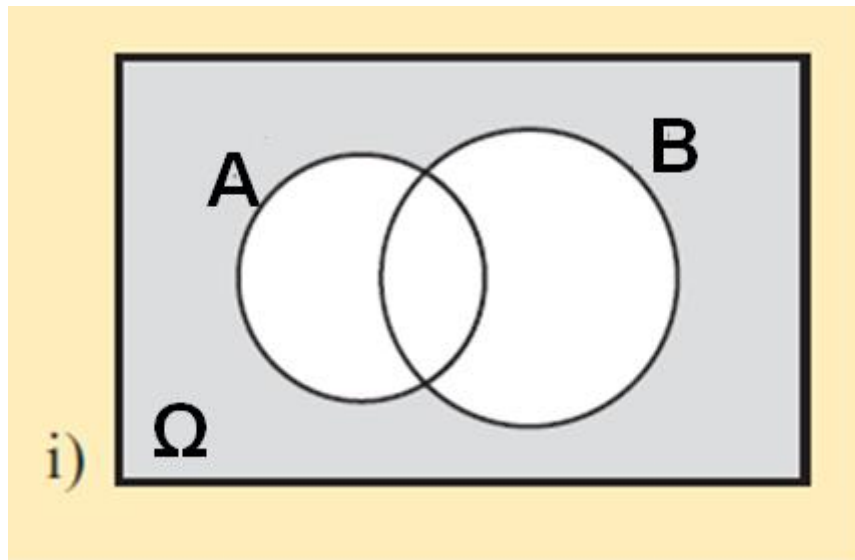
Σ Λ

10. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ξένα μεταξύ τους, μπορεί να ισχύει $P(A) + P(B) = 1,3$;

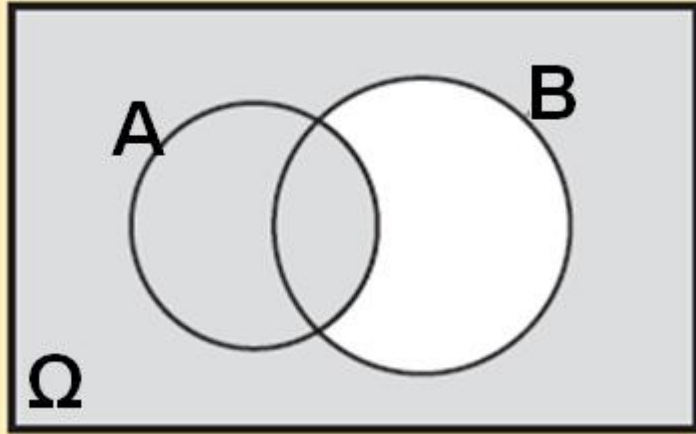
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

11. Να γράψετε με τη βοήθεια των πράξεων των συνόλων το ενδεχόμενο που παριστάνει το

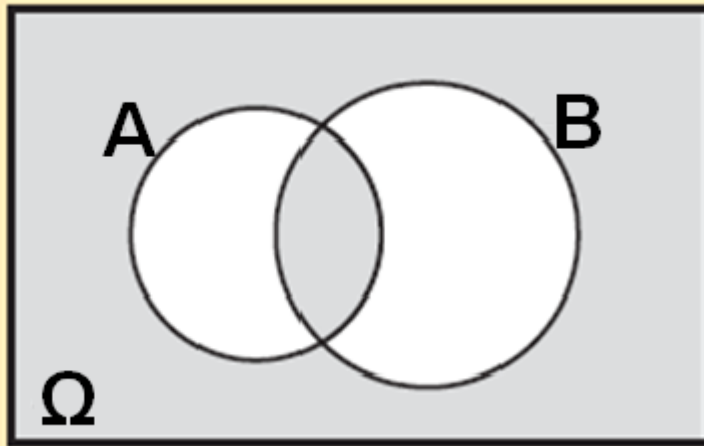
σκιασμένο εμβαδόν σε καθένα
από τα παρακάτω διαγράμματα
Venn:



iii)



iv)



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 1ου ΤΟΜΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ε1 Το Λεξιλόγιο της Λογικής5

Ε2 Σύνολα15

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο:

Πιθανότητες

1.1 Δειγματικός Χώρος –

Ενδεχόμενα.....39

1.2 Έννοια της Πιθανότητας.....69