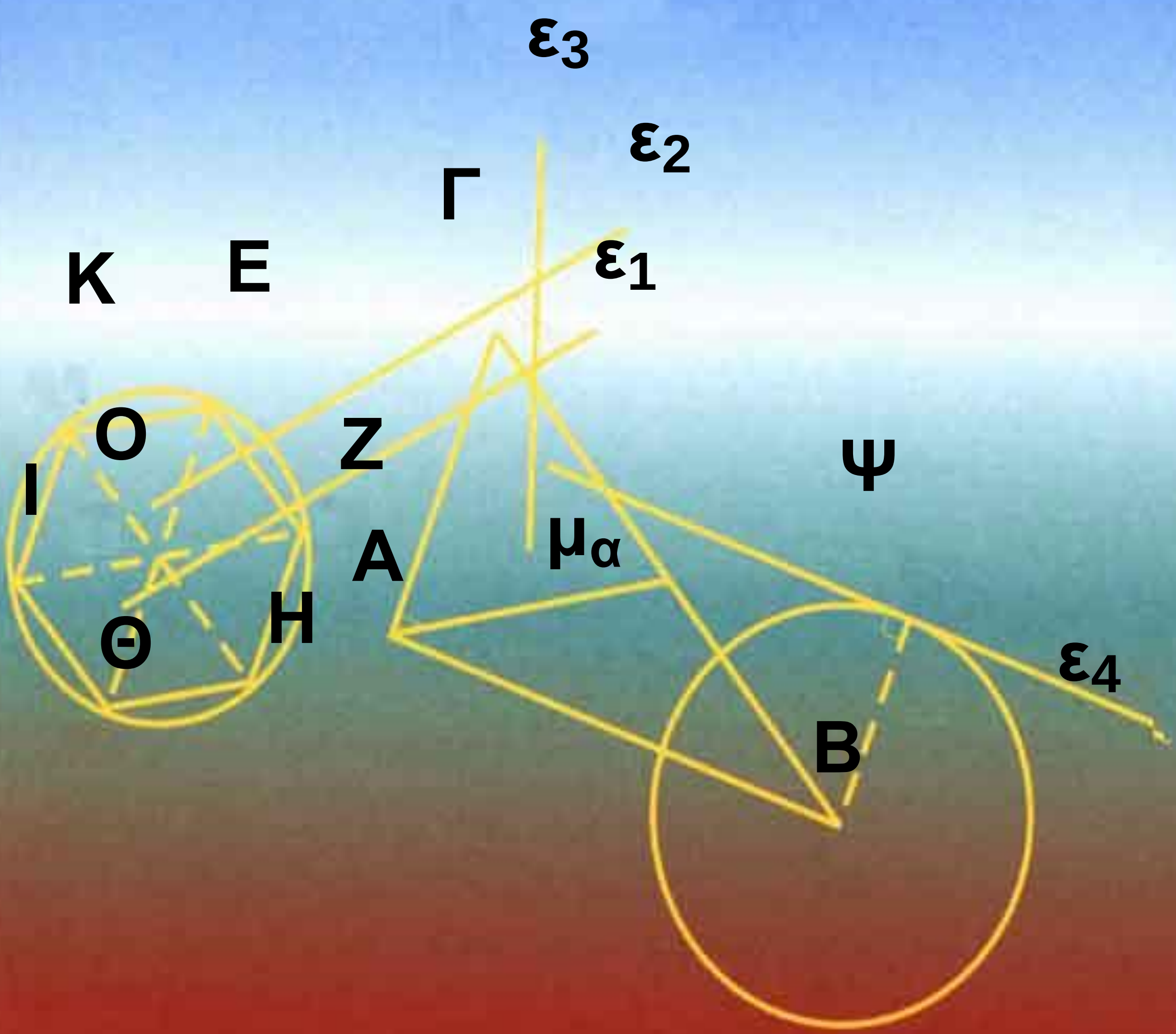
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Α΄ και Β΄ Γενικού Λυκείου



Τόμος 1ος

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΗΛΙΑΣ
ΒΛΑΜΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΤΣΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΜΑΡΚΑΤΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ
ΣΙΔΕΡΗΣ ΠΟΛΥΧΡΟΝΗΣ

ΤΟΜΟΣ 1ος

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

Αργυρόπουλος Ηλίας
Διδάκτωρ Μαθηματικών
Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Βλάμος Παναγιώτης
Διδάκτωρ Μαθηματικών
Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Κατσούλης Γεώργιος
Μαθηματικός

Μαρκάτης Στυλιανός
Επίκουρος Καθηγητής, Τομέα
Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Σίδερης Πολυχρόνης
Μαθηματικός, τ. Σχολικός
Σύμβουλος

Ιστορικά Σημειώματα:
Βανδουλάκης Ιωάννης
Διδάκτωρ Πανεπιστημίου
M. Lomonosov Μόσχας
Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Φιλολογική Επιμέλεια:
Δημητρίου Ελένη

Επιλογή εικόνων:
Παπαδοπούλου Μπία

Εικονογράφηση - Σελιδοποίηση:
Αλεξοπούλου Καίτη

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>
Ομάδα εργασίας του Υπουργείου Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η «Ευκλείδεια Γεωμετρία» έχει ένα διττλό ρόλο να εκπληρώσει: να μυηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό - επαγωγικό σύστημα του Ευκλείδη και να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Το βιβλίο αυτό, σύμφωνο με τα πλαίσια συγγραφής που έθεσε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ευελπιστεί ότι θα οδηγήσει τους μαθητές του Λυκείου να γνωρίσουν την αυστηρή αλλά και λιτή μαθηματική γλώσσα, ελπίζοντας ότι θα συνεισφέρει στη μαθηματική παιδεία του τόπου, αναπτύσσοντας το ρεαλισμό της μαθηματικής λογικής και σκέψης.

Το έργο αυτό είναι αποτέλεσμα της συλλογικής προσπάθειας μιας ομάδας μαθηματικών, οι οποίοι

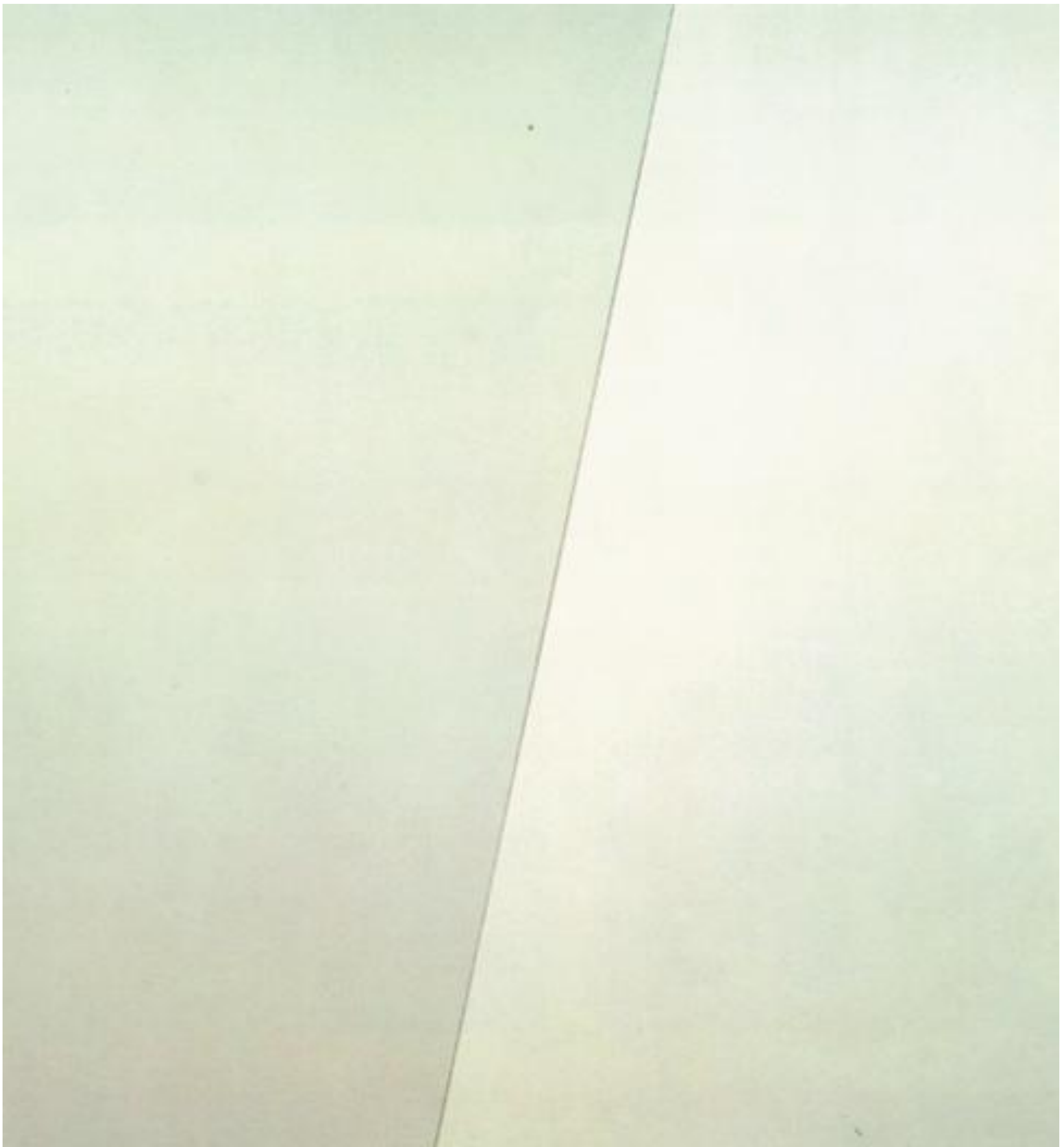
αποδεχόμενοι την πρόσκληση του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας εργάστηκαν συστηματικά για την πραγματοποίησή του.

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά: το Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας για τη βοήθεια που μας πρόσφερε σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής του έργου, τον Καθηγητή του Ε.Μ. Πολυτεχνείου κ. Ευγένιο Αγγελόπουλο για τις σημαντικές του παρατηρήσεις στη διαμόρφωση του βιβλίου και τα μέλη της επιτροπής κρίσης που με τις εύστοχες παρατηρήσεις τους βοήθησαν στην τελική μορφή αυτού του έργου.

Οι συγγραφείς

1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία



Ellsworth Kelly

(Αμερικανός,1923)

«Γκρι πανό 2»

2 πανό, λάδια σε καμβά, 1974

1.1 Τα αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μελέτη του **χώρου** και των **σχημάτων**, επίπεδων και στερεών, που μπορούν να υπάρξουν μέσα σε αυτόν. Μέσα στο χώρο βρίσκεται ο φυσικός κόσμος, στον οποίο ζούμε, και όλα τα αντικείμενα, μεγάλα ή μικρά, έμψυχα ή άψυχα.

Στο χώρο διακρίνουμε τις **επιφάνειες**, τις **γραμμές** και τα **σημεία**. Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις, οι γραμμές μία, τα σημεία καμία. Οι επιφάνειες διαχωρίζουν τα αντικείμενα μεταξύ τους ή από το περιβάλλον. Πάνω σε μια επιφάνεια μπορούμε να θεωρήσουμε γραμμές, οι οποίες μάλιστα μπορεί να την οριοθετούν. Εδώ χρειάζεται μια

διευκρίνιση. Στην καθημερινή γλώσσα μιλάμε για «γραμμές» της ασφάλτου ή για σιδηροδρομικές «γραμμές», επειδή το πλάτος στη μία περίπτωση, το πλάτος και το ύψος στην άλλη είναι αμελητέα ως προς το μήκος. Γενικά, όλα τα υλικά αντικείμενα εκτείνονται σε τρεις διαστάσεις. Στην καθημερινή γλώσσα δεχόμαστε τις προσεγγίσεις, στη Γεωμετρία όχι. Λειτουργούμε αναγκαστικά με αφηρημένες έννοιες, που τις αποκαλούμε όρους της Γεωμετρίας.

Η Γεωμετρία ήταν ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε ως επιστήμη και επί αιώνες ο μόνος. Το αντικείμενό της, ο χώρος και τα σχήματα, είναι και προσιτό και πλούσιο, πρόσφορο για θεωρητική μελέτη αλλά και για πρακτικές εφαρμογές. Από την

εποχή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα μέχρι σήμερα, τα πεδία εφαρμογής της Γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται. Για τα σπίτια που ζούμε, τα καράβια που ταξιδεύουμε ή τις επεξεργασμένες εικόνες της τηλεόρασης είναι αναγκαία η χρήση της Γεωμετρίας, άμεση ή έμμεση. Αρχικά, η μελέτη των ιδιοτήτων των διάφορων γεωμετρικών σχημάτων έγινε με τρόπο εμπειρικό, όπως τη συναντήσαμε στο Γυμνάσιο. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε τότε ήταν η εύρεση ή επαλήθευση των ιδιοτήτων και σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μέτρηση, για την οποία χρησιμοποιούσαμε το διαβαθμισμένο κανόνα (υποδεκάμετρο) και το μοιρογνωμόνιο. Η μέτρηση όμως δεν μπορεί να είναι ακριβής και τα αποτελέσματά της δε γενικεύονται.

Η διαφοροποίηση της Πρακτικής Γεωμετρίας από τη Θεωρητική ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε στο Λύκειο, συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για το χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα. Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο – οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις θεμελιώνει, δηλαδή τις οργανώνει σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε καινούργιο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που λέγεται **απόδειξη** και που

στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.

Πώς προχωράει αυτή η διαδικασία; Ας δούμε λίγο το τετράγωνο. Το τετράγωνο, όσο απλό και αν φαίνεται, είναι σύνθετη έννοια. Έχει ίσες πλευρές και μάλιστα ανά δύο παράλληλες, ίσες γωνίες και μάλιστα όλες ορθές. Πρέπει, επομένως, πρώτα να ξεκαθαρίσουμε τι σημαίνει ισότητα και ανισότητα (πλευρών ή γωνιών), τι παραλληλία και τι ορθή γωνία (ή καθετότητα). Μόνο μετά από αυτά μπορούμε να μιλήσουμε για τετράγωνο, αφού πρώτα δώσουμε τον ορισμό του. Η Γεωμετρία προχωράει από το πιο απλό στο πιο σύνθετο.

Θα πρέπει, ωστόσο, από κάπου να ξεκινήσουμε, από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες

σημείο, ευθεία και επίπεδο τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Όμως οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- **Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.**
- **Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.**
- **Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.**

Ισχυρισμούς όπως οι παραπάνω, που τους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη, τους ονομάζουμε αξιώματα. Επομένως, τα αξιώματα δεν αποδεικνύονται, επιλέγονται. Για την Ευκλείδεια Γεωμετρία έχουν προταθεί πάρα πολλά αξιωματικά συστήματα,

δηλαδή διαφορετικές επιλογές αξιωμάτων (βλ. Παράρτημα Α). Η δομή του βιβλίου, η σειρά των αποτελεσμάτων εξαρτώνται από την επιλογή των αξιωμάτων, τα οποία δίνονται εκεί που χρειάζονται. Γενικότερα, γίνεται προσπάθεια ώστε, μετά από μία νέα έννοια ή ένα νέο σημαντικό αποτέλεσμα, να εξετάζεται τι καινούργιο μπορεί να προκύψει σε συνδυασμό με τα προηγούμενα. Κάθε νέο αποτέλεσμα που προκύπτει από μία σειρά συλλογισμών θεμελιωμένη στα αξιώματα λέγεται **θεώρημα**, ενώ οι άμεσες συνέπειες ενός θεωρήματος λέγονται **πορίσματα.**

Όπως προαναφέραμε αντικείμενο της Γεωμετρίας είναι η μελέτη των σχημάτων του επιπέδου και του χώρου. Η μελέτη αυτή συχνά

υποβοηθείται από ένα σχέδιο του σχήματος.

Στην πορεία εξαγωγής των συμπερασμάτων σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και η εποπτεία. Τα συμπεράσματα, για να είναι γενικά, δεν πρέπει να είναι συνέπειες μόνο της παρατήρησης του σχεδίου. Είναι αναγκαίο να προκύπτουν με ορθό συλλογισμό από τις ιδιότητες του σχήματος, οι οποίες άλλωστε είναι δυνατό να μην είναι όλες ορατές στο σχήμα. Για να καταλήξουμε σε μία απόδειξη ο δρόμος μπορεί να είναι μακρύς και να περνάει μέσα από εικασίες, λάθη, επανατοποθετήσεις, μέχρι να οδηγηθούμε στην τελική μορφή.

Είναι λοιπόν φανερό ότι οι συλλογισμοί μας, για την αντιμετώπιση ενός γεωμετρικού προβλήματος, πρέπει να είναι θεωρητικοί,

γενικοί και το σχέδιο του σχήματος να έρχεται αρωγός στην προσπάθεια ανακάλυψης εκείνων των ιδιοτήτων που θα μας οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ερμηνεύει τις μορφές του περιβάλλοντος χώρου χρησιμοποιώντας λίγες πρώτες αρχές και αξιοποιώντας τη σκέψη και τον ορθό λόγο.

1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας

Η γένεση των πρώτων εννοιών της Γεωμετρίας είναι μια διαδικασία που κράτησε πολλούς αιώνες. Η διαμόρφωσή τους ήταν αποτέλεσμα νοητικής αφαίρεσης όλων των άλλων ιδιοτήτων και σχέσεων των αντικειμένων του κόσμου που μας περιβάλλει, εκτός από τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης και του μεγέθους. Οι ιδιότητες αυτές εκφράζονται με την ιδέα ότι δύο αντικείμενα είναι «κοντά» ή ότι «άπτονται» το ένα του άλλου, τη σχέση τους όταν το ένα είναι «μέρος» του άλλου ή όταν ένα αντικείμενο βρίσκεται «μεταξύ» δύο άλλων ή το ένα «μέσα» στο άλλο, και την ιδέα της σύγκρισης δύο αντικειμένων, της εξακρίβωσης ότι το ένα είναι «μεγαλύτερο», «μικρότερο» ή «ίσο» με ένα άλλο. Στη διαμόρφωση των γεωμετρικών εννοιών, αποφασιστικής σημασίας πρέπει να ήταν η προσπάθεια απεικόνισης των γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων με ζωγραφικές παραστάσεις, που λειτουργούσαν ως μοντέλα των πραγματικών αντικειμένων. Η διαδικασία αυτή όμως δεν μπορεί να χρονολογηθεί ιστορικά.

Οι πρώτες γραπτές μαρτυρίες γεωμετρικών γνώσεων ανάγονται στην τρίτη με δεύτερη χιλιετία π.Χ. και προέρχονται από τους λαούς της αρχαίας Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Αν και οι μαρτυρίες αυτές δεν είναι πλούσιες, ωστόσο μπορούμε να σχηματίσουμε μια ιδέα για το χαρακτήρα της Γεωμετρίας στους πολιτισμούς

αυτούς. Οι γεωμετρικές γνώσεις των λαών αυτών συνίστανται, κατά κύριο λόγο, στον υπολογισμό επιφανειών και όγκων ακολουθώντας μια «αλγοριθμική» διαδικασία, έναν κανόνα, ο οποίος εφαρμόζεται για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Με μικρές εξαιρέσεις, τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται είναι εμπειρικής προέλευσης και η λύση που δίνεται δε συνιστά λογική απόδειξη, αν και σε μεμονωμένες περιπτώσεις προβλημάτων αναπτύσσονται μέθοδοι γεωμετρικών μετασχηματισμών, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως ένα είδος αποδεικτικής διαδικασίας. Αυτή η μορφή Γεωμετρίας διήρκεσε πολλούς αιώνες χωρίς να σημειωθεί αισθητή πρόοδος.

Μία νέα περίοδος εγκαινιάζεται στην αρχαία Ελλάδα, όπου η

Γεωμετρία μετασχηματίζεται σε αφηρημένη αποδεικτική επιστήμη. Εμφανίζεται η έννοια της λογικής απόδειξης που λειτουργεί ως μέθοδος επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας γεωμετρικής πρότασης, αλλά και ως στοιχείο που συστηματοποιεί τις γεωμετρικές γνώσεις. Έτσι εμφανίζονται οι πρώτες συστηματικές γεωμετρικές πραγματείες, όπως του Ιπποκράτη του Χίου και, περί το 440 π.Χ., τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, που αποτέλεσαν το επιστέγασμα της αρχαίας Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης, αλλά και πρότυπο επιστημονικού ιδεώδους για πολλούς αιώνες. Από μελέτη της θέσης, του μεγέθους και της μορφής των γεωμετρικών σχημάτων για άμεσες πρακτικές εφαρμογές η Γεωμετρία μεταμορφώνεται σε επιστήμη που μελετά αφηρη-

μένα νοητικά αντικείμενα, οι σχέσεις των οποίων αποδεικνύονται με τη βοήθεια μιας λογικής ακολουθίας προτάσεων, ξεκινώντας από ορισμένες υποθέσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη.

Την Ελληνιστική ακόμα περίοδο αναπτύσσονται θεμελιακά νέες μέθοδοι υπολογισμού επιφανειών και όγκων (π.χ. η μέθοδος της εξάντλησης στα έργα του Αρχιμήδη), που στηρίζονται σε αφηρημένες θεωρητικές προσεγγίσεις και βαθιές μαθηματικές θεωρίες. Επίσης, εμφανίζονται αφηρημένες θεωρίες για νέα γεωμετρικά αντικείμενα, η δυνατότητα εφαρμογής των οποίων θα διευκρινιστεί πολλούς αιώνες μετά, όπως π.χ. η θεωρία των κωνικών τομών του Απολλώνιου, που θα βρει εφαρμογή στη Φυσική μόλις το 17ο αιώνα. Την ίδια περίπου εποχή

φαίνεται ότι άρχισαν και οι έρευνες στα θεμέλια της Γεωμετρίας με τις προσπάθειες απόδειξης του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη (των παραλλήλων), οι οποίες συνεχίστηκαν από πολλούς μαθηματικούς του Αραβικού κόσμου.

Η Ευρωπαϊκή Αναγέννηση οδήγησε σε νέα άνθηση της Γεωμετρίας. Ένα νέο βήμα πραγματοποιείται με την εισαγωγή της μεθόδου των συντεταγμένων από τον Ντεκάρτ το πρώτο μισό του 17ου αι. Ο νέος μετασχηματισμός της Γεωμετρίας συνίσταται στη σύνθεση της αναπτυσσόμενης τότε Άλγεβρας με την Ανάλυση που βρισκόταν στο στάδιο της γένεσής της και τη δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας, η οποία μελετά τα γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια των μεθόδων της Άλγεβρας.

Η εφαρμογή των νέων μεθόδων του διαφορικού λογισμού στην Αναλυτική Γεωμετρία οδήγησε στον πολλαπλασιασμό των κλάδων της Γεωμετρίας. Το 18ο αι. διαμορφώνεται η Διαφορική Γεωμετρία στα έργα του Όυλερ και του Μόνζ, αντικείμενο της οποίας αρχικά γίνονται οποιεσδήποτε λείες καμπύλες και επιφάνειες και οι μετασχηματισμοί τους. Στα μέσα του 17ου αι. αναπτύσσεται και η Προβολική Γεωμετρία στις μελέτες του Ντεζάργκ και του Πασκάλ πάνω στην απεικόνιση σωμάτων στο επίπεδο. Το αντικείμενο του νέου κλάδου επικεντρώνεται από τον Πονσελέ (1822) στη μελέτη των ιδιοτήτων των επίπεδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή τους από ένα επίπεδο σε άλλο, ενώ η καθαυτό θεωρία της γεωμετρικής

απεικόνισης (σε συνδυασμό με τα προβλήματα σχεδίασης) οδήγησε στο σύστημα της Παραστατικής Γεωμετρίας του Μόνζ.

Σε όλους τους παραπάνω κλάδους οι θεμελιακές έννοιες και αξιώματα παρέμεναν σχεδόν τα ίδια από την εποχή της αρχαίας Ελλάδας. Άλλαζε το πεδίο των γεωμετρικών αντικειμένων που μελετόνταν και οι μέθοδοι που εφαρμόζονταν. Ριζική ανατροπή της εικόνας αυτής παρουσιάζεται στις αρχές του 19ου αι. με την ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τον Ν. Λομπατσέφσκι (1829) και τον Γ. Μπόλυαϊ (1832). Ο Λομπατσέφσκι, ξεκινώντας από την άρνηση του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη, κατασκεύασε ένα λογικά άψογο σύστημα Γεωμετρίας, παρά το γεγονός ότι οι ιδιότητες των

γεωμετρικών σχημάτων στο σύστημα που περιέγραφε βρίσκονταν σε κατάφωρη αντίθεση με τη συνήθη εποπτική αντίληψη του χώρου.

Η νέα περίοδος που εγκαινιάζεται με τον Λομπατσέφσκι χαρακτηρίζεται από την ανάπτυξη νέων γεωμετρικών θεωριών (νέων «Γεωμετρικών»), την αλλαγή του αντικειμένου της Γεωμετρίας (αντικείμενο της Γεωμετρίας γίνονται τώρα «χώροι» διάφορων ειδών) και το διαχωρισμό της έννοιας του «μαθηματικού» από την έννοια του «πραγματικού» χώρου. Η νέα έννοια του γενικευμένου μαθηματικού χώρου διατυπώνεται σαφώς από τον Ρήμαν το 1854 και ανοίγει νέες προοπτικές στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας οδηγώντας στη δημιουργία της λεγόμενης Ρημάνειας Γεωμετρίας, η οποία βρίσκει

εφαρμογή στη θεωρία της σχετικότητας. Με τη δύση του 19ου αι. τα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και των άλλων (μη Ευκλείδειων) «Γεωμετριών» αποσαφηνίζονται και εκτίθενται με τη μορφή συστήματος αξιωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η εμπέδωση και η συστηματική μελέτη των πρωταρχικών εννοιών: σημείο, ευθεία, επίπεδο καθώς και των βασικών γεωμετρικών σχημάτων: ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος, επίπεδο ευθύγραμμο σχήμα. Όπως είδαμε, οι πρωταρχικές έννοιες σημείο, ευθεία, επίπεδο δίνονται χωρίς ορισμό και με βάση αυτές ορίζονται τα βασικά γεωμετρικά σχήματα, τα οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Andrea Mantegna
(Ιταλός, περίπου 1431 - 1506).
Οροφή από την "Camera degli Sposi"
(Δωμάτιο των Συζύγων),
τοιχογραφία από το Δουκικό Παλάτι ,
στη Μάντοβα της Ιταλίας.

Οι πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες

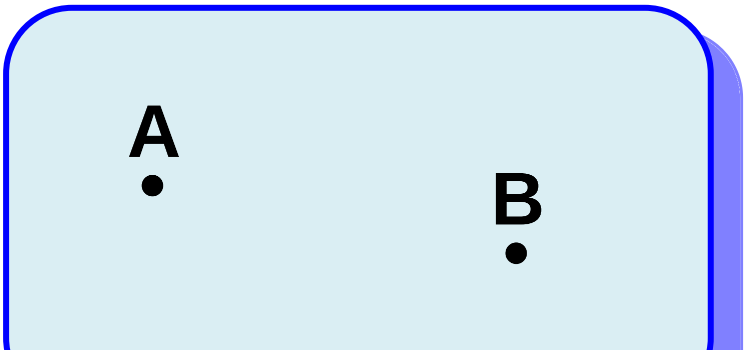
Όπως αναφέραμε ήδη στην Εισαγωγή, η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινά από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες σημείο, ευθεία και επίπεδο τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις

δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

2.1 Σημεία, γραμμές και επιφάνειες

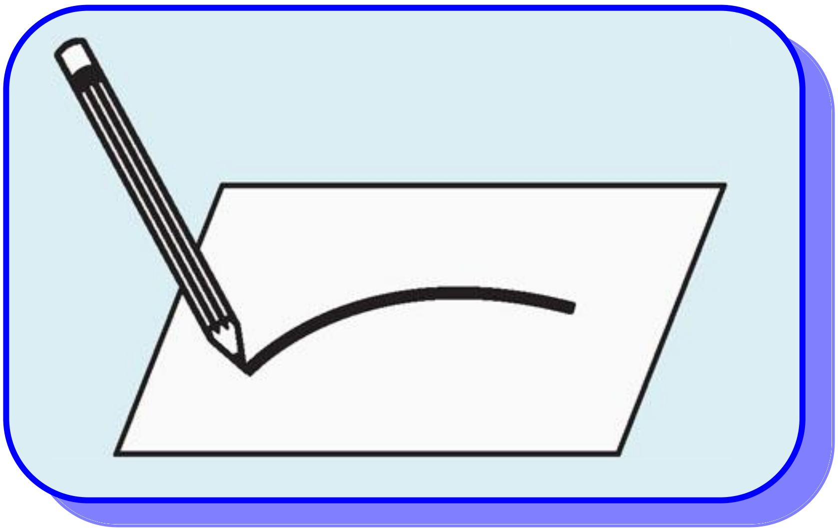
Ένα σημείο δεν έχει διαστάσεις. Το παριστάνουμε με μια τελεία και το ονομάζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα (π.χ. Σημείο Α, Σημείο Β (σχ.1).



Σχήμα 1

Αν μετακινήσουμε χωρίς διακοπή τη μύτη του μολυβιού πάνω σε ένα χαρτί, τότε το ίχνος της γράφει μία

γραμμή (σχ.2). Σε κάθε θέση του μολυβιού το ίχνος της μύτης του παριστάνει ένα σημείο.



Σχήμα 2

Επομένως, η γραμμή μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής σειρά θέσεων που παίρνει ένα κινητό σημείο.

Τη μορφή (σχήμα) κάθε στερεού σώματος την αντιλαμβανόμαστε από την επιφάνειά του. Το σύνολο των σημείων τα οποία το χωρίζουν από το περιβάλλον του ονομάζεται επιφάνεια του σώματος.

Αρχικά θα ασχοληθούμε με τη μελέτη σχημάτων ή γραμμών, που βρίσκονται σε μια ειδικού τύπου επιφάνεια, το **επίπεδο**.

2.2 Το επίπεδο

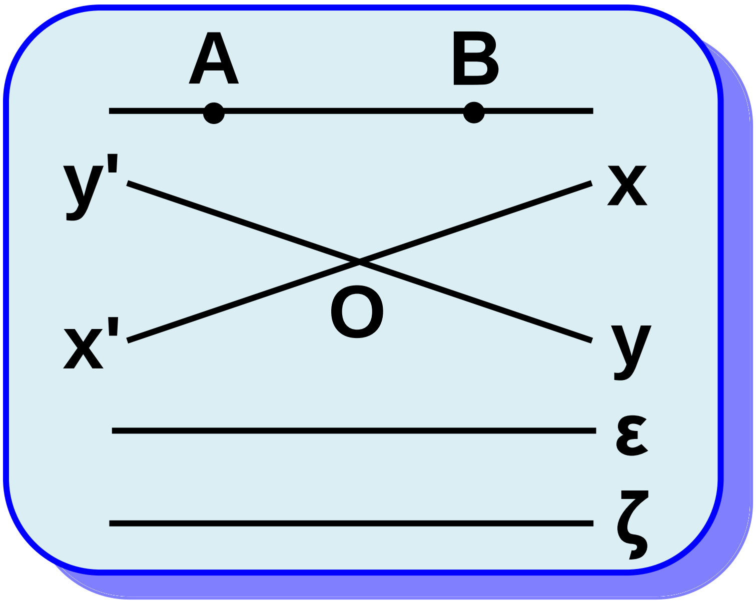
Η απλούστερη από όλες τις επιφάνειες είναι η επίπεδη επιφάνεια ή απλά το **επίπεδο**. Η επιφάνεια του πίνακα, η επιφάνεια ενός λείου δαπέδου, η επιφάνεια μιας ήρεμης λίμνης κτλ. μας δίνουν την εικόνα ενός επιπέδου.
Στο πρώτο μέρος της Γεωμετρίας, που λέγεται επιπεδομετρία δε θα ορίσουμε το επίπεδο ούτε τα αξιώματα που το χαρακτηρίζουν, αλλά θα το μελετήσουμε

εξετάζοντας τις ιδιότητες των σχημάτων, των οποίων όλα τα στοιχεία περιέχονται στο ίδιο επίπεδο. Τα σχήματα αυτά ονομάζονται επίπεδα σχήματα.

2.3 Η ευθεία

Γνωρίζουμε ότι από δύο διαφορετικά σημεία Α,Β διέρχεται μοναδική ευθεία. Την ευθεία αυτή ονομάζουμε ευθεία ΑΒ ή ΒΑ (σχ.3). Επίσης μία ευθεία συμβολίζεται είτε με ένα μικρό γράμμα (ε, ζ, …) του ελληνικού αλφαβήτου είτε ως x'x. Προφανώς δύο διαφορετικές ευθείες δεν μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία. Άρα θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο ή κανένα. Δύο ευθείες που έχουν ένα μόνο κοινό

σημείο λέγονται **τεμνόμενες** ευθείες και το κοινό σημείο τους λέγεται **τομή** των δύο ευθειών, ενώ δύο ευθείες που δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται **παράλληλες**.

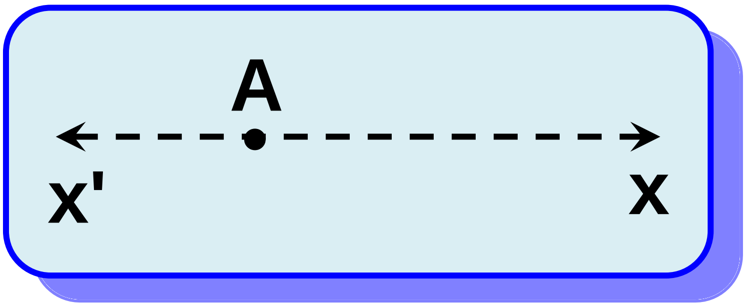


Σχήμα 3

Το ευθύγραμμο τμήμα

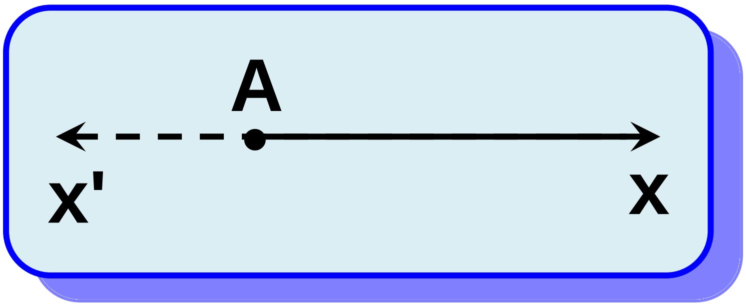
2.4 Η ημιευθεία

Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα χωρίς διακοπές και κενά. Έστω μία ευθεία x'x και σημείο της Α (σχ.4). Τότε το σημείο χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα οποία συμβολίζουμε Αx και Αx' και τα ονομάζουμε **ημιευθείες με αρχή** το σημείο Α.

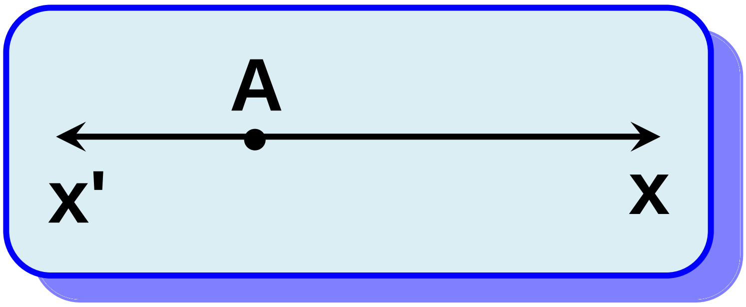


Σχήμα 4

Η ευθεία x'x λέγεται **φορέας** της ημιευθείας Αx (σχ.5). Δύο ημιευθείες Αx, Αy με μόνο κοινό σημείο την αρχή τους Α, όταν έχουν τον ίδιο φορέα λέγονται **αντικείμενες** (σχ.6).



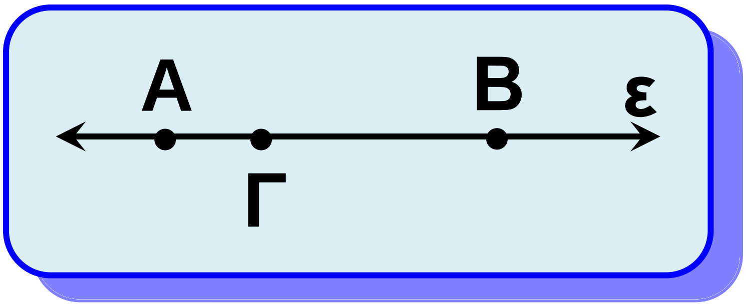
Σχήμα 5



Σχήμα 6

2.5 Το ευθύγραμμο τμήμα

Σε ευθεία ε θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία Α,Β. Ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ή ΒΑ (σχ.7) λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα δύο σημεία Α, Β και τα σημεία της ευθείας ε που βρίσκονται μεταξύ τους.



Σχήμα 7

Τα σημεία Α και Β λέγονται άκρα του ευθύγραμμου τμήματος, ενώ η

ευθεία ε λέγεται **φορέας** του τμήματος. Τα σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος, εκτός των άκρων του, λέγονται **εσωτερικά** σημεία του τμήματος. Αν π.χ. το Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ (σχ.7), λέμε ότι τα Α,Β βρίσκονται **εκατέρωθεν** του Γ, ενώ τα Β, Γ είναι **προς το ίδιο μέρος** του Α. Δύο τμήματα, που έχουν κοινό ένα άκρο και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγονται διαδοχικά.

Σημείωση:
Όταν λέμε ότι προεκτείνουμε το τμήμα ΑΒ, θα εννοούμε προς το μέρος του Β, ενώ το ΒΑ προς το μέρος του Α.

2.6 Μετατοπίσεις στο επίπεδο

Για κάθε επίπεδο σχήμα δεχόμαστε ότι μπορεί να μετατοπισθεί μέσα

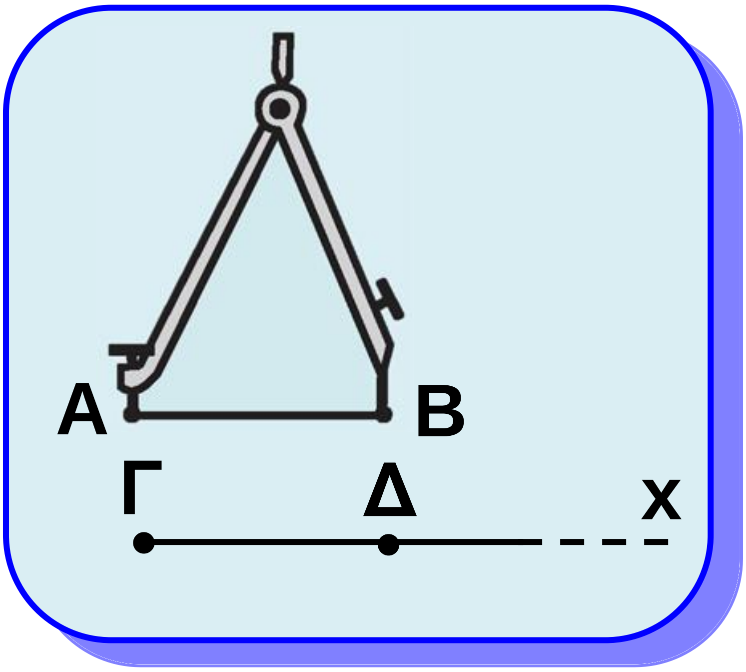
στο επίπεδο πηγαίνοντας από την αρχική του θέση σε μια οποιαδήποτε άλλη θέση και να παραμένει αναλλοίωτο ως προς τη μορφή και το μέγεθος.
Το τελικό σχήμα που προκύπτει (δηλαδή το αρχικό σχήμα στην τελική θέση) λέγεται ομόλογο (ή εικόνα) του αρχικού.

2.7 Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων

● Ίσα ευθύγραμμα τμήματα

Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ίσα, όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.
Για την ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων δεχόμαστε το παρακάτω αξίωμα:
Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Τότε για κάθε ημιευθεία Γx

υπάρχει μοναδικό σημείο της Δ, ώστε ΑΒ = ΓΔ (σχ.8). Άμεση συνέπεια του παραπάνω αξιώματος είναι η επόμενη κατασκευή.



Σχήμα 8

• Κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος ίσου προς δοσμένο

Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και η ημιευθεία Γx. Εφαρμόζουμε τη μια ακίδα του διαβήτη στο Α και την άλλη στο Β και, στη συνέχεια, κρατώντας σταθερό το άνοιγμα του

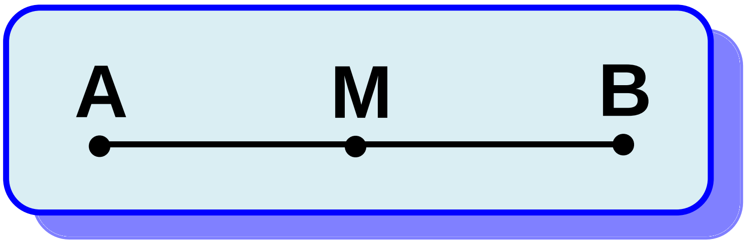
διαβήτη τοποθετούμε το ένα άκρο του στο Γ, οπότε το άλλο άκρο του ορίζει το σημείο Δ της Γx (σχ.8). Τότε το τμήμα ΓΔ είναι ίσο με το αρχικό.

• Γεωμετρικές κατασκευές

Η παραπάνω διαδικασία λέγεται **γεωμετρική κατασκευή**. Θα λέμε ότι ένα σχήμα κατασκευάζεται γεωμετρικά, όταν μπορούμε να το σχεδιάσουμε χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα **γεωμετρικά όργανα**, δηλαδή τον **κανόνα** (χωρίς υποδιαιρέσεις) και το **διαβήτη**.

• Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζεται ένα εσωτερικό του σημείο Μ τέτοιο, ώστε ΑΜ = ΜΒ (σχ.9). Δεχόμαστε ότι κάθε τμήμα έχει μοναδικό μέσο.



Σχήμα 9

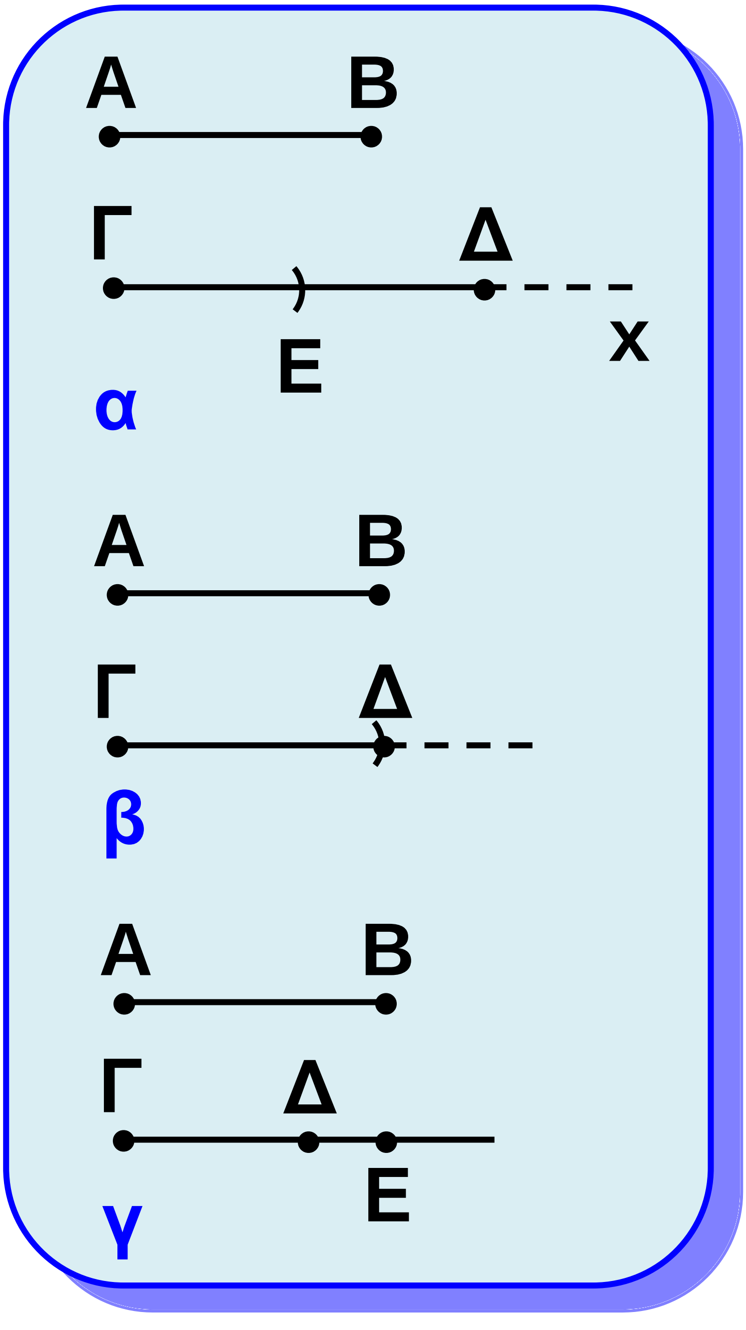
● Άνισα ευθύγραμμα τμήματα

Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ. Προεκτείνουμε το ΓΔ οπότε προκύπτει η ημιευθεία Γx. Μετατοπίζουμε το ΑΒ ώστε το Α να ταυτιστεί με το Γ. Τότε θα υπάρχει μοναδικό σημείο Ε της Γx, ώστε ΑΒ = ΓΕ.

• Αν το Ε είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΓΔ, θα λέμε ότι το τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από το ΓΔ. Συμβολίζουμε ΑΒ < ΓΔ (σχ. 10α).

• Αν το Ε ταυτίζεται με το Δ, τότε ΑΒ=ΓΔ, όπως προηγούμενα (σχ.10β).

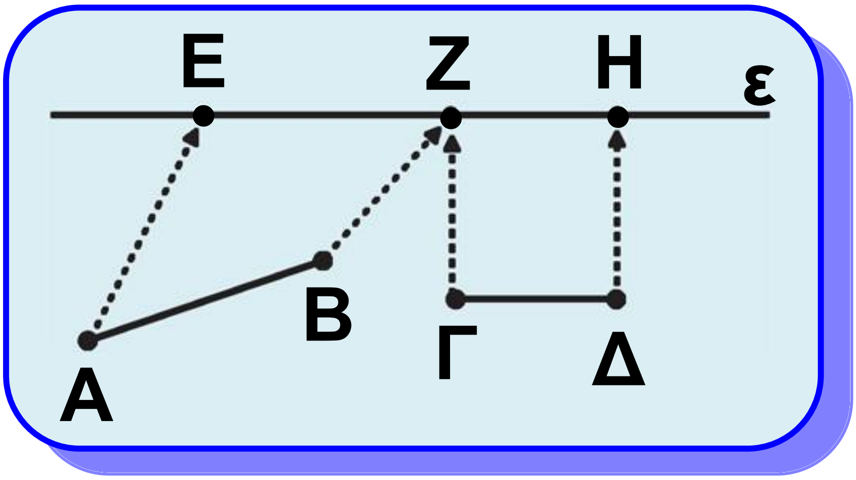
• **Αν το Ε δεν είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΓΔ, θα λέμε ότι το τμήμα ΑΒ είναι μεγαλύτερο από το ΓΔ. Συμβολίζουμε ΑΒ>ΓΔ (σχ.10γ).**



Σχήμα 10

2.8 Πράξεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων

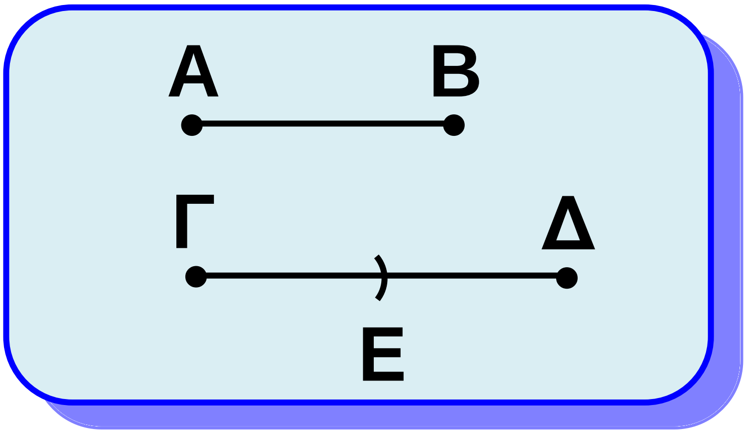
Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ.
(i) Με τη βοήθεια του διαβήτη ορίζουμε πάνω σε μία ευθεία ε τα διαδοχικά τμήματα ΕΖ = ΑΒ και ΖΗ = ΓΔ (σχ.11).



Σχήμα 11

Έτσι κατασκευάζουμε το τμήμα ΕΗ, που λέγεται άθροισμα των ΑΒ και ΓΔ και γράφουμε ΕΗ = ΑΒ + ΓΔ. Η διαδικασία αυτή λέγεται πρόσθεση δύο ευθύγραμμων τμημάτων. Στην πρόσθεση ευθύγραμμων τμημάτων

ισχύουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές που ισχύουν στην πρόσθεση αριθμών (βλ. Δραστηριότητα).
(ii) Αν ΑΒ < ΓΔ τότε υπάρχει εσωτερικό σημείο Ε του ΓΔ, ώστε ΓΕ = ΑΒ (σχ.12). Το τμήμα ΕΔ λέγεται διαφορά του ΑΒ από το ΓΔ και συμβολίζεται ΕΔ = ΓΔ - ΑΒ.

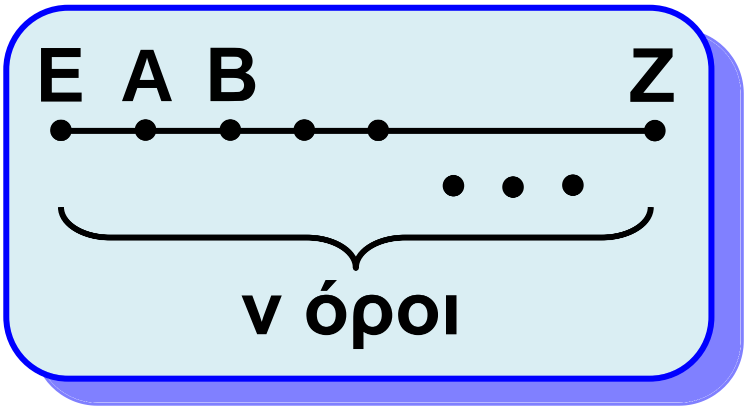


Σχήμα 12

(iii) Αν ν φυσικός αριθμός, τότε ονομάζεται γινόμενο του τμήματος ΑΒ επί το φυσικό αριθμό ν το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ, το οποίο είναι το άθροισμα ν διαδοχικών

ευθύγραμμων τμημάτων ίσων προς το ΑΒ (σχ.13). Γράφουμε

$$ΕΖ = ν \cdot ΑΒ \text{ ή ισοδύναμα } ΑΒ = \frac{ΕΖ}{ν}$$

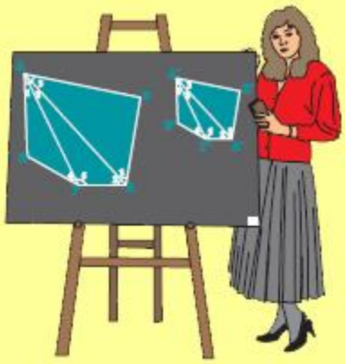


Σχήμα 13

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν ΑΒ = ΓΑ, τότε η διαφορά ΓΑ - ΑΒ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, τα άκρα του οποίου συμπίπτουν. Το τμήμα αυτό λέγεται μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα.

Δραστηριότητα



Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες που ισχύουν στην πρόσθεση των ευθύγραμμων τμημάτων:

i) ΑΒ + ΓΔ = ΓΔ + ΑΒ (αντιμεταθετική)

ii) (ΑΒ+ΓΔ) + ΕΖ = = ΑΒ + (ΓΔ +ΕΖ) (προσεταιριστική).

2.9 Μήκος ευθυγράμμου τμήματος - Απόσταση δυο σημείων

• Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

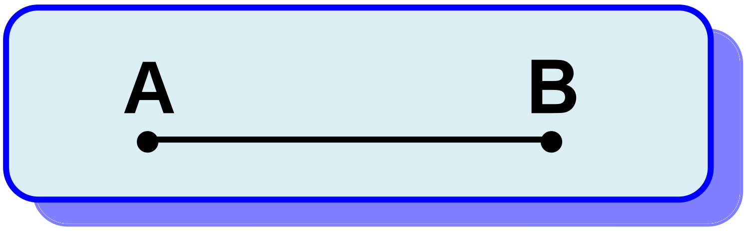
Είπαμε παραπάνω ότι μπορούμε να συγκρίνουμε κάθε ευθύγραμμο τμήμα με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα. Ένα τμήμα με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα λέγεται **μονάδα μήκους**. Θα δούμε στη συνέχεια (Κεφάλαιο 7) ότι για δύο οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΑΒ υπάρχει ένας θετικός αριθμός ρ (όχι απαραίτητα φυσικός), ώστε ΓΔ = ρΑΒ. Έτσι, αν θεωρήσουμε ως μονάδα μήκους το ΑΒ, τότε ο αριθμός ρ λέγεται **μήκος** του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Το μήκος του τμήματος ΑΒ θα συμβολίζεται με (ΑΒ) ή απλούστερα με ΑΒ, όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης.

• Απόσταση δύο σημείων

Έστω δύο σημεία Α,Β (σχ.14). Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος

ΑΒ λέγεται **απόσταση** των σημείων Α και Β.

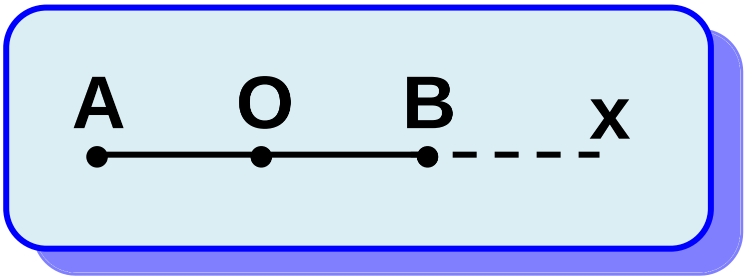


Σχήμα 14

2.10 Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο

Έστω Ο σημείο του επιπέδου. Τότε για κάθε σημείο Α, υπάρχει μοναδικό σημείο Β τέτοιο, ώστε το Ο να είναι το μέσο του ΑΒ. Πράγματι αρκεί να προεκτείνουμε το τμήμα ΑΟ και στην ημιευθεία Οx να πάρουμε τμήμα ΟΒ = ΟΑ (σχ.15). Το σημείο Β λέγεται συμμετρικό του Α ως προς Ο. Προφανώς και το Α είναι συμμετρικό του Β ως προς το Ο. Τα σημεία Α και Β λέγονται συμμετρικά σημεία ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Ο.

Παρατηρούμε ότι τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι συμμετρικά ως προς το μέσο του.



Σχήμα 15

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί να έχουν:

i) κανένα κοινό σημείο

ii) ένα κοινό σημείο

iii) δύο κοινά σημεία

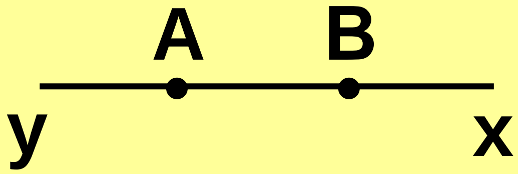
iv) άπειρα κοινά σημεία

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. Στο παρακάτω σχήμα ποιες ημιευθείες ορίζονται:

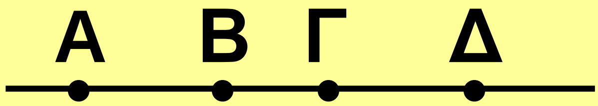
i) με αρχή το Α,

ii) με αρχή το Β.

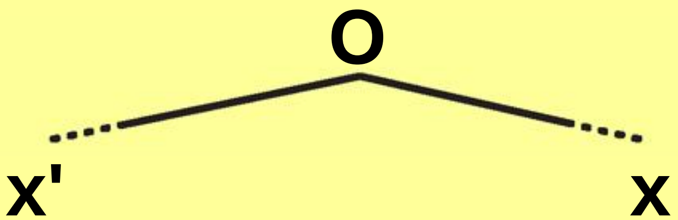


Ποιες από αυτές είναι αντικείμενες;

3. Τα σημεία Α,Β,Γ και Δ είναι συνευθειακά. Αν το Β είναι μεταξύ των Α, Γ και το Γ μεταξύ των Α, Δ, να δικαιολογήσετε γιατί το Γ είναι μεταξύ των Β, Δ.



4. Οι ημιευθείες Οx' και Οx του παρακάτω σχήματος είναι αντικείμενες;

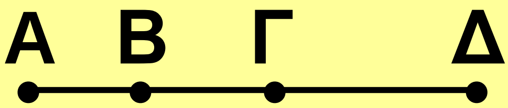


5. Πόσες ευθείες ορίζουν τρία διαφορετικά σημεία;

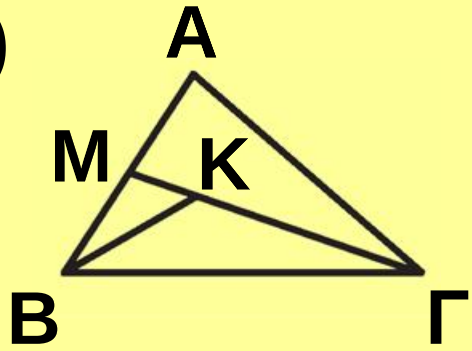
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από όλα τα σημεία των παρακάτω σχημάτων:

i)



ii)



2. Σχεδιάστε τρεις ευθείες, οι οποίες να τέμνονται ανά δυο, χωρίς να διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο και βρείτε:

i) πόσα είναι τα σημεία τομής των ευθειών,

ii) πόσες ημιευθείες και πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται.

3. Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Α ώστε ΑΒ = ΓΔ. Να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = ΒΔ.

4. **Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = 2ΜΝ.**

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. **Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**

i) $ΕΖ = \dfrac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$

ii) $ΑΓ + ΒΔ = ΑΔ + ΒΓ$

2. **Σε ευθεία ε θεωρούμε τμήμα ΑΒ, το μέσο του Μ, Γ τυχαίο εσωτερικό σημείο του τμήματος ΜΒ και Δ τυχαίο σημείο εξωτερικό του τμήματος ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:**

i) $\Gamma M = \dfrac{\Gamma A - \Gamma B}{2}$ ii) $\Delta M = \dfrac{\Delta A + \Delta B}{2}$

3. i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τριάδα συνευθειακών σημείων Α, Β, Γ, ισχύει ΑΒ ≤ ΑΓ + ΓΒ.
ii) Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι
ΑΔ ≤ ΑΓ + ΓΒ + ΒΔ.

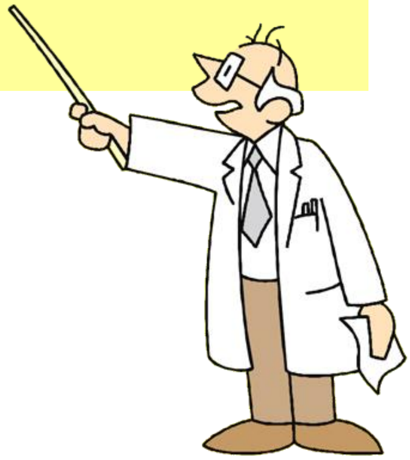
Σύνθετα θέματα

1. Αν Α, Β, Γ είναι τρία συνευθειακά σημεία και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$$

2. Από μια περιοχή διέρχονται τέσσερις ευθείες οδοί, έτσι ώστε ανά δύο να διασταυρώνονται και ανά τρεις να μη διέρχονται από το ίδιο σημείο. Η τροχαία για να διευκολύνει την κίνηση θέλει να

τοποθετήσει έναν τροχονόμο σε κάθε διασταύρωση.
Πόσοι τροχονόμοι χρειάζονται; Να εξετασθεί το ίδιο πρόβλημα για ν δρόμους (ν ≥ 2).

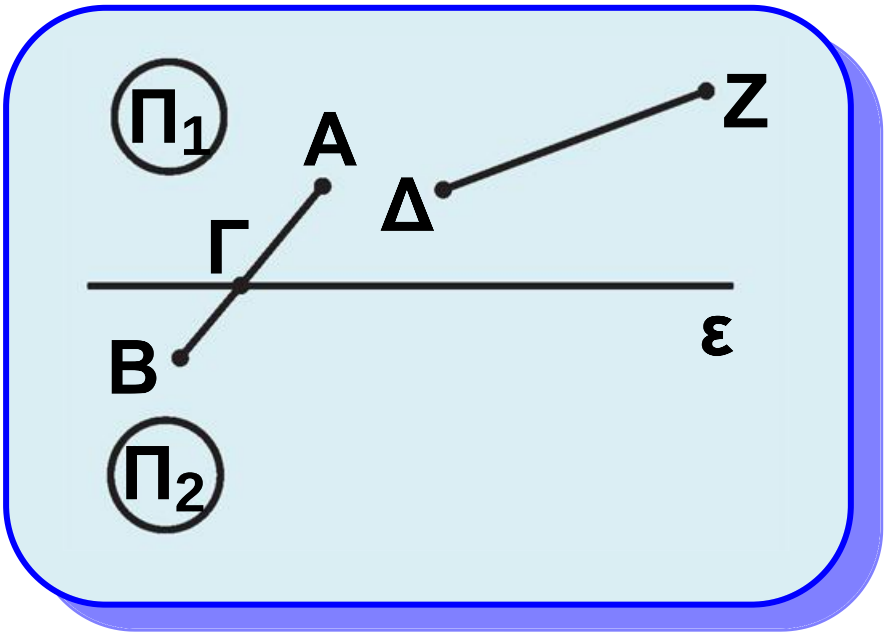


Γωνίες

2.11 Ημιεπίπεδα

Για το επίπεδο δεχόμαστε ότι:
Κάθε ευθεία ε ενός επιπέδου Π χωρίζει το επίπεδο αυτό σε δύο μέρη $Π_1$ και $Π_2$, τα οποία βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής.
Τα σημεία του $Π_ρ$ μαζί με τα σημεία της ε (σχ.16) αποτελούν ένα σχήμα που λέγεται ημιεπίπεδο.
Για να καθορισθεί ένα ημιεπίπεδο, αρκεί να ξέρουμε, εκτός από την ευθεία ε, ένα ακόμα σημείο του. Έστω Α αυτό το σημείο (σχ.16),

τότε το $Π_1$ συμβολίζεται και (ε,Α).
Όμοια το $Π_2$ συμβολίζεται (ε,Β).



Σχήμα 16

Για τα ημιεπίπεδα $Π_1$ και $Π_2$ δεχόμαστε ότι:
Αν δύο σημεία του επιπέδου βρίσκονται εκατέρωθεν μίας ευθείας ε, τότε η ευθεία ε τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα δύο σημεία.
Έτσι η ε τέμνει το ΑΒ στο σημείο Γ, που βρίσκεται μεταξύ των Α και Β, ενώ δεν τέμνει το ΔΖ (σχ.16).

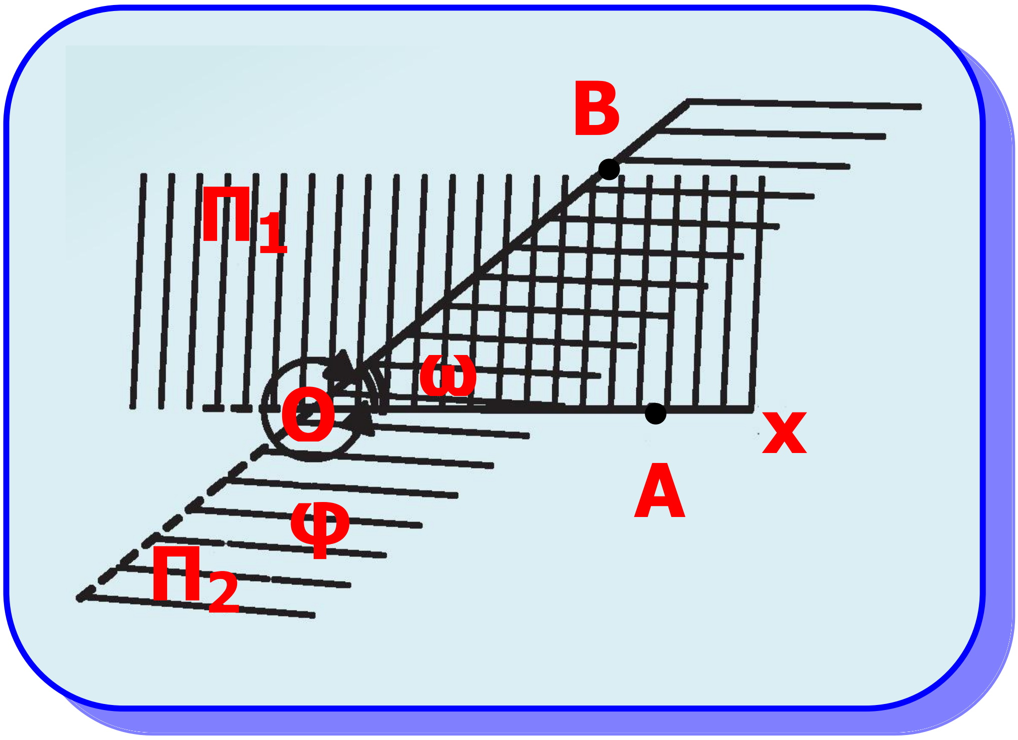
2.12 Η γωνία

Από τυχαίο σημείο Ο ενός επιπέδου φέρουμε δύο ημιευθείες Οx και Οy (σχ.17), οι οποίες δεν έχουν τον ίδιο φορέα. Έστω σημεία Α, Β των ημιευθειών Οx, Οy αντίστοιχα. Το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία των ημιεπιπέδων (Οx, Β) και (Οy, Α) λέγεται κυρτή γωνία με κορυφή Ο και πλευρές Οx και Οy.

Συμβολίζεται με $x\hat{O}y$ ή $y\hat{O}x$ ή $\hat{O}$ ή $A\hat{O}B$ ή $B\hat{O}A$ (σχ.17) και είναι φανερό ότι καθορίζεται από τις πλευρές της.

Τα σημεία του επιπέδου, που δεν ανήκουν στην κυρτή γωνία $x\hat{O}y$, μαζί με τα σημεία των ημιευθειών Οx και Οy λέγεται μη κυρτή γωνία

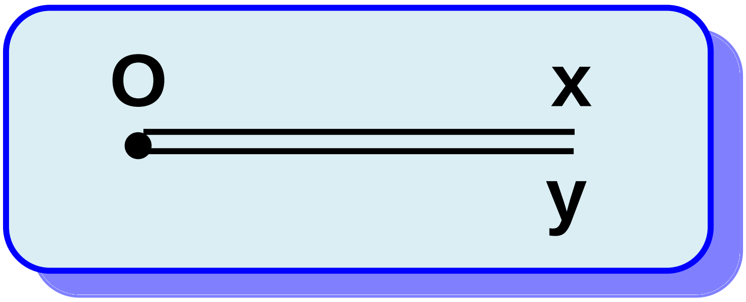
με κορυφή Ο και πλευρές Οx και Οy.



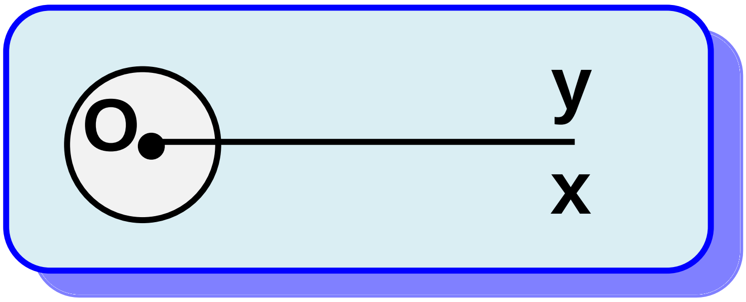
Σχήμα 17

Τα σημεία μίας γωνίας, που δεν ανήκουν στις πλευρές της λέγονται εσωτερικά σημεία της και αποτελούν το εσωτερικό της γωνίας. Τα σημεία που δεν ανήκουν στη γωνία λέγονται εξωτερικά σημεία της και αποτελούν το εξωτερικό της γωνίας. Στην ειδική περίπτωση που οι ημιευθείες Οx και Οy έχουν τον ίδιο φορέα τότε:

- Αν οι ημιευθείες Οx και Οy ταυτίζονται, τότε ορίζουν μία μόνο ημιευθεία Οx (σχ.18) και η κυρτή γωνία $x\hat{O}y$ λέγεται **μηδενική γωνία**, ενώ η μη κυρτή γωνία $x\hat{O}y$ ταυτίζεται με όλο το επίπεδο (σχ.19) και λέγεται **πλήρης γωνία**.

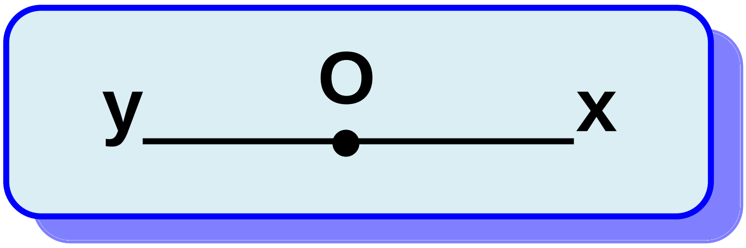


Σχήμα 18



Σχήμα 19

• **Αν οι ημιευθείες Οx, Oy είναι αντικείμενες (σχ.20), τότε καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία xy λέγεται ευθεία γωνία. Στα επόμενα, όταν θα λέμε απλώς γωνία, θα εννοούμε κυρτή γωνία.**



Σχήμα 20

2.13 Σύγκριση γωνιών

Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $A\hat{O}B'$ που έχουν κοινή κορυφή Ο, την ΟΑ κοινή πλευρά και τις ΟΒ, ΟΒ' προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς το φορέα της ΟΑ (σχ.21α). Τότε:

(i) Αν οι πλευρές ΟΒ και ΟΒ' συμπίπτουν, λέμε ότι οι γωνίες

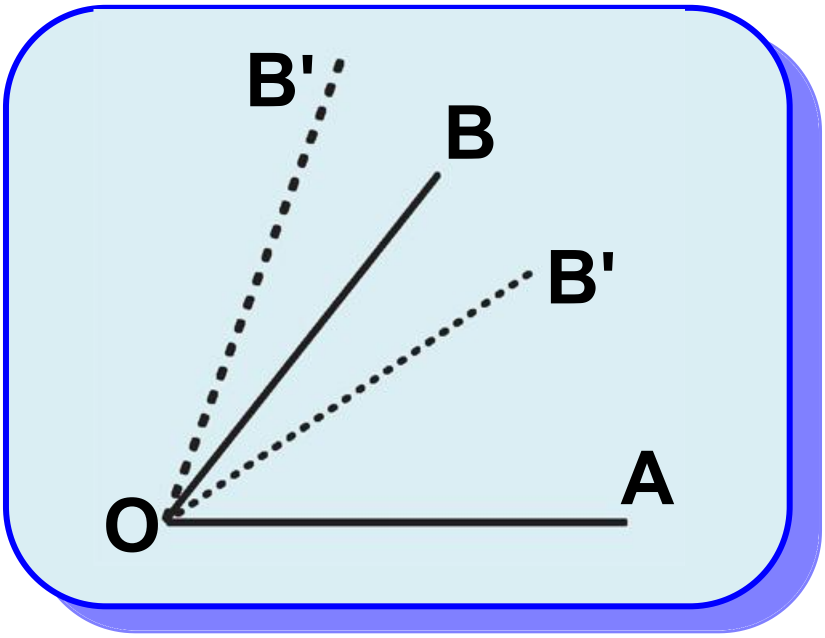
είναι ίσες και γράφουμε $A\hat{O}B =$ $= A\hat{O}B'$.

(ii) Αν η πλευρά ΟΒ' βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, λέμε ότι η γωνία $A\hat{O}B'$ είναι μικρότερη από τη γωνία $A\hat{O}B$ και γράφουμε $A\hat{O}B' < A\hat{O}B$.

(iii) Αν η πλευρά ΟΒ' βρίσκεται εκτός της γωνίας $A\hat{O}B$, λέμε ότι η γωνία $A\hat{O}B'$ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $A\hat{O}B$ και γράφουμε $A\hat{O}B > A\hat{O}B$.

Για να συγκρίνουμε δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$ που βρίσκονται σε τυχαία θέση μετατοπίζουμε την $\Gamma\hat{K}\Delta$ έτσι ώστε, η κορυφή της Κ να ταυτισθεί με το Ο και η μία της πλευρά ΓΚ να συμπέσει με την

πλευρά ΟΑ της γωνίας $A\hat{O}B$.

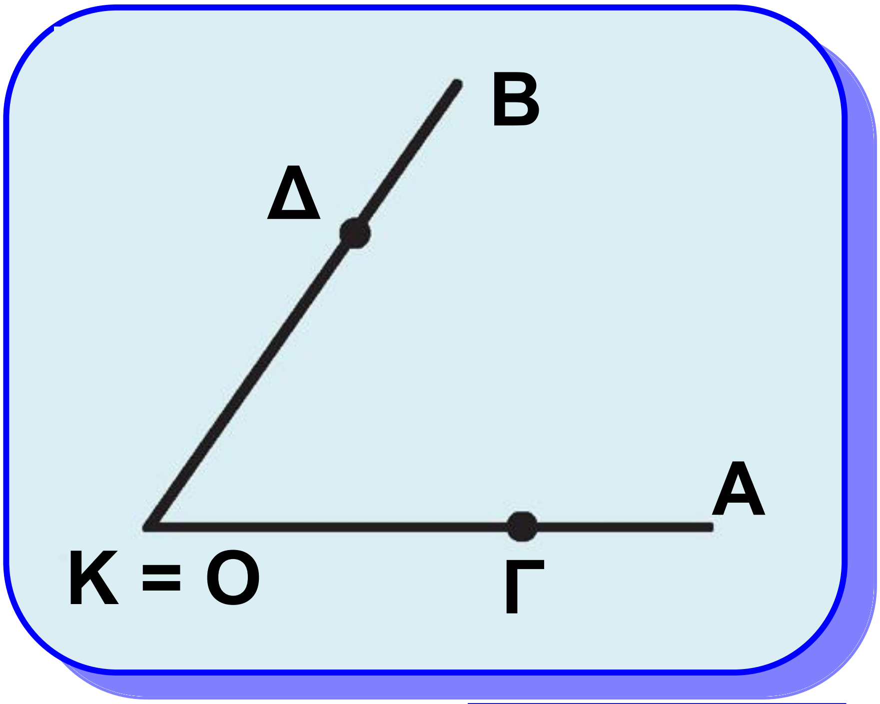


Σχήμα 21α

Τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

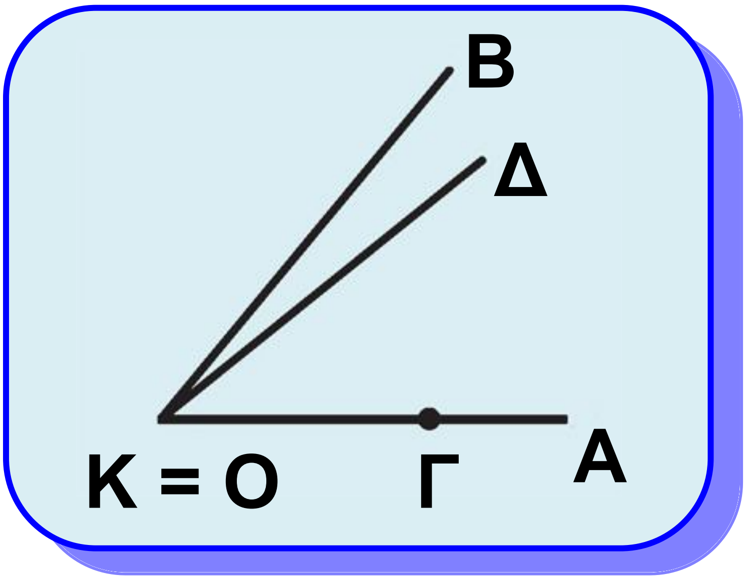
• Αν η πλευρά ΚΔ συμπίπτει με την ΟΒ, τότε οι γωνίες είναι ίσες:

$A\hat{O}B = \Gamma\hat{K}\Delta$ (σχ.21 β)



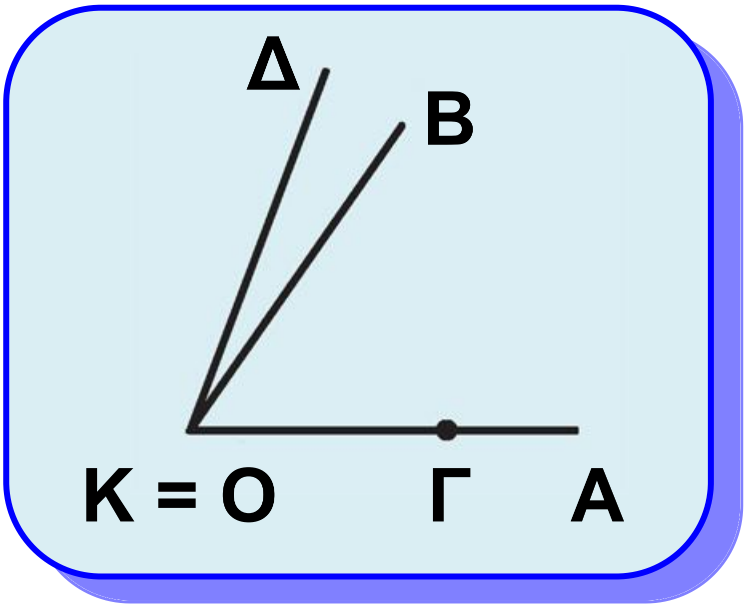
Σχήμα 21β

• **Αν η πλευρά ΚΔ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, τότε η γωνία $\Gamma\hat{K}\Delta$ είναι μικρότερη της $A\hat{O}B$: $\Gamma\hat{K}\Delta < A\hat{O}B$ (σχ.21γ).**



Σχήμα 21γ

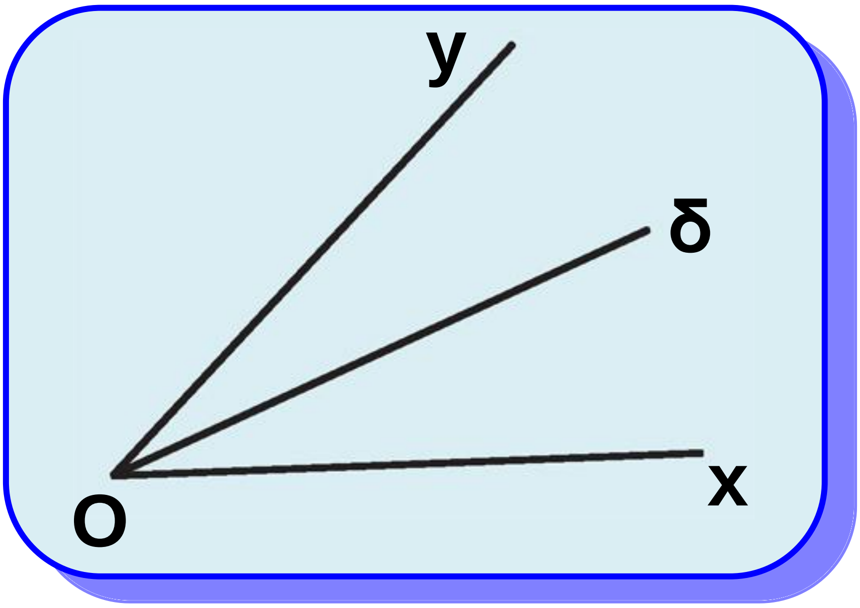
• **Αν η πλευρά ΚΔ βρίσκεται στο εξωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, τότε η γωνία $\Gamma\hat{K}\Delta$ είναι μεγαλύτερη της $A\hat{O}B$: $\Gamma\hat{K}\Delta > A\hat{O}B$ (σχ.21 δ).**



Σχήμα 21δ

Διχοτόμος γωνίας

Διχοτόμος μιας γωνίας $x\hat{O}y$ λέγεται η ημιευθεία Οδ, που βρίσκεται στο



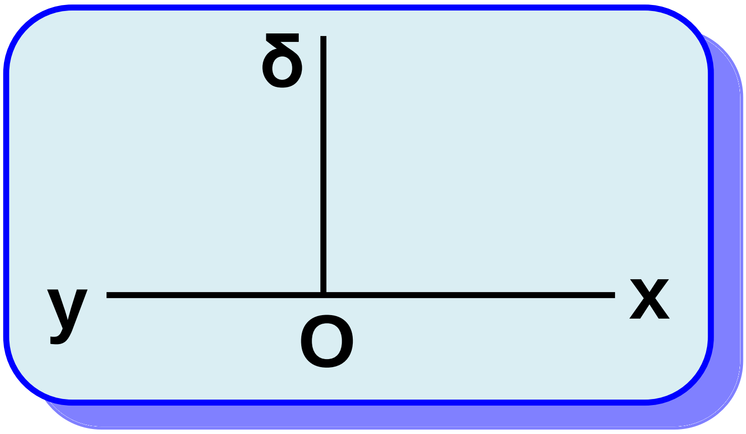
Σχήμα 22

εσωτερικό της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες, δηλαδή $x\hat{O}δ = δ\hat{O}y$ (σχ.22). Δεχόμαστε ότι κάθε γωνία έχει μοναδική διχοτόμο.

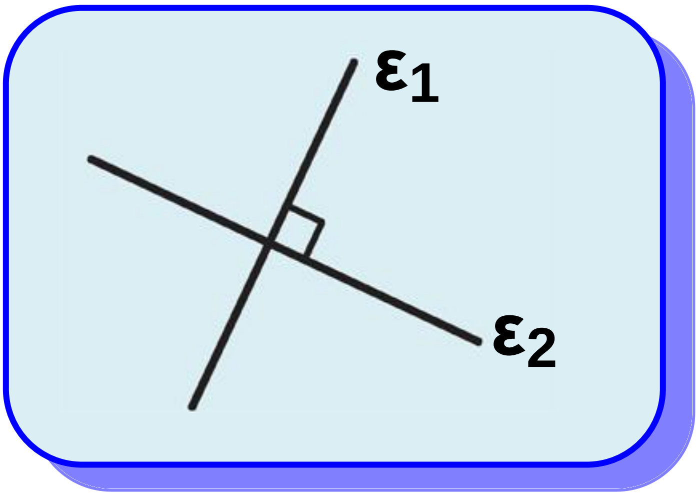
Κάθετες ευθείες - Είδη γωνιών

Έστω $x\hat{O}y$ μια ευθεία γωνία και Οδ η διχοτόμος της (σχ.23). Καθεμία από τις ίσες γωνίες $x\hat{O}δ$ και $δ\hat{O}y$ που προκύπτουν λέγεται ορθή γωνία, και θα τη συμβολίζουμε L. Οι φορείς των πλευρών μίας ορθής γωνίας ονομάζονται ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Δύο κάθετες ευθείες $ε_1$, $ε_2$ τις συμβολίζουμε με $ε_1 \perp ε_2$ (σχ.24).
Μια κυρτή γωνία θα λέγεται οξεία αν είναι μικρότερη από ορθή γωνία, ενώ θα λέγεται αμβλεία αν είναι

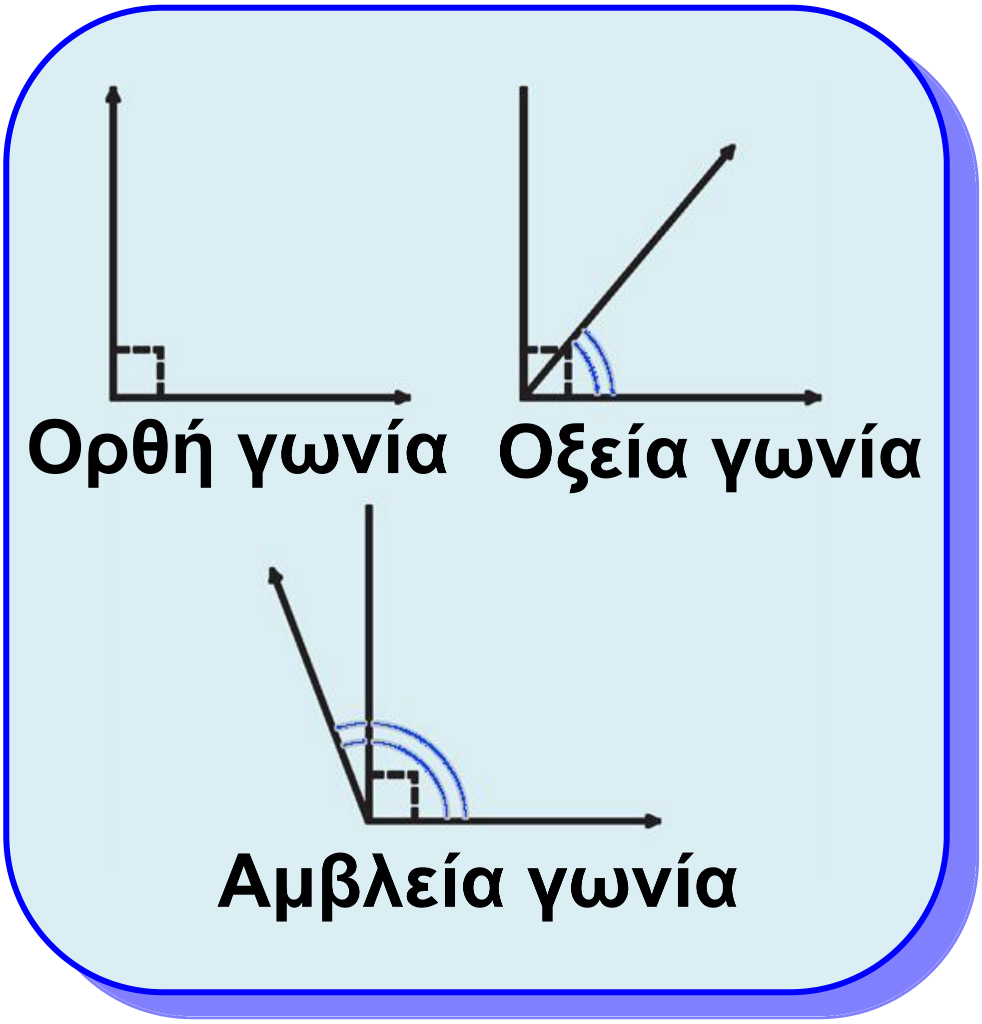
μεγαλύτερη από ορθή γωνία (σχ.25).



Σχήμα 23



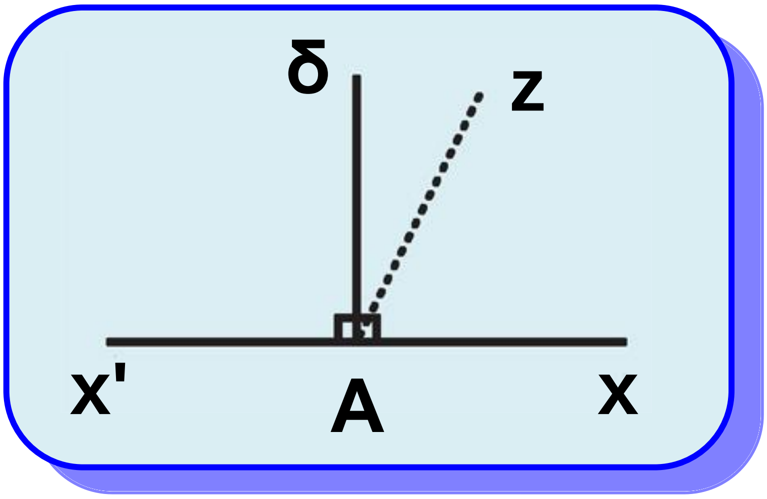
Σχήμα 24



Σχήμα 25

2.14 Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία

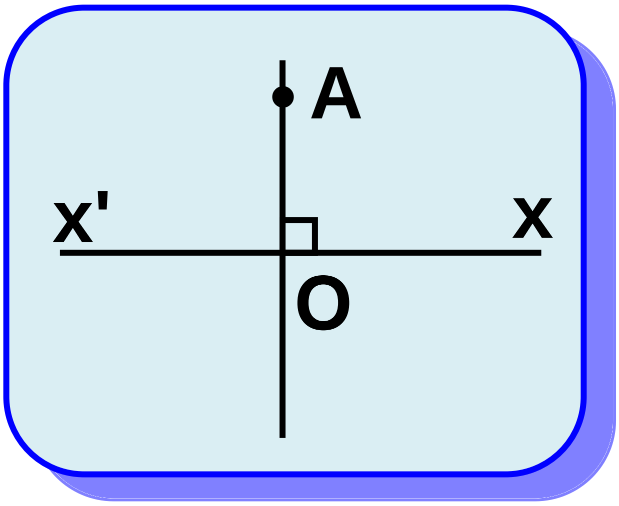
Ας θεωρήσουμε ευθεία x'x και ένα σημείο Α (σχ.26). Αν το Α είναι σημείο της ευθείας και Αδ η διχοτόμος της ευθείας γωνίας $x\hat{A}x'$, τότε από τον ορισμό της ορθής γωνίας προκύπτει ότι $Αδ \perp x'x$.



Σχήμα 26

Αν υποθέσουμε ότι και μια άλλη ευθεία Αz (σχ.26), διαφορετική της Αδ, είναι κάθετη στην xx', τότε θα είναι $x\hat{A}z = z\hat{A}x' = 1$ L, δηλαδή η Αz είναι διχοτόμος της $x\hat{A}x'$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, γιατί η διχοτόμος είναι μοναδική. Αποδείξαμε λοιπόν ότι: Από κάθε σημείο ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος σε αυτή. Το ίδιο συμβαίνει (σχ.27) όταν το Α δεν είναι σημείο της ευθείας. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιούμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της καθέτου, έννοιες

τις οποίες θα διαπραγματευθούμε με περισσότερες λεπτομέρειες παρακάτω (βλ. §.3.5), όπου και θα γίνει η κατασκευή της καθέτου με χρήση κανόνα και διαβήτη.
Το μήκος του μοναδικού κάθετου ευθύγραμμου τμήματος ΑΟ που άγεται από το σημείο Α στην ευθεία x'x λέγεται απόσταση του σημείου Α από την ευθεία x'x (σχ.27).



Σχήμα 27

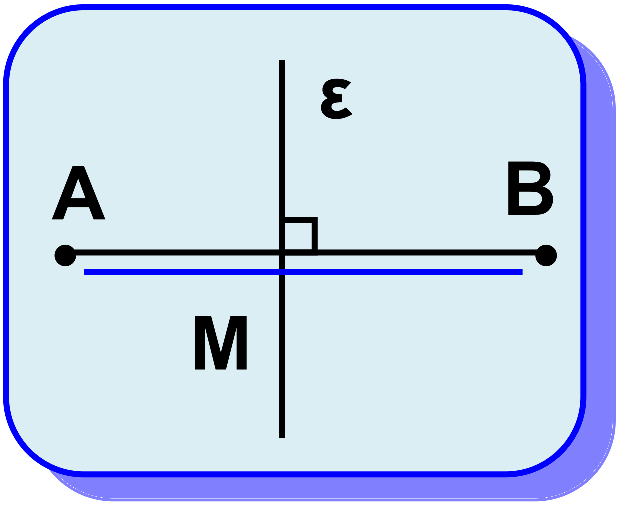
ΣΧΟΛΙΟ

Μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο»

Στην απόδειξη της μοναδικότητας της καθέτου σε ευθεία, από σημείο Α της ευθείας, υποθέσαμε ότι εκτός της Αδ υπάρχει και άλλη κάθετος προς τη x'x (δηλαδή ότι το συμπέρασμα δεν είναι ακριβές) και καταλήξαμε ότι η γωνία $x'\hat{A}x$ έχει δύο διχοτόμους, το οποίο είναι «άτοπο» (δηλαδή έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ή άλλη γνωστή πρόταση). Ο παραπάνω τρόπος απόδειξης λέγεται μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο».

• Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος - Σημεία συμμετρικά ως προς άξονα

Η ευθεία ε που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και διέρχεται από το μέσο του λέγεται μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ (σχ.28).

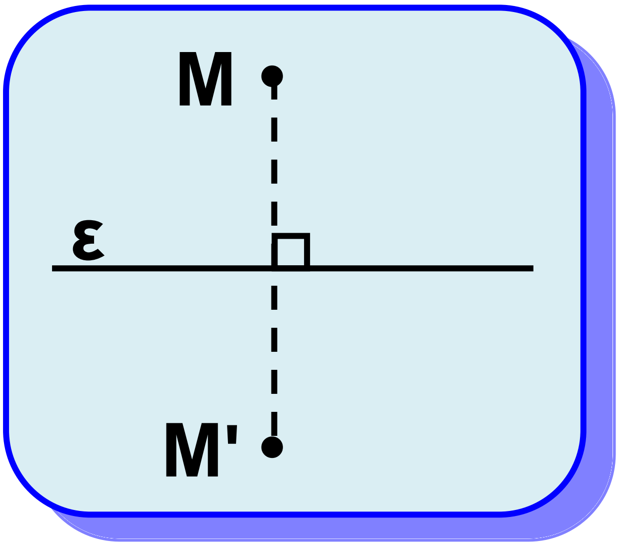


Σχήμα 28

Τα σημεία Α, Β λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε. Η ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας.

Για να βρούμε επομένως το συμμετρικό ενός σημείου Μ ως

προς μια ευθεία ε, φέρουμε το κάθετο τμήμα από το Μ προς την ευθεία και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα. Το άκρο Μ' της προέκτασης αυτής είναι το συμμετρικό του Μ (σχ.29). Το συμμετρικό ως προς την ευθεία ε κάθε σημείου της ορίζεται να είναι το ίδιο το σημείο.



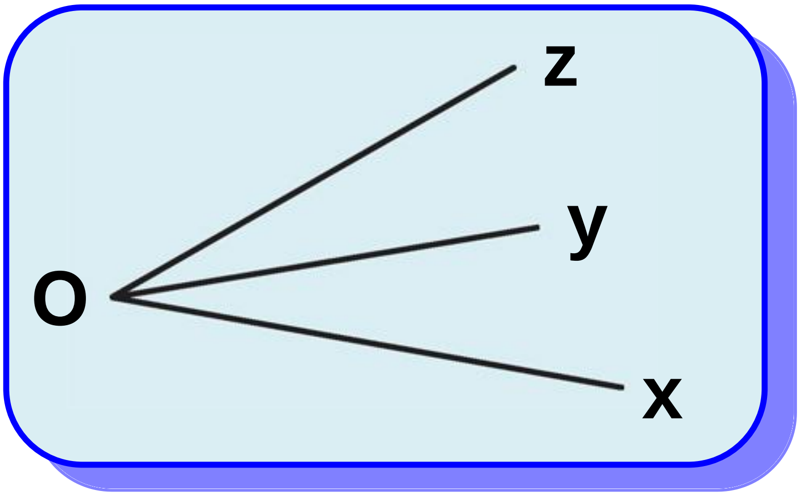
Σχήμα 29

2.15 Πράξεις μεταξύ γωνιών

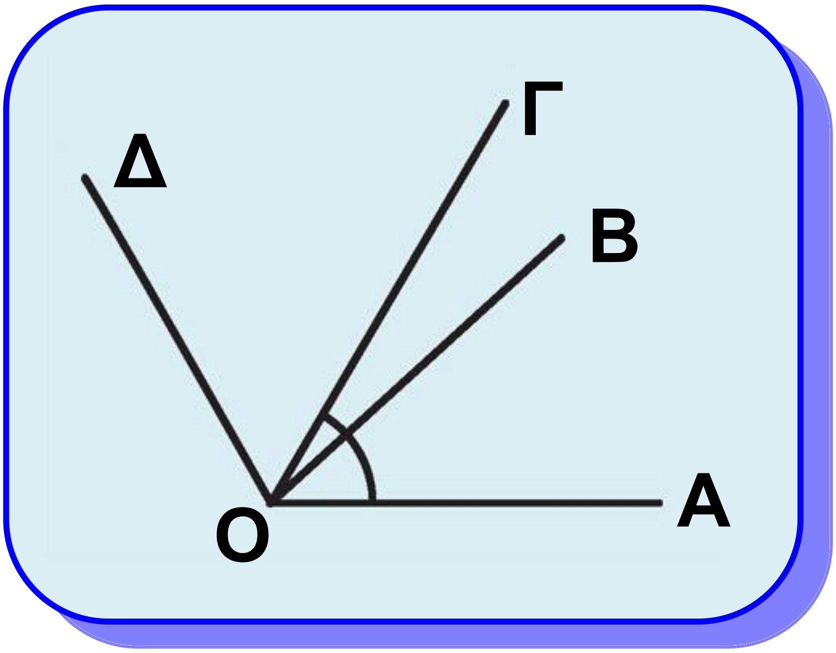
• Εφεξής γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται εφεξής, αν έχουν κοινή κορυφή, μία πλευρά

κοινή και τις μη κοινές πλευρές εκατέρωθεν της κοινής, π.χ. οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$ (σχ.30) είναι εφεξής.



Σχήμα 30

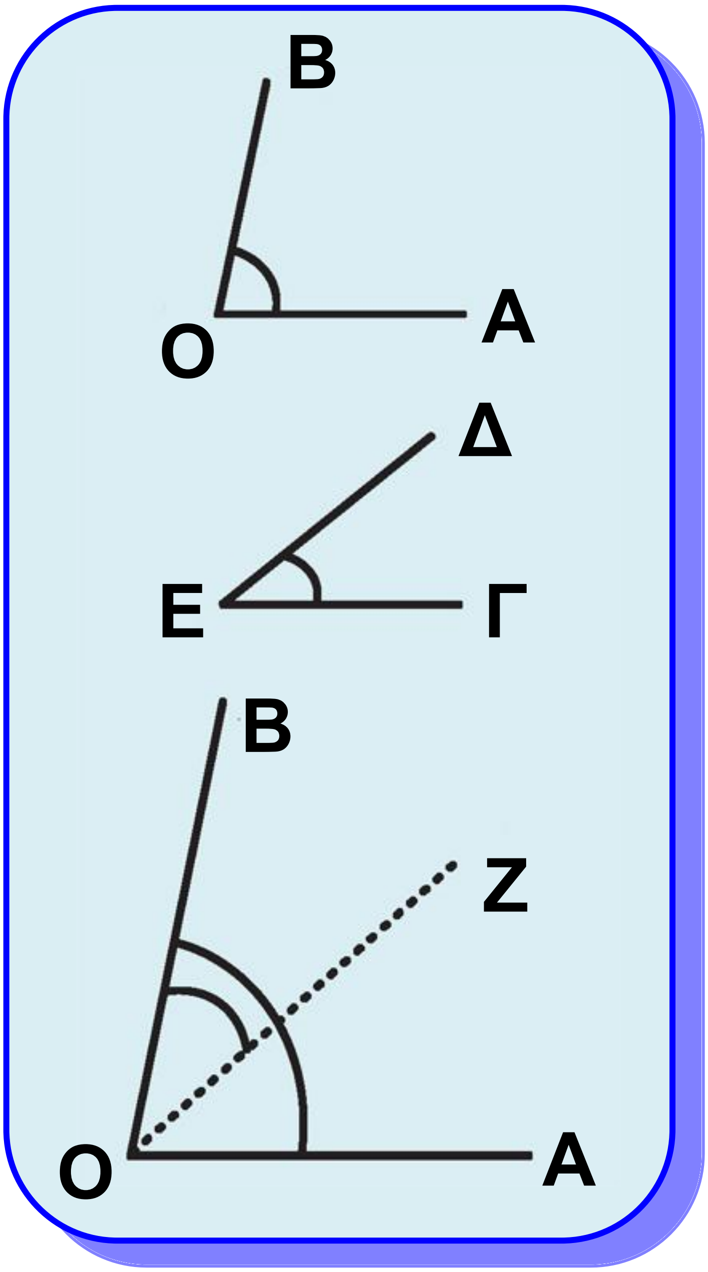


Σχήμα 31

Η γωνία $A\hat{O}B$ (σχ. 31) είναι εφεξής με τη $B\hat{O}\Gamma$, και η $B\hat{O}\Gamma$ είναι εφεξής με τη $\Gamma\hat{O}\Delta$. Οι γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ λέγονται διαδοχικές.

• Πρόσθεση γωνιών - Γινόμενο γωνίας επί φυσικό αριθμό

(i) Άθροισμα δύο εφεξής γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ λέγεται η γωνία $A\hat{O}\Gamma$ με πλευρές τις δύο μη κοινές πλευρές των εφεξής γωνιών (σχ.31). Αν οι γωνίες δεν είναι εφεξής τις μετατοπίζουμε ώστε να γίνουν. Αν έχουμε παραπάνω από δύο γωνίες, τις καθιστούμε διαδοχικές, π.χ.
$A\hat{O}\Delta = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta$ (σχ.31).



Σχήμα 32

(ii) Έστω $A\hat{O}B > \Gamma\hat{E}\Delta$ (σχ.32).
Μετατοπίζουμε τη γωνία $\Gamma\hat{E}\Delta$, ώστε η πλευρά της ΕΓ να συμπέσει με την ΟΑ ενώ η πλευρά της ΕΔ μετατοπίζεται σε ημιευθεία ΟΖ στο

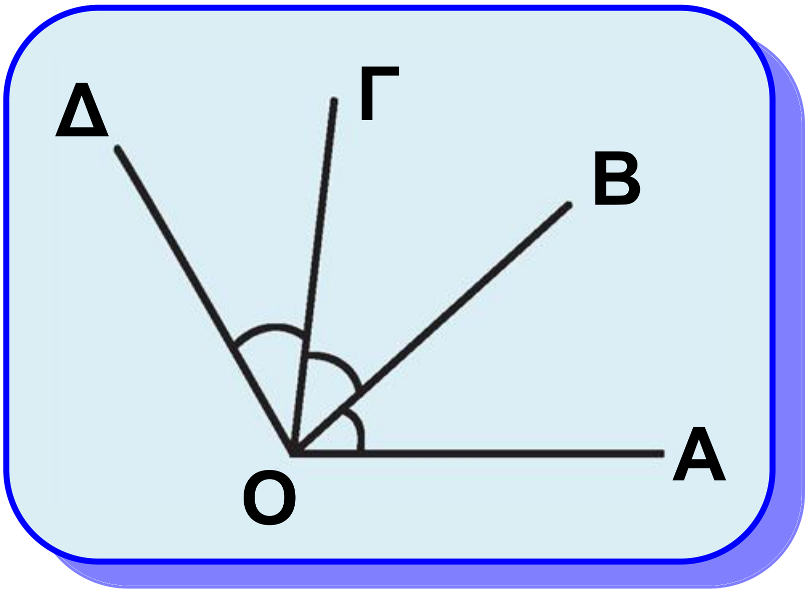
εσωτερικό της $A\hat{O}B$ (σχ.32). Η γωνία $Z\hat{O}B$ λέγεται διαφορά της γωνίας $\Gamma\hat{E}\Delta$ από την $A\hat{O}B$ και συμβολίζεται $A\hat{O}B - \Gamma\hat{E}\Delta$. Είναι φανερό ότι $\Gamma\hat{E}\Delta + Z\hat{O}B = A\hat{O}B$.
Η διαφορά δύο ίσων γωνιών είναι η μηδενική γωνία.

(iii) Γινόμενο της γωνίας $A\hat{O}B$ επί το φυσικό αριθμό ν ονομάζεται το άθροισμα ν διαδοχικών γωνιών ίσων με $A\hat{O}B$.
Γράφουμε

$$\nu \cdot A\hat{O}B = \underbrace{A\hat{O}B + A\hat{O}B + \ldots + A\hat{O}B}_{\nu \text{ όροι}},$$

π.χ. $A\hat{O}\Delta = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta =$
$= 3\hat{O}B$ ή ισοδύναμα

$$A\hat{O}\Delta = \frac{A\hat{O}\Delta}{3} \quad \text{(σχ.33).}$$



Σχήμα 33

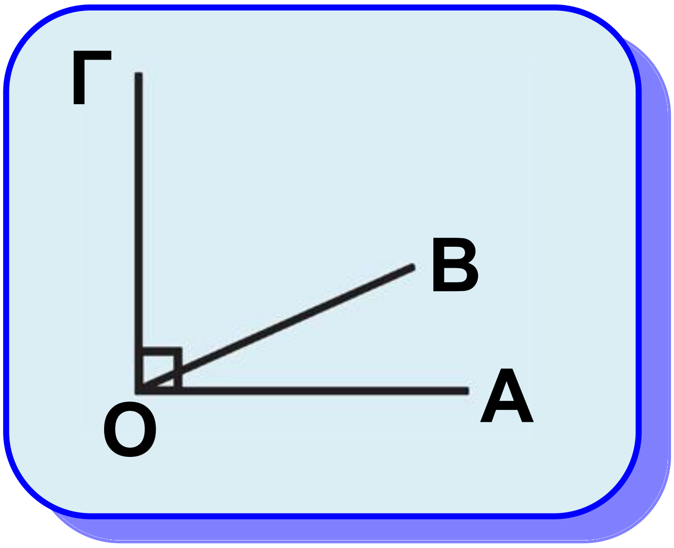
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Το άθροισμα γωνιών ή το γινόμενο γωνίας με φυσικό αριθμό μπορεί να ξεπεράσει την πλήρη γωνία.

2.16 Είδη και Απλές σχέσεις γωνιών

● Συμπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και συμπλήρωμα της άλλης, π.χ. οι

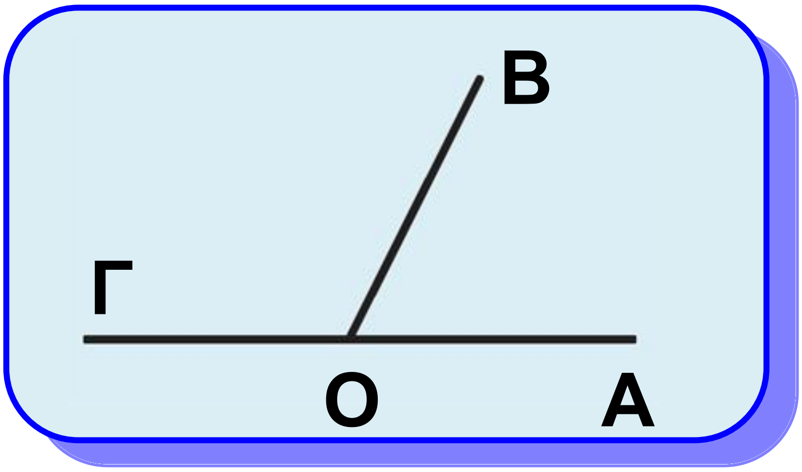
γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.34) είναι συμπληρωματικές.



Σχήμα 34

• Παραπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και παραπλήρωμα της άλλης (σχ.35).



Σχήμα 35

Προφανώς τα παραπληρώματα ή συμπληρώματα της ίδιας γωνίας (ή ίσων γωνιών) είναι ίσες γωνίες.

Θεώρημα

Δυο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα.

Απόδειξη

Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.35) είναι παραπληρωματικές, το άθροισμά τους $A\hat{O}\Gamma$ είναι μία ευθεία γωνία. Επομένως, από τον ορισμό της ευθείας γωνίας οι πλευρές ΟΑ και ΟΓ είναι αντικείμενες ημιευθείες.

Αντίστροφα. Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.35) έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες, τότε από τον ορισμό του αθροίσματος δύο γωνιών προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}Γ$ είναι η ευθεία γωνία $A\hat{O}Γ$. Άρα, οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}Γ$ είναι παραπληρωματικές.

ΣΧΟΛΙΟ

Αντίστροφα Θεωρήματα λέγονται αυτά στα οποία η υπόθεση του ενός είναι συμπέρασμα του άλλου. Όταν αποδείξουμε ένα θεώρημα (ευθεία πρόταση) δεν προκύπτει ότι και το αντίστροφο είναι αληθές, π.χ.:

Ευθεία Πρόταση: Αν δύο γωνίες είναι ορθές, τότε είναι ίσες.

Αντίστροφη Πρόταση: Αν δύο γωνίες είναι ίσες, τότε είναι ορθές. Προφανώς η πρόταση αυτή δεν αληθεύει.

• Κατακορυφήν γωνίες

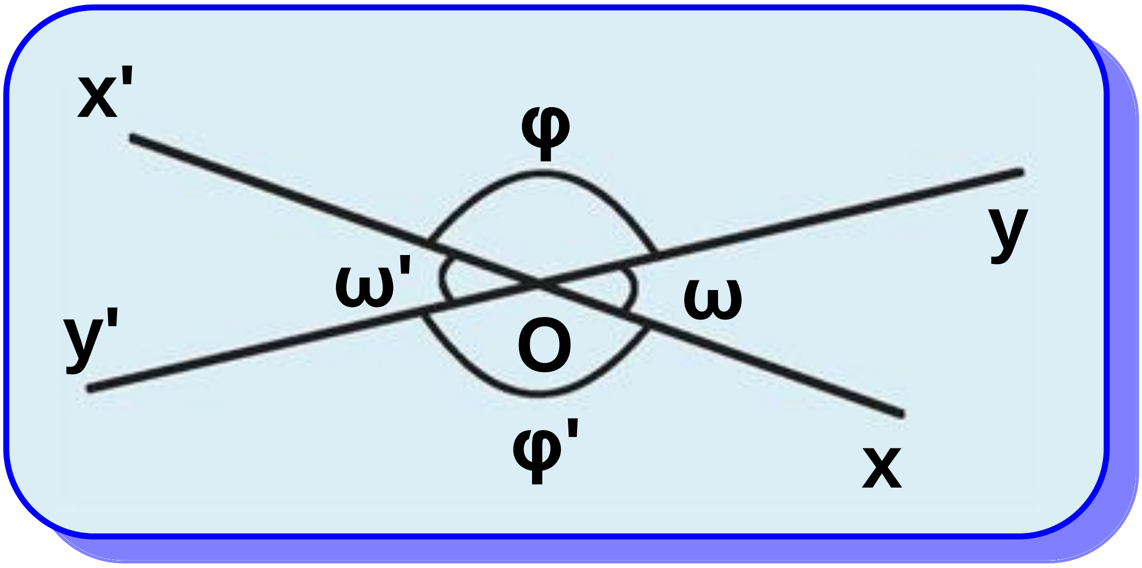
Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν, αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.

Π.χ. οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ καθώς και οι γωνίες $y\hat{O}x'$ και $x\hat{O}y'$ είναι κατακορυφήν (σχ.36).

> **Θεώρημα Ι**
>
> **Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.**

Απόδειξη

Θεωρούμε τις κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ (σχ.36).
Παρατηρούμε ότι οι δύο γωνίες είναι ίσες ως παραπληρωματικές της ίδιας γωνίας $y\hat{O}x'$.



Σχήμα 36

Θεώρημα ΙΙ

Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας.

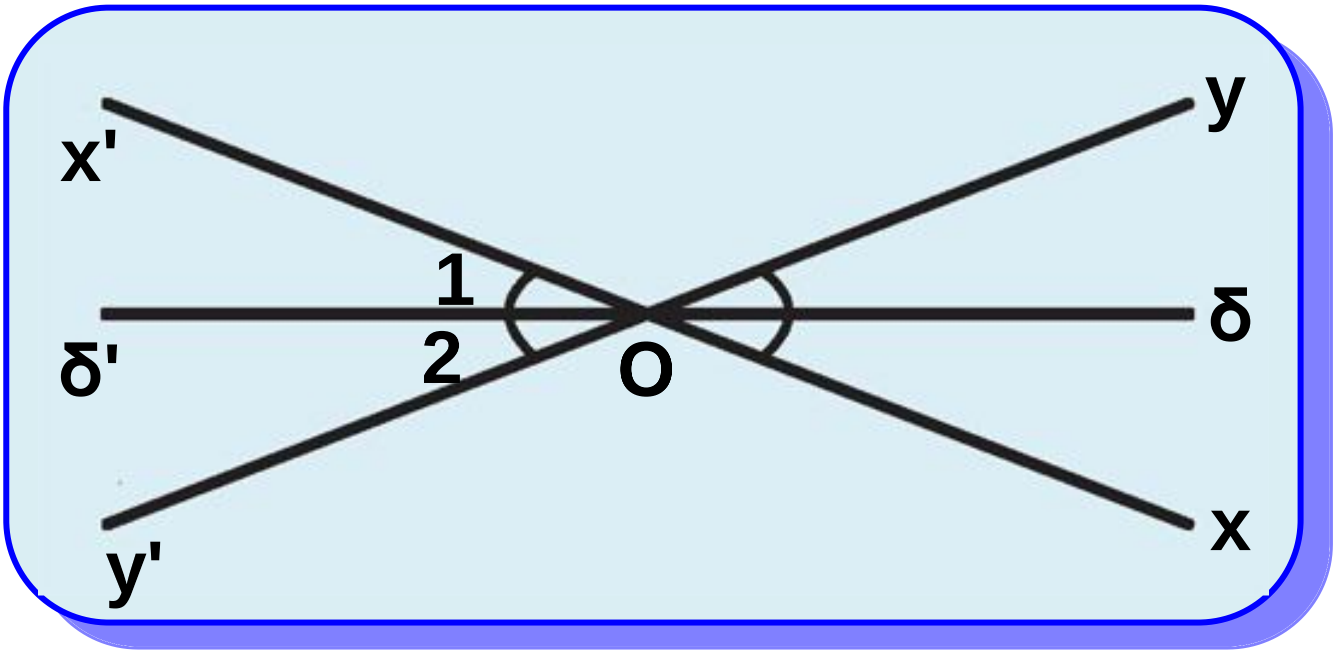
Απόδειξη

Έστω οι κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x\hat{O}y'$ και η διχοτόμος Οδ της $x\hat{O}y$. Τότε $\delta\hat{O}x = \delta\hat{O}y$.

Αν Οδ' είναι η προέκταση της Οδ,

τότε O_1 = $\delta\hat{O}x$ και O_2 = $\delta\hat{O}y$ (ως κατακορυφήν) .

Άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η Οδ' είναι διχοτόμος της $x'\hat{O}y'$.



Σχήμα 37

Θεώρημα ΙΙΙ

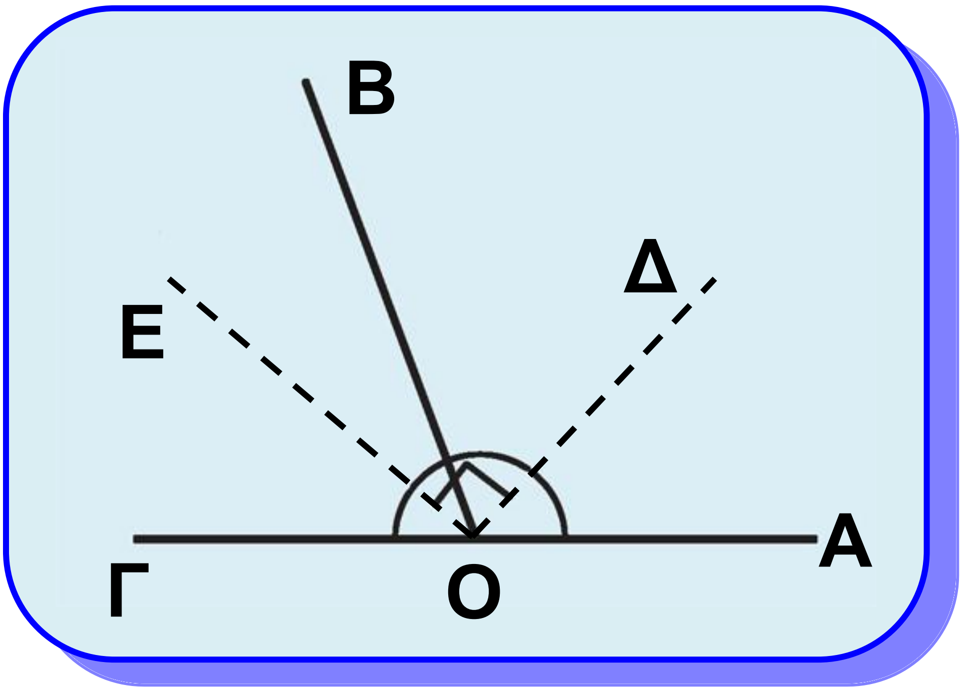
Οι διχοτόμοι δυο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

Απόδειξη

Έστω $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ δύο εφεξής και

παραπληρωματικές γωνίες και ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι τους (σχ.38). Τότε $\hat{AOB} + \hat{BOΓ} = 2L$ ή $2\hat{ΔOB} + 2\hat{BOE} = 2L$ ή $\hat{ΔOB} + \hat{BOE} = 1L$ ή $\hat{ΔOE} = 1L$.

Άρα ΟΔ ⊥ ΟΕ.



Σχήμα 38

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

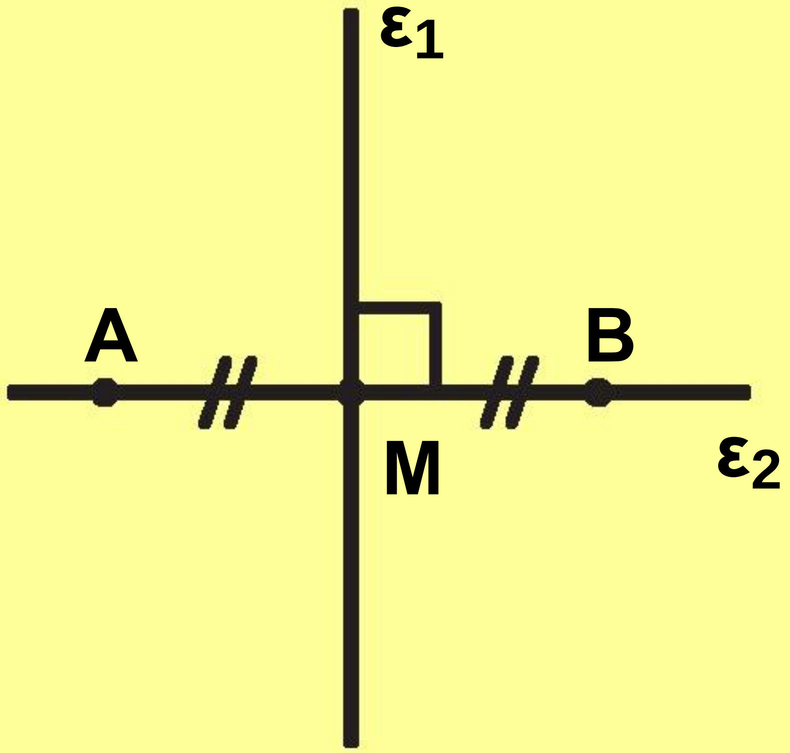
1. Ποιο είναι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς:

i) την ευθεία $ε_1$,

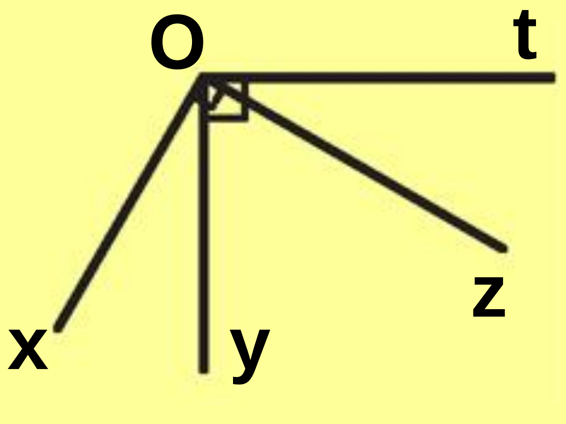
ii) την ευθεία $ε_2$,

iii) το σημείο Μ.

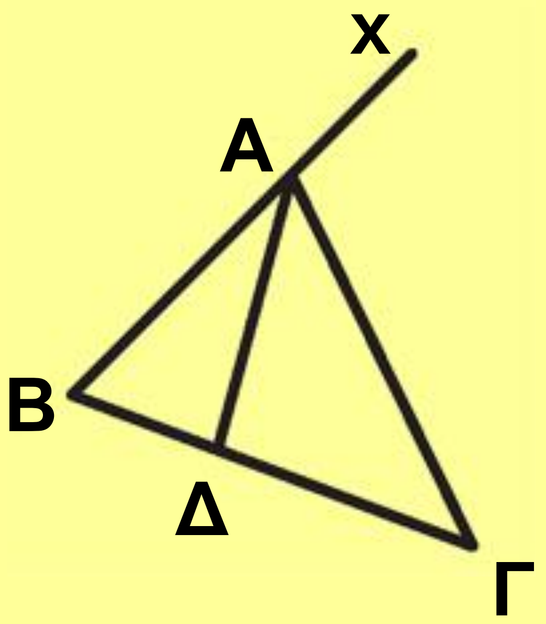
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



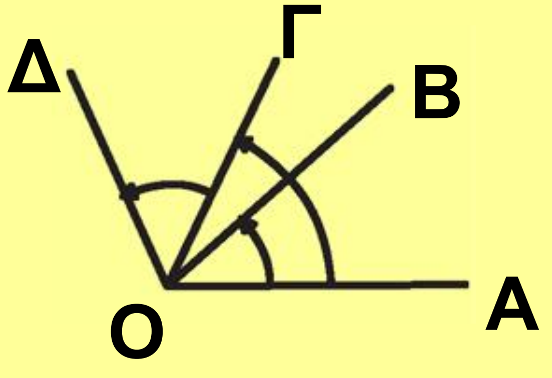
2. Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τις οξείες, τις ορθές και τις αμβλείες γωνίες που υπάρχουν.



3. Να γράψετε τρία ζεύγη εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών που υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα.



4. i) Οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι εφεξής;
ii) Οι γωνίες $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}B$ είναι διαδοχικές;
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

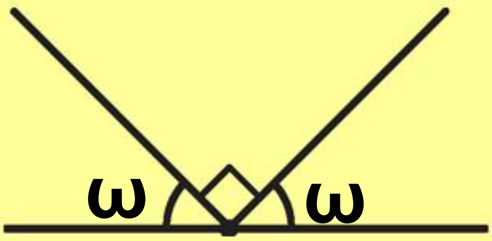


5. Υπάρχει περίπτωση η συμπληρωματική μιας γωνίας να είναι ίση με την παραπληρωματική της;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$ και $z\hat{O}t$, ώστε $x\hat{O}z = y\hat{O}t$.
Να δικαιολογήσετε ότι $x\hat{O}y = z\hat{O}t$.

2. Να υπολογίσετε, σε μέρη ορθής, τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος.



3. Ένα ρολόι τοίχου δείχνει εννέα η ώρα ακριβώς. Τι γωνία σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού; Μετά από πόσες ώρες (φυσικό αριθμό) οι δείκτες του ρολογιού θα σχηματίζουν ίση γωνία;

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το ημιάθροισμα των γωνιών

2. Θεωρούμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, τη διχοτόμο της ΟΔ και τυχαία ημιευθεία ΟΓ εσωτερική της γωνίας $A'\hat{O}B$, όπου ΟΑ' η αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ. Να αποδείξετε ότι

$$\Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B}{2}$$

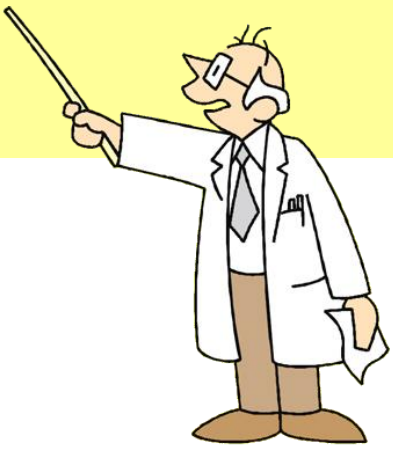
3. Θεωρούμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, τη διχοτόμο της ΟΔ και τυχαία ημιευθεία ΟΓ εσωτερική της γωνίας $\Delta\hat{O}B$. Να αποδείξετε ότι

$$\Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A - \Gamma\hat{O}B}{2}$$

Σύνθετα θέματα

1. **Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Αν Οx, Oy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $x\hat{O}y = \dfrac{A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma}{2}$**

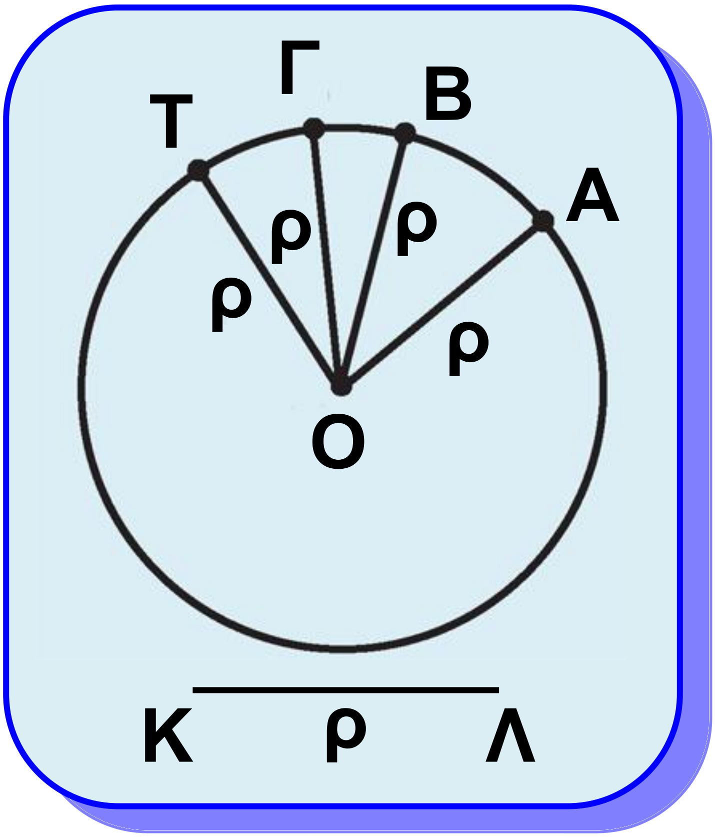
2. **Θεωρούμε αμβλεία γωνία ΑΟΒ και στο εσωτερικό της την ημιευθεία $O\Gamma \perp OA$. Αν ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{O}E = -\dfrac{1}{2}$ L.**



Κύκλος

2.17 Έννοια και στοιχεία του κύκλου

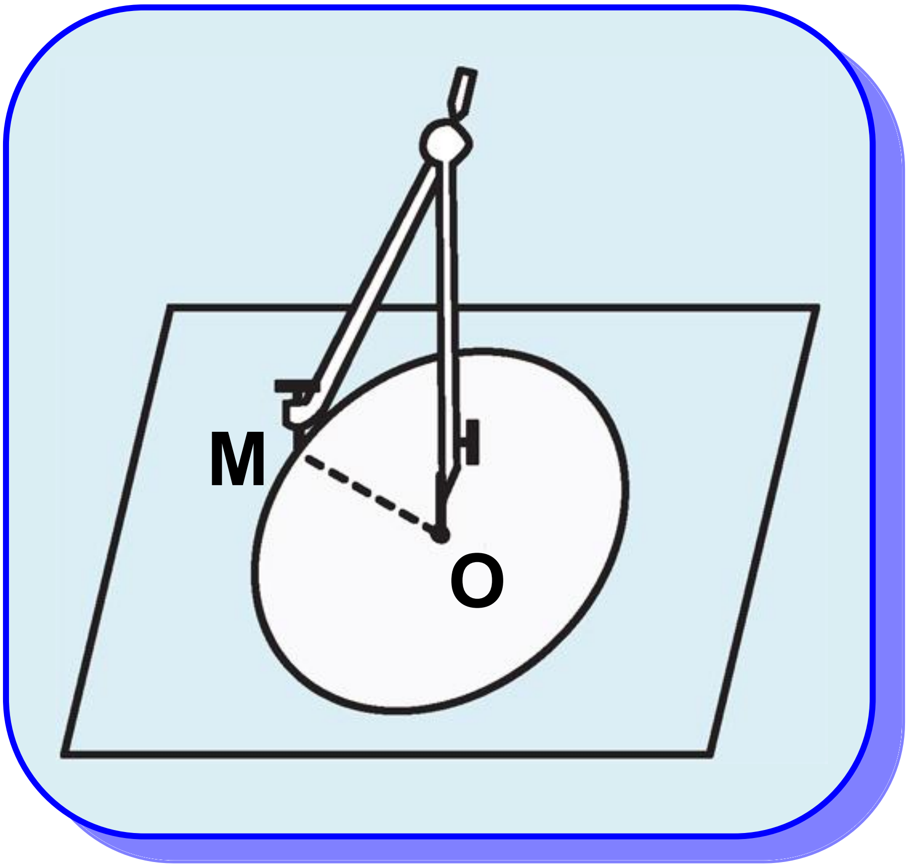
Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο Ο και ένα τμήμα ΚΛ = ρ (σχ.39).



Σχήμα 39

Κύκλος με **κέντρο** Ο και ακτίνα ρ λέγεται το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ.

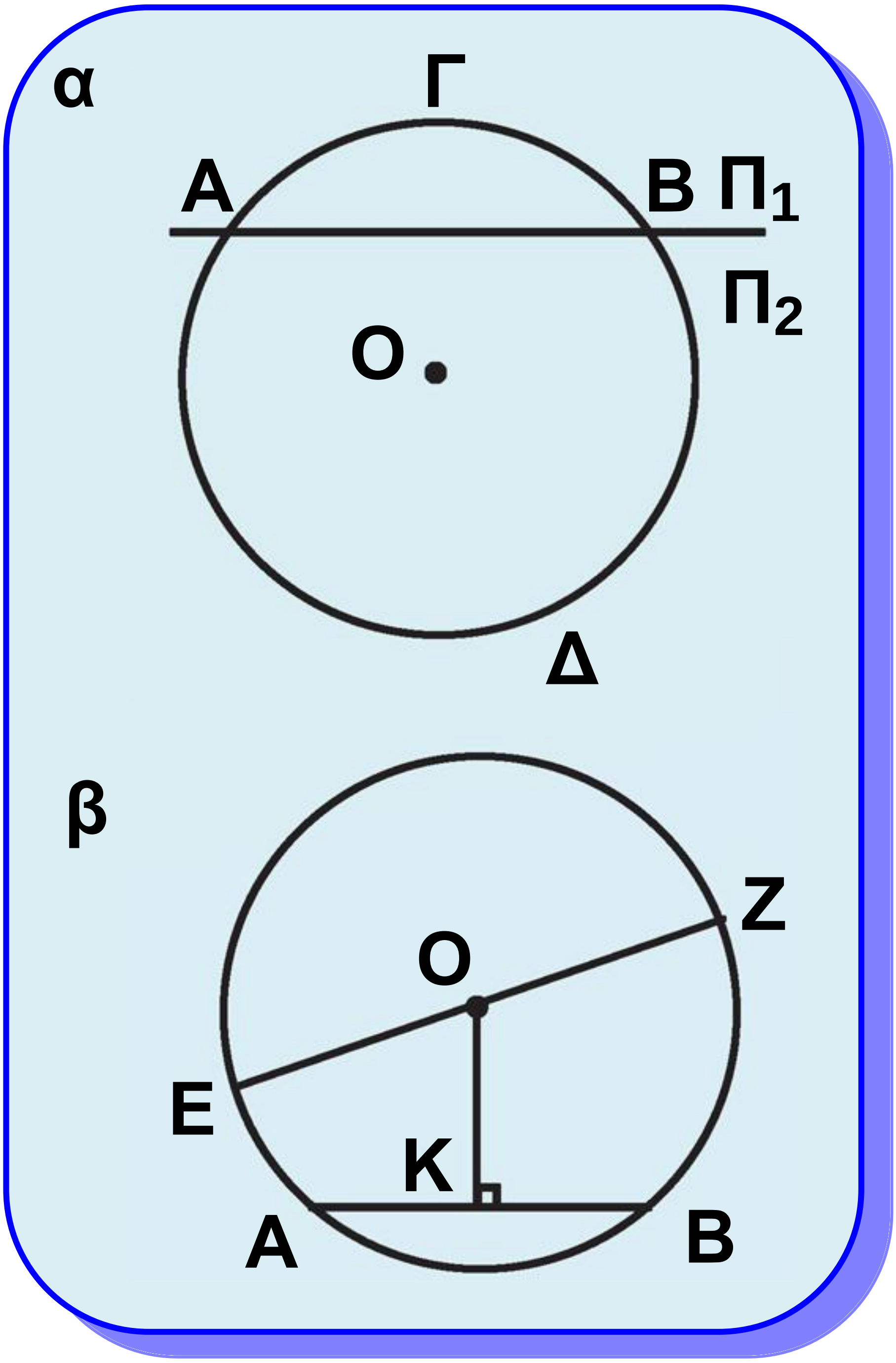
Δεχόμαστε ότι ο κύκλος είναι μία κλειστή γραμμή χωρίς διακοπές και κενά. Ένας κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ συμβολίζεται με (Ο,ρ) ή με (Ο) αν δεν είναι απαραίτητη η αναφορά της ακτίνας και σχεδιάζεται με το γνωστό μας διαβήτη (σχ.40).
Κάθε τμήμα ΟΜ , όπου Μ σημείο του κύκλου (Ο,ρ) (σχ.40), λέγεται επίσης ακτίνα του κύκλου. Για τα σημεία Μ ενός κύκλου (Ο,ρ) και μόνο γι’ αυτά ισχύει ΟΜ=ρ. Η ισότητα αυτή είναι, επομένως, «χαρακτηριστική» για τα σημεία του.
Το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα λέγεται γεωμετρικός τόπος. Έτσι ο κύκλος (Ο,ρ) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία, και μόνο γι’ αυτά, ισχύει ΟΜ = ρ.



Σχήμα 40

• Τόξα - Χορδές

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο, κέντρου Ο και δύο σημεία του Α και Β (σχ.41α). Τα σημεία αυτά χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη. Το ένα βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $Π_1$, που ορίζει η ευθεία ΑΒ, και το άλλο στο $Π_2$.



Σχήμα 41

Καθένα από τα μέρη αυτά λέγεται τόξο του κύκλου με άκρα Α και Β και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB}$. Κάθε σημείο ενός τόξου, διαφορετικό

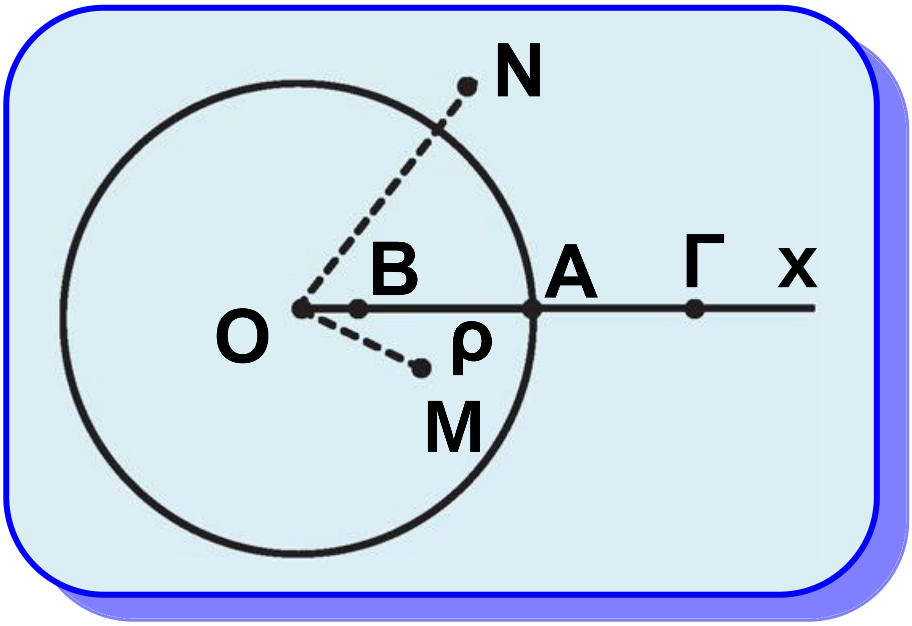
από τα άκρα του λέγεται **εσωτερικό σημείο** του τόξου. Για να αναφερθούμε στο ένα από τα τόξα με άκρα τα Α και Β, χρησιμοποιούμε και ένα εσωτερικό σημείο. Έτσι, τα τόξα του σχ.41α με άκρα Α,Β συμβολίζονται με $\overset{\frown}{ΑΓΒ}$ το ένα και με $\overset{\frown}{ΑΔΒ}$ το άλλο.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ.41β) που ορίζεται από τα άκρα Α,Β ενός τόξου λέγεται **χορδή** του τόξου. Η χορδή ενός τόξου λέγεται και χορδή του κύκλου.
Το μοναδικό κάθετο τμήμα ΟΚ (σχ.41β) που άγεται από το κέντρο Ο προς τη χορδή ΑΒ λέγεται **απόστημα** της χορδής. Μια χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται **διάμετρος** του κύκλου.

**Τα άκρα μιας διαμέτρου λέγονται αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου. Για παράδειγμα, το τμήμα ΕΖ (σχ. 41β) είναι μια διάμετρος του κύκλου και τα σημεία Ε, Ζ είναι αντιδιαμετρικά σημεία. Είναι φανερό ότι η διάμετρος είναι διπλάσια της ακτίνας και το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της.
Επειδή το μέσο ενός τμήματος είναι μοναδικό, προκύπτει ότι το κέντρο κάθε κύκλου είναι μοναδικό.**

• Θέση σημείου ως προς κύκλο

Έστω ένας κύκλος (Ο,ρ) και μία ημιευθεία Οx που τον τέμνει στο σημείο Α. Για κάθε σημείο Β (σχ.42) της ακτίνας ΟΑ, διαφορετικό του Α ισχύει ΟΒ < ρ, ενώ για κάθε σημείο Γ της προέκτασης της ΟΑ ισχύει ΟΓ > ρ. Τα σημεία Β,Γ λέγονται αντίστοιχα εσωτερικό και εξωτερικό

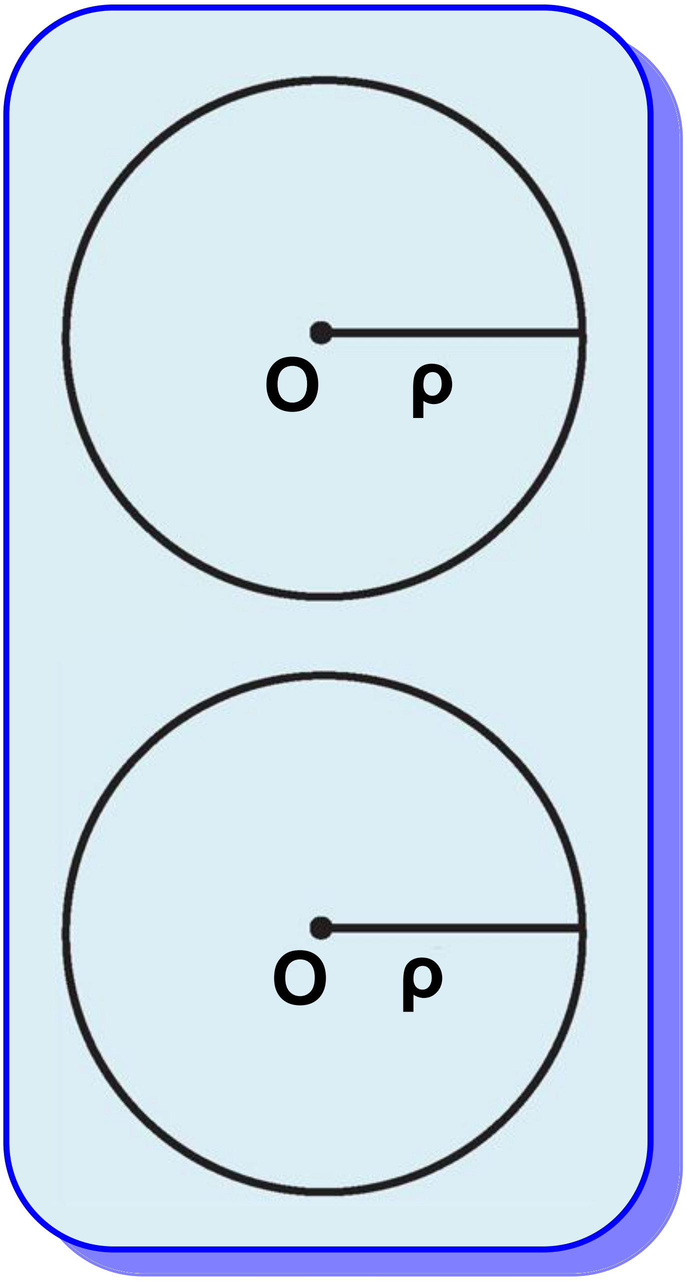
σημείο του κύκλου. Γενικά, ένα σημείο Μ του επιπέδου ενός κύκλου (Ο,ρ) (σχ.42) λέγεται **εσωτερικό** σημείο του κύκλου, όταν ΟΜ < ρ, ενώ ένα σημείο Ν λέγεται **εξωτερικό** του κύκλου, όταν ΟΝ > ρ.



Σχήμα 42

• Ίσοι κύκλοι

Δύο κύκλοι λέγονται ίσοι, όταν ο ένας με κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζεται με τον άλλον (σχ.43). Είναι φανερό ότι δύο κύκλοι είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσες ακτίνες.

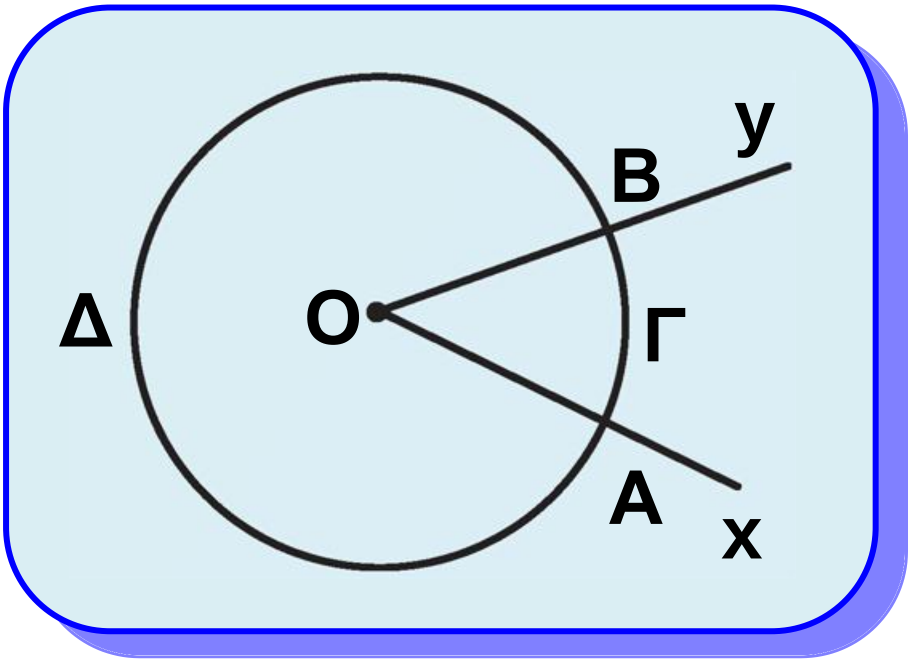


Σχήμα 43

2.18 Επίκεντρη γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και τόξου

Μία γωνία λέγεται επίκεντρη όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.

Για παράδειγμα, στο σχ.44 η $x\hat{O}y$ είναι μία επίκεντρη γωνία.
Οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α και Β. Το τόξο $\overset{\frown}{ΑΓΒ}$ που περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας και έχει άκρα τα Α, Β λέγεται αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας.
Επίσης, λέμε ότι η επίκεντρη γωνία $Α\hat{Ο}Β$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΓΒ}$.

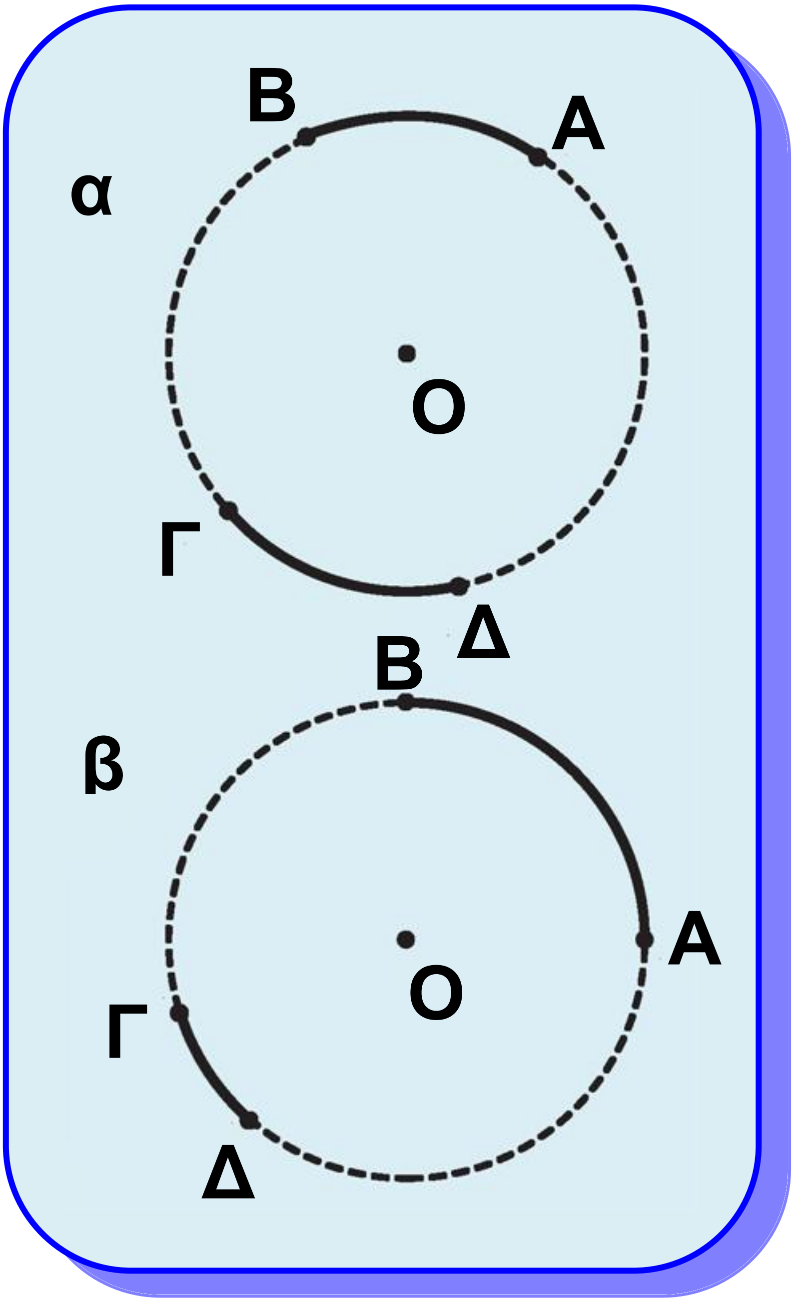


Σχήμα 44

• Σύγκριση τόξων

Η σύγκριση δύο τόξων γίνεται όπως και η σύγκριση των ευθύγραμμων τμημάτων.

Δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων λέγονται **ίσα**, όταν με κατάλληλη μετατόπιση το ένα ταυτίζεται με το άλλο και γράφουμε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ (σχ.45α). Το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ λέγεται **μεγαλύτερο** από το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ (ή το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ μικρότερο του $\overset{\frown}{AB}$) και γράφουμε $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ όταν μετά από κατάλληλη μετατόπιση το $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ταυτίζεται με μέρος του $\overset{\frown}{AB}$ (σχ.45β).



Σχήμα 45

Επισημαίνουμε ότι τα τόξα άνισων κύκλων δεν είναι συγκρίσιμα.

• Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου

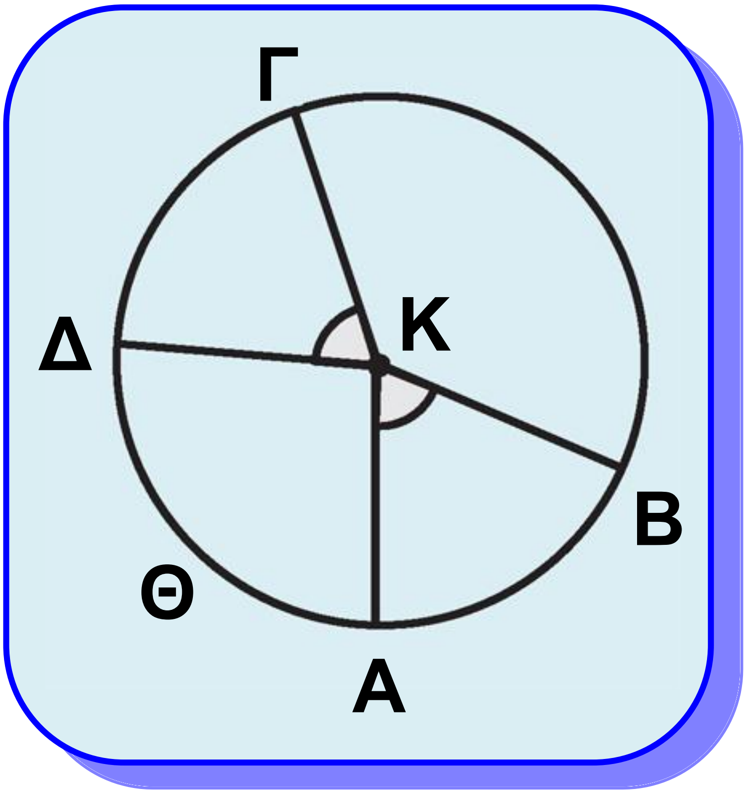
Η σύγκριση δύο τόξων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των επίκεντρων γωνιών που βαίνουν σε αυτά, σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Ι

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ δύο τόξα ενός κύκλου (Κ) (σχ.46). Τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, αφού είναι ίσα μετά από κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν, οπότε το Γ συμπίπτει με το Α και το Δ με το Β. Επομένως η ΚΓ θα συμπέσει με την ΚΑ και η ΚΔ με την ΚΒ, που σημαίνει ότι οι γωνίες $A\hat{K}B$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$ είναι ίσες.



Σχήμα 46

Αντίστροφα. Έστω δύο ίσες επίκεντρες γωνίες $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{B}$ και $\Gamma\widehat{\mathrm{K}}\Delta$ στον κύκλο (Κ). Τότε, αφού τα σημεία Α,Β,Γ,Δ είναι σημεία του ίδιου κύκλου, μετά από μετατόπιση της $\Gamma\widehat{\mathrm{K}}\Delta$ η γωνία αυτή θα ταυτισθεί με την $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{B}$, το Γ θα ταυτισθεί με το Α και το Δ με το Β. Έτσι τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ έχουν τα ίδια άκρα και επειδή βρίσκονται

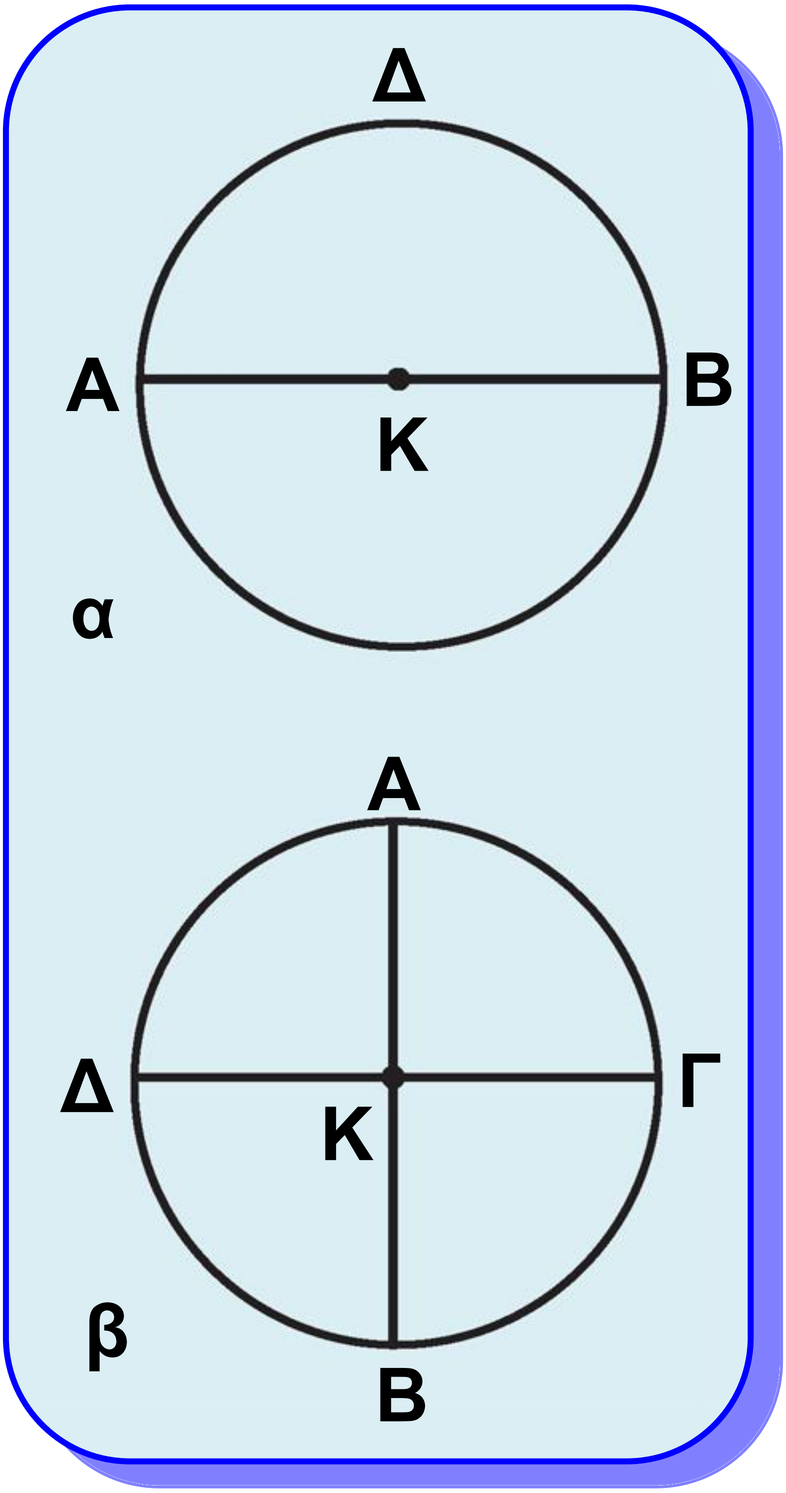
στο εσωτερικό των γωνιών που ταυτίζονται θα είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

Πορίσματα

(i) Κάθε διάμετρος ενός κύκλου τον διαιρεί σε δύο ίσα τόξα.
(ii) Δύο κάθετες διάμετροι ενός κύκλου τον διαιρούν σε τέσσερα ίσα τόξα.
(iii) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι άνισα, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ομοιοτρόπως άνισες.

Καθένα από τα ίσα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ και $\overset{\frown}{B\Delta A}$ (σχ.47α) στα οποία διαιρείται ο κύκλος (Κ) από την διάμετρο του ΑΒ, λέγεται ημικύκλιο, ενώ το

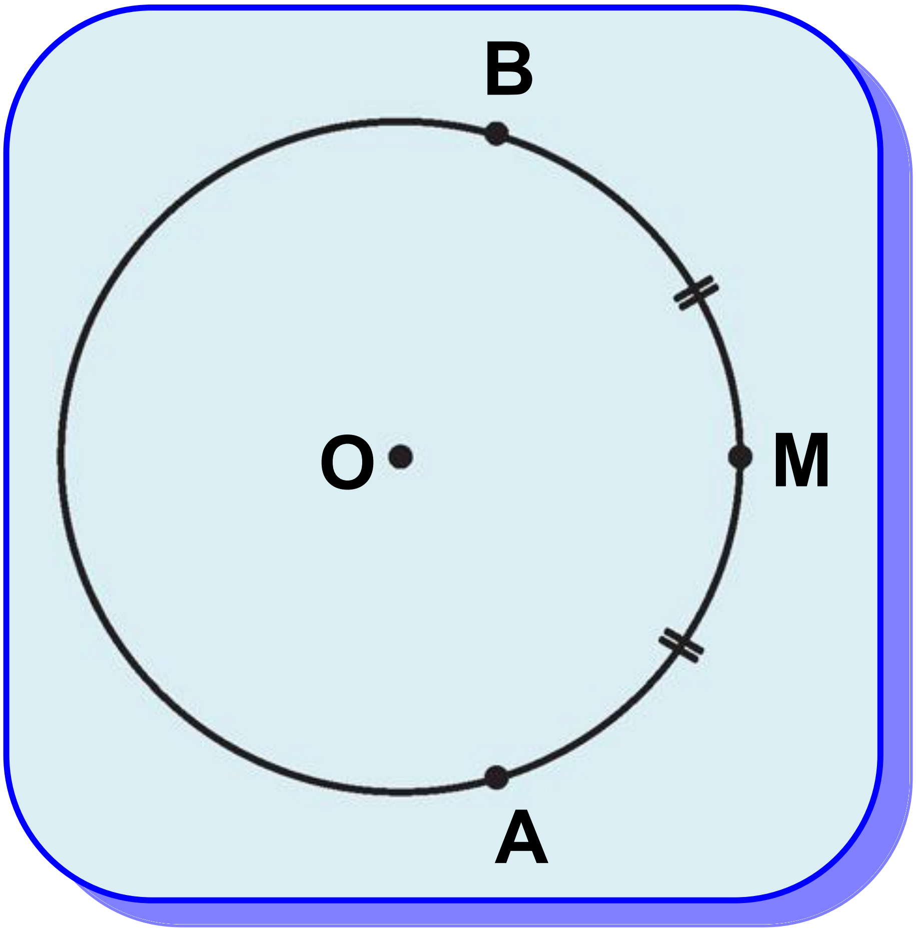
καθένα από τα ίσα τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΓΒ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΒΔ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΔΑ}}$ (σχ.47β) στα οποία διαιρεί-ται από τις κάθετες διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ, λέγεται τεταρτοκύκλιο.



Σχήμα 47

• Μέσο τόξου

Ένα εσωτερικό σημείο Μ ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$ (σχ.48) λέγεται μέσο του, όταν τα τόξα $\overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{MB}$ είναι ίσα, δηλαδή όταν $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.



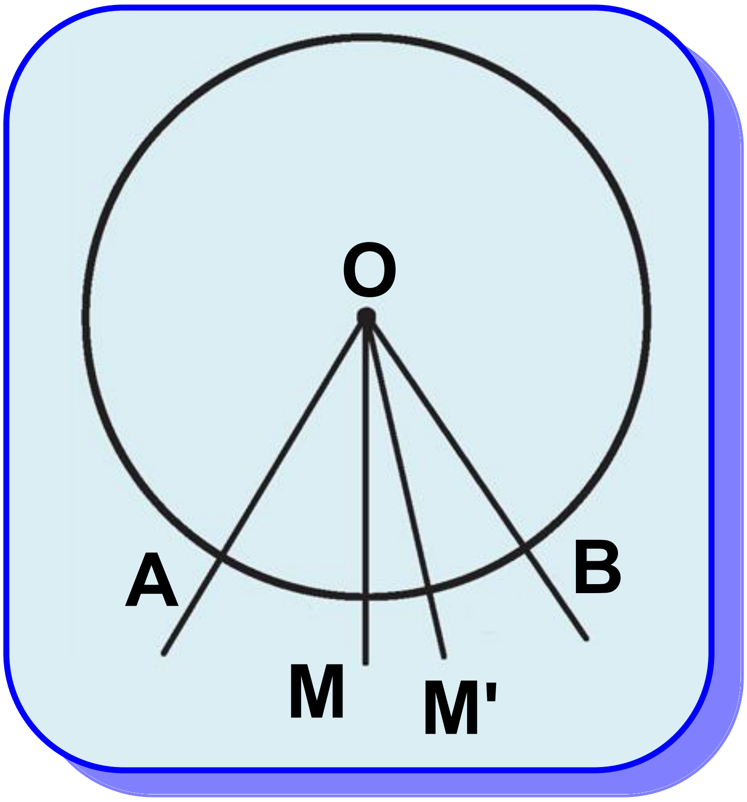
Σχήμα 48

Θεώρημα ΙΙ

Το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ τόξο κύκλου, κέντρου Ο, και Μ το μέσο του (σχ.49).



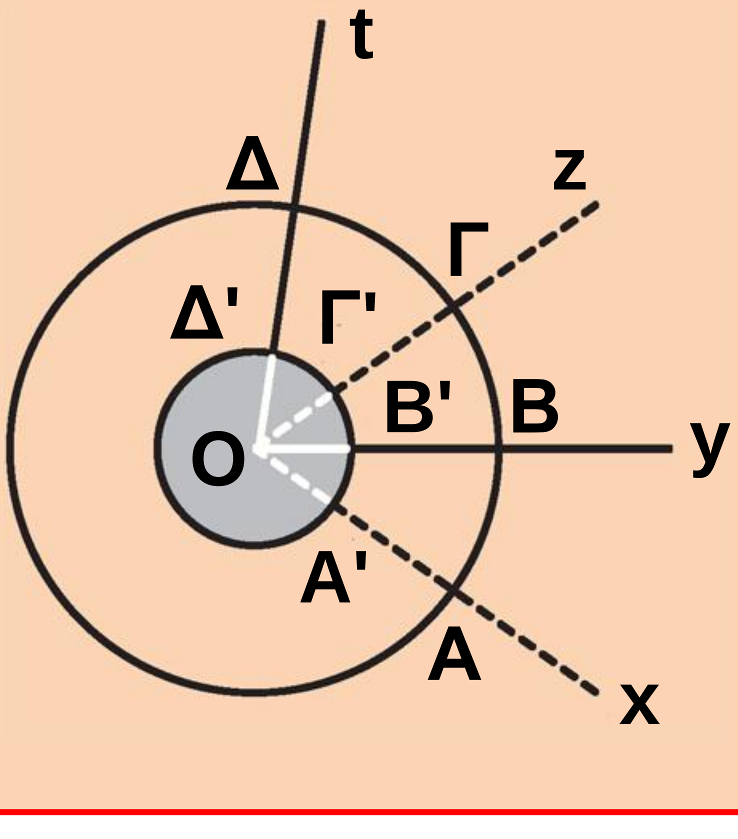
Σχήμα 49

Επειδή $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$, οι επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}M$ και $M\hat{O}B$ είναι ίσες και επομένως η ΟΜ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$. Αν υποθέσουμε ότι το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει και

δεύτερο μέσο το Μ', τότε η ΟΜ' είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$, που είναι άτοπο γιατί η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $z\hat{O}t$ του παρακάτω σχήματος είναι επίκε-ντρες σε δύο ομόκεντρους κύκλους, (δηλαδή κύκλους με το



ίδιο κέντρο), (Ο,R) και (Ο,R') με R' < R. Αν $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, να αποδείξετε ότι και Α'Β' = Γ'Δ' (σχ.50).

Απόδειξη

Επειδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, θα είναι $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, οπότε και $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να δώσετε τον ορισμό του κύκλου (Ο, ρ) . Πότε δύο κύκλοι λέγονται ίσοι; Πώς ελέγχεται η ισότητα δύο κύκλων;

2. Πότε ένα σημείο λέγεται εσωτερικό σημείο ενός κύκλου και πότε εξωτερικό;

3. Τι λέγεται γεωμετρικός τόπος;

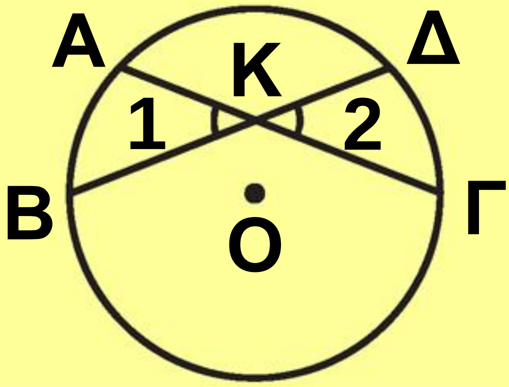
4. **Τι λέγεται διάμετρος ενός κύκλου και ποια η σχέση της με την ακτίνα του κύκλου;**

5. **Τι λέγεται τόξο κύκλου με άκρα Α,Β και τι χορδή του; Πώς ορίζεται η ισότητα και η ανισότητα δύο τόξων ενός κύκλου;**

6. **Τι λέγεται επίκεντρη γωνία και τι αντίστοιχο τόξο της; Ποια σχέση ισότητας - ανισότητας υπάρχει μεταξύ επίκεντρων γωνιών και αντίστοιχων τόξων;**

7. **Τι λέγεται μέσο τόξου; Αν τα σημεία Μ,Ν είναι μέσα ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$, τι συμπεραίνετε γι' αυτά;**

8. **Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$;**



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σχεδιάστε έναν κύκλο ακτίνας ρ, που να διέρχεται από σταθερό σημείο Κ. Πόσους τέτοιους κύκλους μπορούμε να χαράξουμε στο επίπεδο; Πού βρίσκονται τα κέντρα τους;

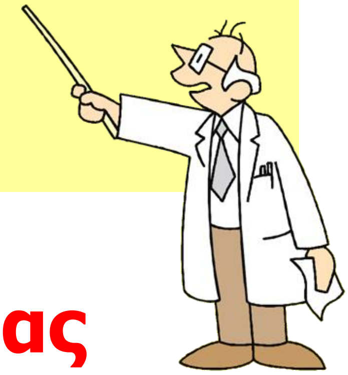
2. Σχεδιάστε δύο κύκλους (Ο, ρ) και (Ο, R) με R > ρ. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που είναι εσωτερικά του κύκλου (Ο, R) και εξωτερικά του κύκλου (Ο, ρ).

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο,R) και (Ο, ρ) με R > ρ. Μία ευθεία ε διέρχεται από το Ο και τέμνει τους κύκλους στα διαδοχικά σημεία

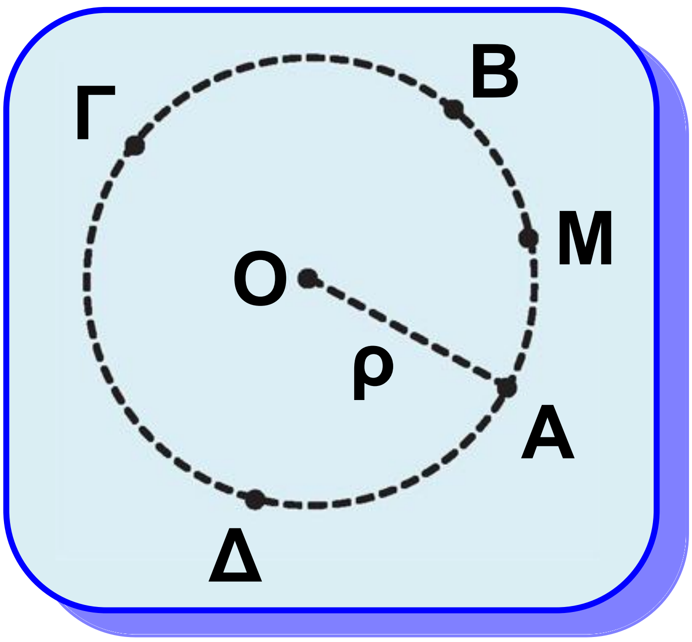
Α,Β,Γ,Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΓΔ και ΑΓ = ΒΔ.

2. Αν δύο διάμετροι σχηματίζουν δύο εφεξής γωνίες ίσες, τότε να αποδείξετε ότι διαιρούν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα.



2.19 Μέτρο τόξου και γωνίας

Δύο τόξα ενός κύκλου με ένα άκρο κοινό και χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία λέγονται διαδοχικά, π.χ. τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{ΑΒ}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{ΒΓ}}$ (σχ.51) είναι διαδοχικά.

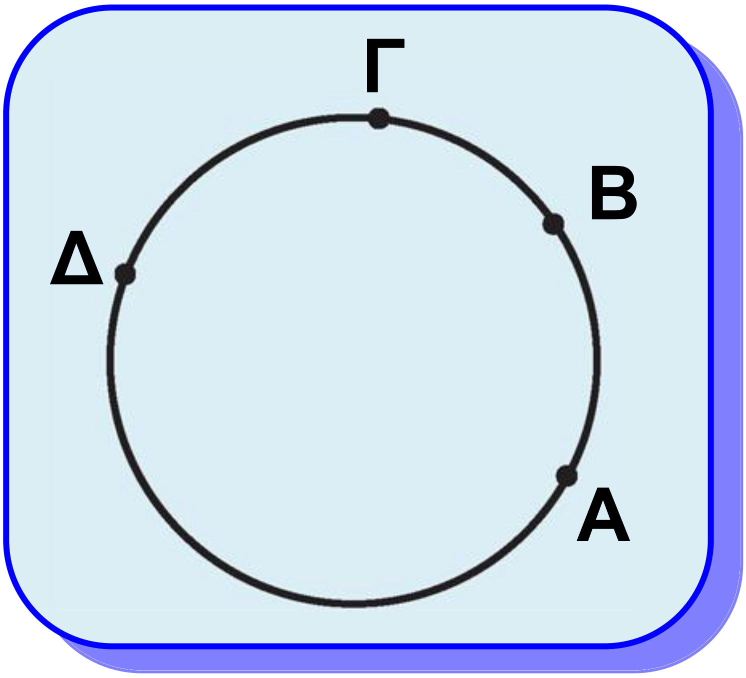


Σχήμα 51

Τρία ή περισσότερα τόξα με καθορισμένη σειρά λέγονται διαδοχικά, όταν το καθένα είναι διαδοχικό με το επόμενο του, π.χ. τα τόξα $\overset{\frown}{A B}$, $\overset{\frown}{B Γ}$ και $\overset{\frown}{Γ Δ}$ (σχ.51) είναι διαδοχικά. Είναι φανερό ότι τα τόξα $\overset{\frown}{A B}$, $\overset{\frown}{B Γ}$ και $\overset{\frown}{Γ Δ}$ είναι διαδοχικά, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}Γ$ και $Γ\hat{O}Δ$ είναι διαδοχικές.

Έστω $\overset{\frown}{A B}$ και $\overset{\frown}{B Γ}$ δύο διαδοχικά τόξα ενός κύκλου (σχ.52). Το τόξο $\overset{\frown}{ABΓ}$ λέγεται άθροισμα των τόξων $\overset{\frown}{A B}$ και $\overset{\frown}{B Γ}$ και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{A B} + \overset{\frown}{B Γ}$, δηλαδή $\overset{\frown}{A B} + \overset{\frown}{B Γ} = \overset{\frown}{ABΓ}$. Αν το τόξο $\overset{\frown}{B Γ}$ είναι ίσο με το $\overset{\frown}{A B}$, τότε το τόξο $\overset{\frown}{ABΓ}$ συμβολίζεται με $2\overset{\frown}{A B}$ και λέγεται διπλάσιο του $\overset{\frown}{A B}$.

Όμοια ορίζεται και το $\nu \bullet \overset{\frown}{AB}$, όπου ν φυσικός.



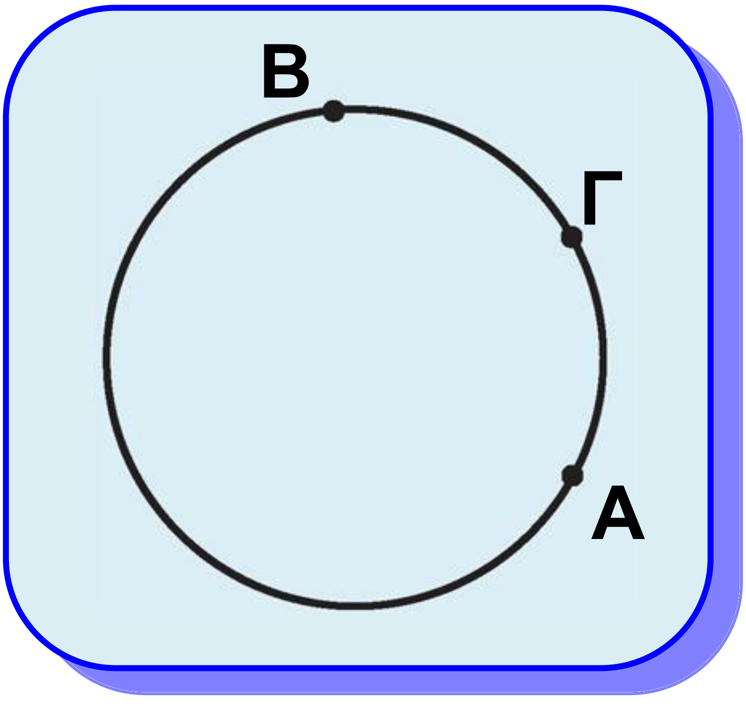
Σχήμα 52

Αν για δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου ισχύει $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \nu \overset{\frown}{AB}$, τότε το $\overset{\frown}{AB}$ λέγεται ένα ν-οστό του $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και συμβολίζεται με $\frac{1}{\nu}\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{\nu}\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

Στην περίπτωση που τα τόξα δεν είναι διαδοχικά, μπορούμε να μετατοπίσουμε το ένα από αυτά,

ώστε να γίνουν διαδοχικά. Στην § 3.18 θα αναφέρουμε τη σχετική γεωμετρική κατασκευή.

Αν $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΑΓ}$ είναι δύο μη διαδοχικά τόξα ενός κύκλου με $\overset{\frown}{ΑΒ} > \overset{\frown}{ΑΓ}$ (σχ.53) που έχουν κοινό σημείο το ένα άκρο τους Α, τότε το τόξο $\overset{\frown}{ΓΒ}$ λέγεται διαφορά του $\overset{\frown}{ΑΓ}$ από το $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{ΑΒ} - \overset{\frown}{ΑΓ}$. Όταν $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΑΓ}$, τότε η

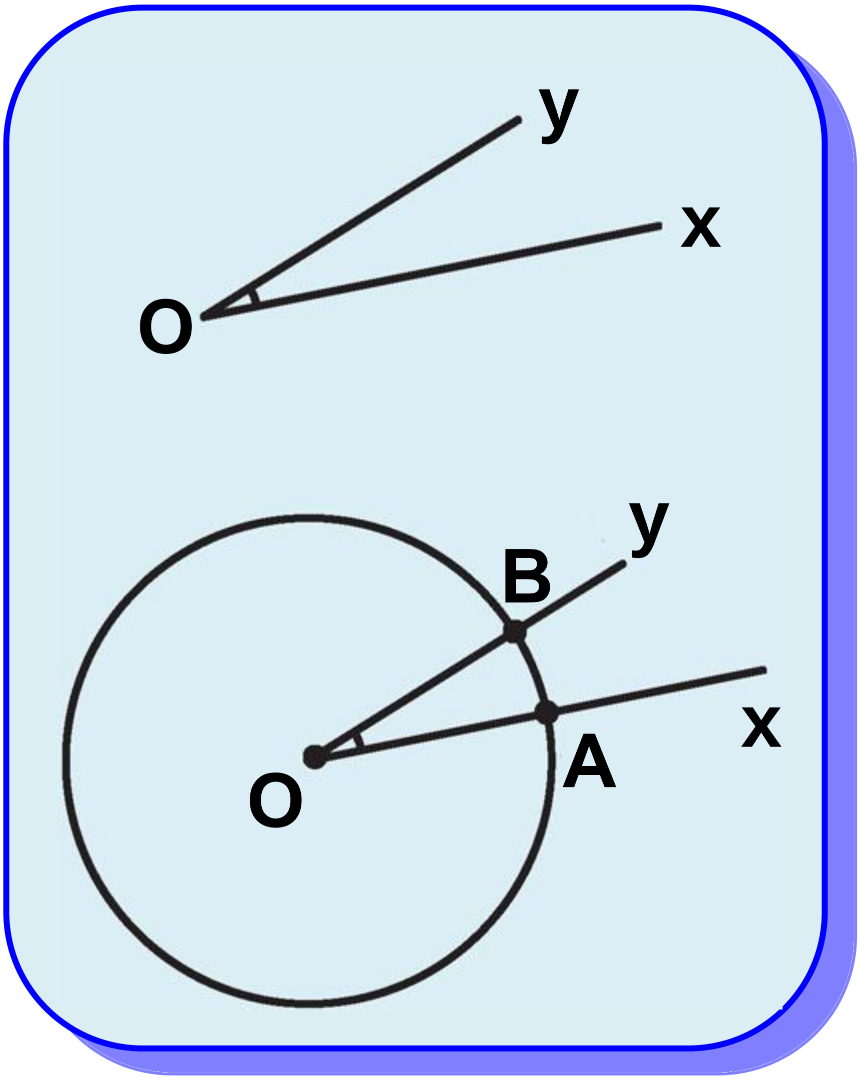


Σχήμα 53

διαφορά τους είναι το μηδενικό τόξο $\overset{\frown}{0}$.

Είδαμε ότι μπορούμε να συγκρίνουμε ένα τόξο ενός κύκλου με ένα άλλο τόξο του ίδιου κύκλου. Ένα τόξο με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα άλλα το λέμε μονάδα μέτρησης. Έχει επικρατήσει να χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης το τόξο μίας μοίρας που ορίζεται ως το $\frac{1}{360}$ του τόξου ενός κύκλου και συμβολίζεται με 1°. Για κάθε τόξο υπάρχει ένας θετικός αριθμός (όχι απαραίτητα φυσικός), που εκφράζει πόσες φορές το τόξο περιέχει τη μοίρα ή μέρη αυτής. Ο αριθμός αυτός λέγεται μέτρο του τόξου. Από τον ορισμό της μοίρας προκύπτει ότι το τόξο ενός κύκλου είναι 360° και επομένως το ημικύκλιο και το τεταρτοκύκλιο

είναι τόξα 180° και 90° αντίστοιχα. Η μοίρα υποδιαιρείται σε 60 πρώτα λεπτά (συμβολικά 60') και κάθε πρώτο λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά (συμβολικά 60'').



Σχήμα 54

Θεωρούμε μια γωνία $x\hat{O}y$ (σχ.54), που την καθιστούμε επίκεντρη σε

έναν κύκλο (Ο, ρ), και έστω $\overset{\frown}{AB}$ το τόξο στο οποίο βαίνει. Ορίζουμε ως **μέτρο** της γωνίας $x\hat{O}y$ το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Το μέτρο της $x\hat{O}y$ το συμβολίζουμε με $(x\hat{O}y)$ ή απλά $x\hat{O}y$. Το μέτρο μίας ορθής, ευθείας και μιας πλήρους γωνίας είναι αντίστοιχα $90°$, $180°$ και $360°$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε κύκλο κέντρου Ο, θεωρούμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma A}$ (σχ.55), ώστε

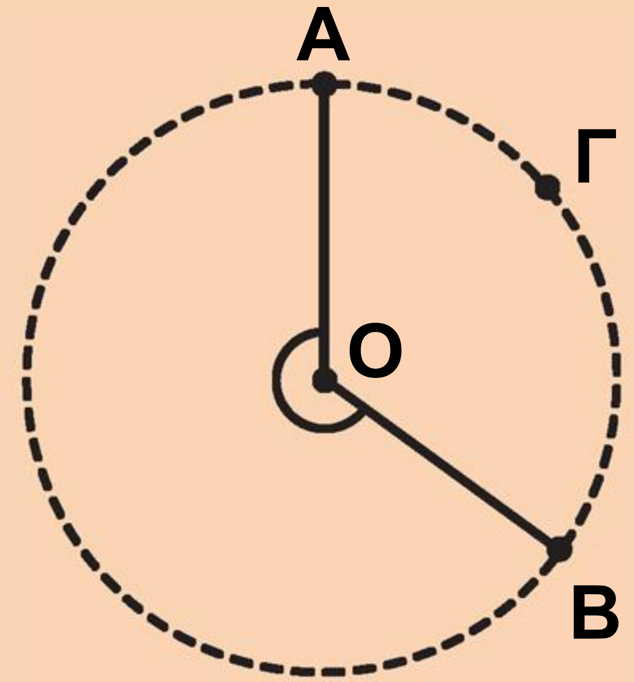
$$\overset{\frown}{AB} = 3\overset{\frown}{B\Gamma} = 6\overset{\frown}{\Gamma A}$$

Να υπολογισθούν:

(i) τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$,

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

(ii)τα μέτρα των γωνιών $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}A$.



Λύση

(i) Από την υπόθεση έχουμε ότι $\overset{\frown}{AB} = 6\overset{\frown}{\Gamma A}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 2\overset{\frown}{\Gamma A}$, οπότε με αντικατάσταση στη σχέση $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma A} = 360^\circ$ προκύπτει

ότι 9$\overset{\frown}{ΓΑ}$ = 360° ή $\overset{\frown}{ΓΑ}$= 40°. Άρα $\overset{\frown}{ΑΒ}$ = 240° και $\overset{\frown}{ΒΓ}$ =80°.

(ii) Η $Α\hat{Ο}Β$ είναι επίκεντρη με αντίστοιχο τόξο το $\overset{\frown}{ΑΒ}$, επομένως $Α\hat{Ο}Β$ = $\overset{\frown}{ΑΒ}$ = 240° (μη κυρτή).

Όμοια $Β\hat{Ο}Γ$ = 80° και $Γ\hat{Ο}Α$ = 40°.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

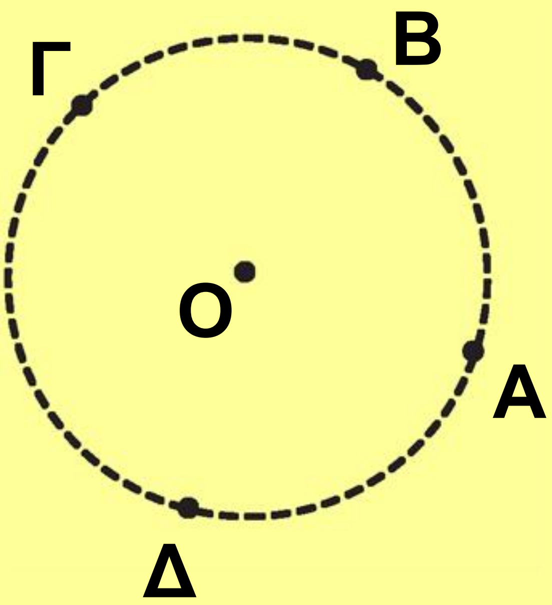
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στο παρακάτω σχήμα, να βρεθούν τα τόξα:

i) $\overset{\frown}{ΑΒ}$ + $\overset{\frown}{ΒΓ}$

ii) $\overset{\frown}{ΑΒ}$ + $\overset{\frown}{ΒΓ}$ + $\overset{\frown}{ΓΔ}$

iii) $\overset{\frown}{ΑΒΓ}$ - $\overset{\frown}{ΒΓ}$



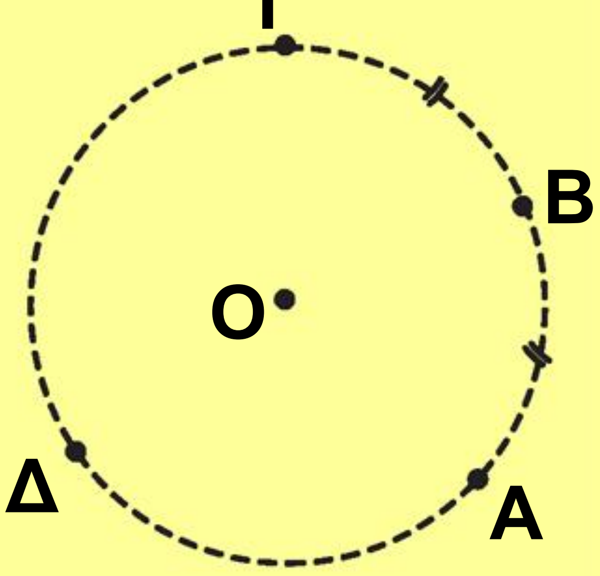
2. Στο παρακάτω σχήμα, να βρεθούν τα τόξα:

i) $2\overset{\frown}{AB}$

ii) $2\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$

iii) $2\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{B\Gamma}$

iv) $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{B\Gamma}$



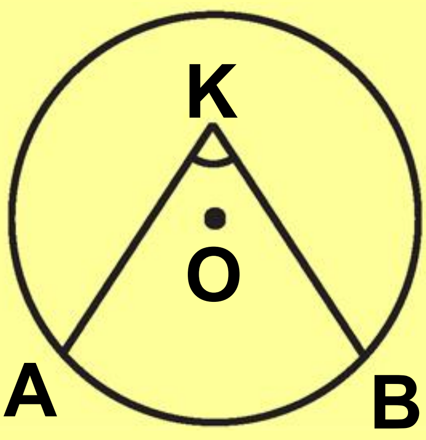
3. Το μέτρο ενός τόξου είναι αριθμός:

α. αρνητικός β. μηδέν
γ. θετικός δ. μη αρνητικός.

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

4. Πώς ορίζεται το μέτρο μιας γωνίας;

5. Αν $\overset{\frown}{AB} = \mu°$ (παρακάτω σχήμα), τότε η γωνία $A\hat{K}B$ θα είναι $\mu°$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε ημικύκλιο δίνονται τα σημεία Α, Β και σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$,

ώστε $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$.
i) Αν Ρ σημείο του ημικυκλίου που δεν ανήκει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$, να

αποδείξετε ότι $\overset{\frown}{PM} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB})$

ii) Αν Σ σημείο του τόξου $\overset{\frown}{MB}$, να

αποδείξετε ότι $\overset{\frown}{\Sigma M} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{\Sigma B})$.

2. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε

$\overset{\frown}{A\Gamma} - \overset{\frown}{B\Gamma} = 80^\circ$. Να βρείτε τα μέτρα:

i) των τόξων $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma B}$,

ii) των γωνιών $A\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}B$ (Ο είναι το κέντρο του κύκλου).

3. Δυο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Αν η μία είναι διπλάσια από την άλλη, να βρείτε πόσες μοίρες είναι καθεμία από τις γωνίες αυτές.

4. **Αν μια γωνία ω είναι τα 6/5 μιας ορθής γωνίας, να υπολογίσετε σε μοίρες την παραπληρωματική της. Η γωνία ω έχει συμπληρωματική γωνία;**

Αποδεικτικές Ασκήσεις

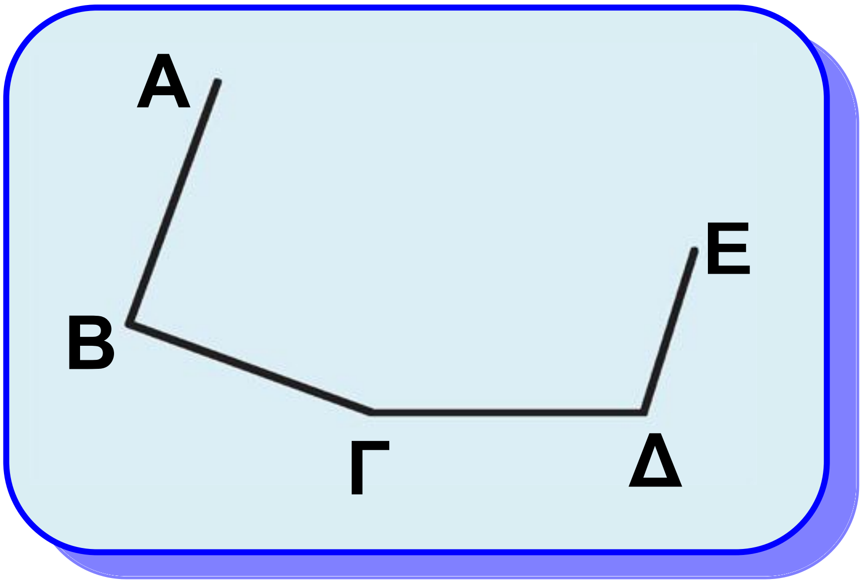
1. **Η παραπληρωματική μιας γωνίας ω είναι τριπλάσια της συμπληρωματικής γωνίας της ω. Να υπολογίσετε την ω.**

2. **Μια γωνία φ είναι μικρότερη από τη συμπληρωματική της κατά 20°. Να υπολογίσετε τις δύο γωνίες.**

3. **Τέσσερις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$, $\Delta\hat{O}A$, που έχουν μέτρα ανάλογα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να υπολογίσετε τις γωνίες αυτές.**

2.20 Τεθλασμένη γραμμή - Πολύγωνο - Στοιχεία πολυγώνου

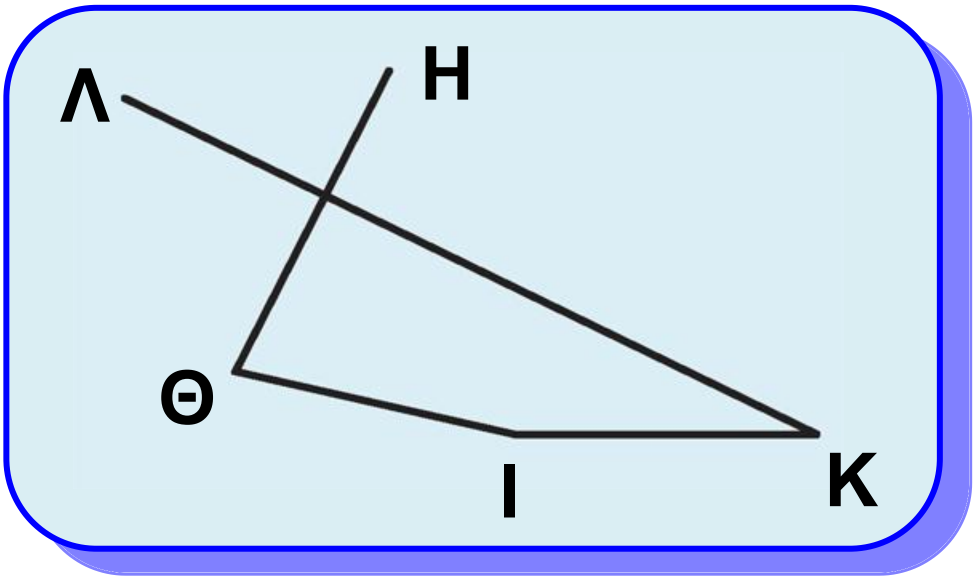
Θεωρούμε σημεία που έχουν καθορισμένη σειρά και ανά τρία διαδοχικά δεν είναι συνευθειακά, π.χ. τα Α, Β, Γ, Δ και Ε, με την αλφαβητική τους σειρά και θέση, όπως στο σχ.56.



Σχήμα 56

Το σχήμα που ορίζουν τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ λέγεται τεθλα-σμένη γραμμή ή απλά τεθλασμένη.

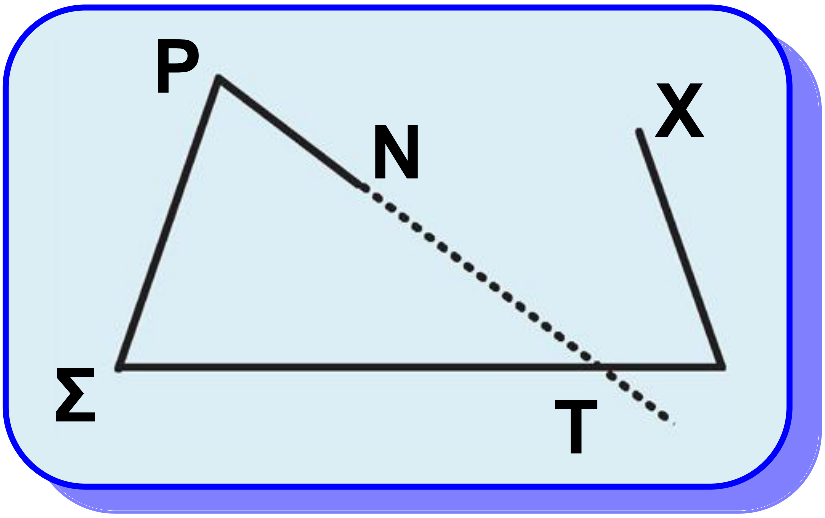
Η τεθλασμένη αυτή συμβολίζεται με ΑΒΓΔΕ.
Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε λέγονται **κορυφές** της τεθλασμένης και ειδικότερα οι κορυφές Α και Ε λέγονται **άκρα** της. Τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ λέγονται **πλευρές** της τεθλασμένης και το άθροισμά τους λέγεται **περίμετρος** της τεθλασμένης. Μία τεθλασμένη λέγεται **απλή**, όταν δύο οποιεσδήποτε μη διαδοχικές πλευρές της δεν έχουν κοινό εσωτερικό σημείο.



Σχήμα 57

Έτσι, η τεθλασμένη ΑΒΓΔΕ (σχ.56) είναι απλή, ενώ η ΗΘΙΚΛ (σχ.57) δεν είναι.

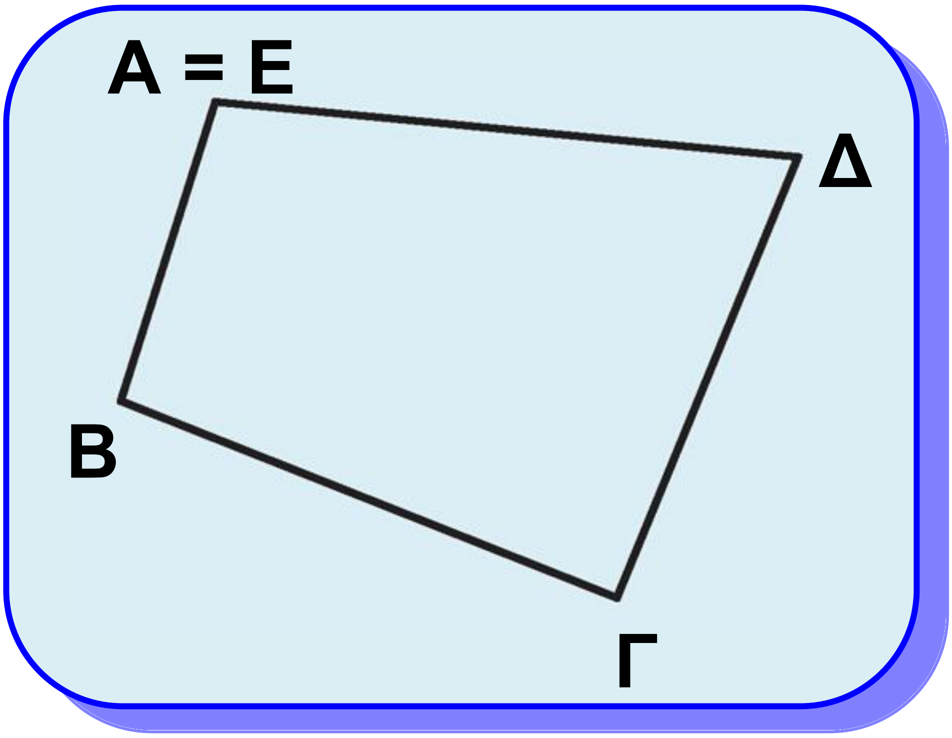
Μία τεθλασμένη λέγεται **κυρτή**, όταν ο φορέας κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες κορυφές της προς το ίδιο μέρος του, διαφορετικά λέγεται **μη κυρτή**. Έτσι η γραμμή ΑΒΓΔΕ (σχ.56) είναι κυρτή, ενώ οι ΗΘΙΚΛ (σχ.57) και ΝΡΣΤΧ (σχ.58) είναι μη κυρτές.



Σχήμα 58

Επίσης, μια τεθλασμένη, της οποίας τα άκρα ταυτίζονται, λέγεται

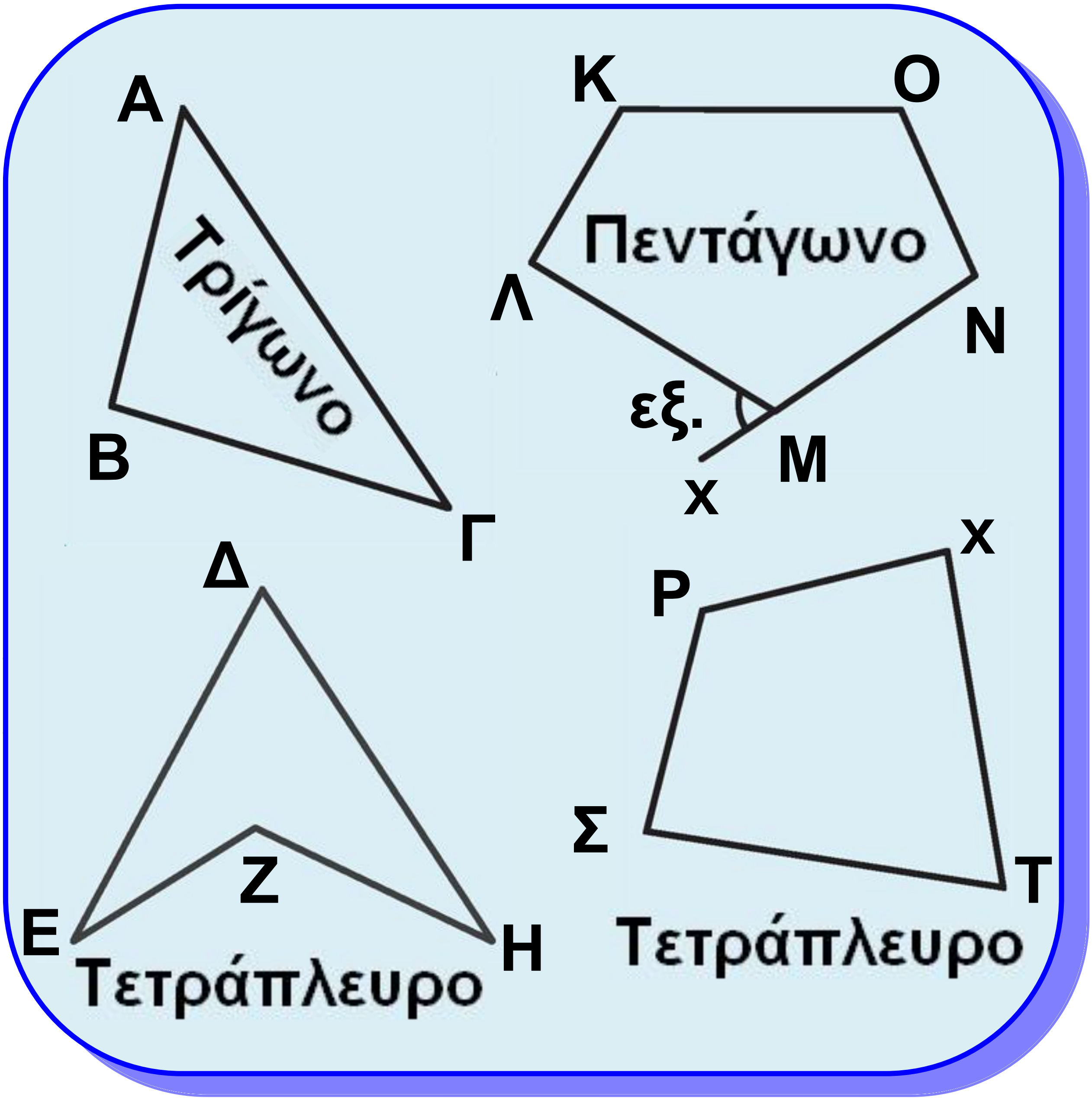
κλειστή, π.χ. η ΑΒΓΔΕ, όπου το Α ταυτίζεται με το Ε (σχ.59).



Σχήμα 59

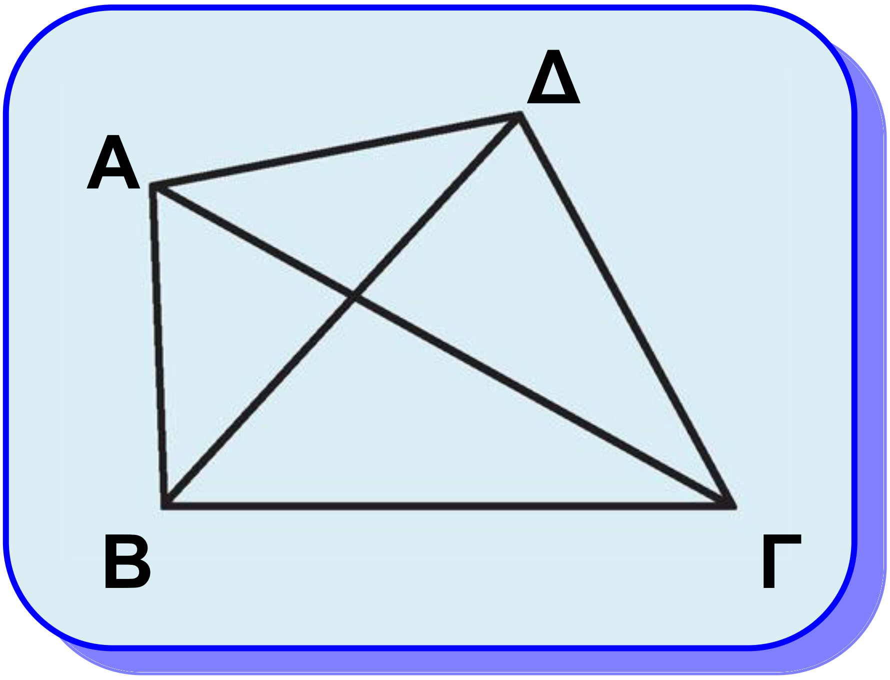
Μια κλειστή και απλή τεθλασμένη λέγεται πολύγωνο. Αν η τεθλασμένη είναι κυρτή, τότε το πολύγωνο λέγεται κυρτό, ενώ αν είναι μη κυρτή, το πολύγωνο λέγεται μη κυρτό.
Για παράδειγμα, τα πολύγωνα ΑΒΓ (σχ.60) και ΚΛΜΝΟ (σχ.60) είναι κυρτά, ενώ το ΔΕΖΗ (σχ.60) είναι μη

κυρτό. Το πολύγωνο με τρεις κορυφές λέγεται **τρίγωνο** (σχ.60), με τέσσερις **τετράπλευρο** (σχ.60), με πέντε **πεντάγωνο** (σχ.60) και γενικά με ν, **ν-γωνο**. Στο εξής λέγοντας πολύγωνο θα εννοούμε κύρτο πολύγωνο.



Σχήμα 60

Κάθε τμήμα που έχει άκρα δύο μη διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου λέγεται διαγώνιος του πολυγώνου. Έτσι τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ.61).



Σχήμα 61

Γωνίες πολυγώνου λέγονται οι γωνίες που σχηματίζουν οι πλευρές του. Σε ένα κυρτό πολύγωνο τα κοινά εσωτερικά σημεία των γωνιών τους λέγονται εσωτερικά

σημεία του πολυγώνου και αποτελούν το εσωτερικό του πολυγώνου.

Εξωτερική γωνία πολυγώνου λέγεται κάθε γωνία που είναι εφεξής και παραπληρωματική μιας εσωτερικής γωνίας του. Για να τη σχηματίσουμε, αρκεί να προεκτείνουμε μια πλευρά του πολυγώνου, π.χ. η γωνία $\Lambda\hat{M}x$ (σχ. 60) είναι εξωτερική γωνία του πενταγώνου ΚΛΜΝΟ και συμβολίζεται $\hat{M}_{\varepsilon\xi}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ώστε

$$AB < \frac{A\Gamma}{2}, \quad B\Gamma < \frac{B\Delta}{2} \quad \text{και}$$

ονομάζουμε Ε, Ζ τα μέσα των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$EZ = \frac{A\Gamma - B\Gamma}{2}$$

2. Σε ευθεία ε παίρνουμε δύο διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ. Αν Δ,Ε,Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ,ΓΑ αντίστοιχα, αποδείξετε ότι τα τμήματα ΔΕ, ΒΖ έχουν κοινό μέσο.

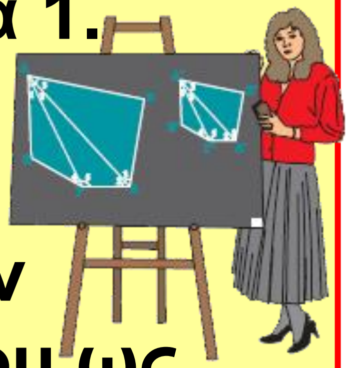
3. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ονομάζουμε Ε το μέσο του ΒΔ. Να αποδείξετε ότι $AE < \frac{A\Gamma}{2}$

4. Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και τα διαδοχικά σημεία του Α, Β, Γ και Δ, ώστε $\overset{\frown}{ΑΒ} = 150°$, $\overset{\frown}{ΓΔ} = 45°$ και $\overset{\frown}{ΑΔ} = 105°$. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Ο}Γ$ είναι αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ.

5. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, Μ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και Κ τυχαίο σημείο του τόξου $\overset{\frown}{ΒΜ}$. Αν Γ και Δ είναι τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{ΑΚ}$ και $\overset{\frown}{ΜΚ}$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΓΔ}$.

Δραστηριότητα

Να βρείτε κατά πόσο αυξάνει ο αριθμός των διαγωνίων κυρτού ν-γώνου όταν ο αριθμός των πλευρών του αυξηθεί κατά 1.



Εργασία

Να βρείτε το πλήθος δ των διαγωνίων κυρτού ν-γώνου ως συνάρτηση του πλήθους των πλευρών του (ν ≥ 3), ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

i) Να κατασκευάσετε τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο και εξάγωνο και να βρείτε:

α) το πλήθος των διαγωνίων με μια κοινή κορυφή,

β) το συνολικό πλήθος των διαγωνίων.

Να βρείτε κατά πόσο αυξάνει ο αριθμός των διαγωνίων κυρτού ν-γώνου όταν ο αριθμός των πλευρών του αυξηθεί κατά 1.

ii) Μπορείτε να «ανακαλύψετε» ποιος τύπος δίνει το δ ως συνάρτηση του ν;

iii) Υποθέστε ότι ο τύπος ισχύει για πολύγωνο με ν πλευρές και να αποδείξετε ότι ισχύει για πολύγωνο με ν + 1 πλευρές.

Υπόδειξη: Προσθέστε μια κορυφή και βρείτε το πλήθος των επιπλέον διαγωνίων.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό δώσαμε τις πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες: σημείο, ευθεία, επίπεδο και ορίσαμε τα βασικά γεωμετρικά σχήματα: ευθύγραμμο τμήμα, γωνία και κύκλο. Τέλος, δώσαμε την έννοια της τεθλασμένης γραμμής και του πολυγώνου.

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία Α, Β ορίστηκε ως το σχήμα που αποτελείται από τα σημεία Α, Β και τα σημεία της ευθείας ΑΒ που είναι μεταξύ των Α, Β. Στη συνέχεια μιλήσαμε για σύγκριση τμημάτων, για το μέσο ενός τμήματος και δεχθήκαμε τη μοναδικότητά του. Κατόπιν ορίσαμε πράξεις με τμήματα, την έννοια του μήκους ενός τμήματος και την απόσταση δύο σημείων. Η γωνία ορίστηκε ως το σχήμα που αποτελείται από τα

κοινά σημεία δύο ημιεπιπέδων. Στη συνέχεια μίλησαμε για σύγκριση γωνιών, για τη διχοτόμο μιας γωνίας και δεχθήκαμε τη μοναδικότητά της. Κατόπιν ορίσαμε την έννοια της ορθής (καθεμία από τις γωνίες στις οποίες χωρίζεται η ευθεία γωνία από τη διχοτόμο της), οξείας, αμβλείας γωνίας και της καθετότητας δύο ευθειών. Επίσης, ορίσαμε τις πράξεις με γωνίες και τις έννοιες συμπληρωματικές, παραπληρωματικές και κατακορυφήν γωνίες. Ο κύκλος (Ο,ρ) ορίστηκε ως το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου που απέχουν από το σημείο Ο, απόσταση ρ. Στη συνέχεια ασχοληθήκαμε με τόξα, χορδές και σύγκριση τόξων. Αποδείξαμε τη μοναδικότητα του μέσου ενός τόξου στηριζόμενοι στη μοναδικότητα της διχοτόμου μιας

γωνίας και αξιοποιώντας τη βασική σχέση της επίκεντρης γωνίας με το αντίστοιχο τόξο της. Τέλος, ορίσαμε το μέτρο τόξου και γωνίας (ως το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της, όταν αυτή γίνει επίκεντρη σε κύκλο).

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Τα βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

- **Πρωταρχικές έννοιες:**
  σημείο, ευθεία, επίπεδο
- **Ευθύγραμμο τμήμα**
  - **Σύγκριση τμημάτων**
  - **Μέσο τμήματος**
  - **Πράξεις με τμήματα**
  - **Μήκος τμήματος –**
  - **Απόσταση σημείων**

- **Γωνίες**
  - **Σύγκριση γωνιών**
  - **Διχοτόμος γωνίας**
  - **Οξεία, ορθή, αμβλεία γωνία, κάθετες ευθείες**
  - **Πράξεις με γωνίες**
  - **Συμπληρωματικές, παραπληρωματικές, κατακορυφήν γωνίες**

- **Κύκλος**
  - **Διάμετρος**
  - **Τόξα - χορδές, σύγκριση τόξων, μέσο τόξου**
  - **Επίκεντρη γωνία και σχέση με το αντίστοιχο τόξο**
  - **Μέτρο τόξου και γωνίας**

- **Ευθύγραμμα σχήματα:**
  τεθλασμένη γραμμή, πολύγωνο, στοιχεία πολυγώνου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 1ου ΤΟΜΟΥ

Κεφάλαιο 1ο

Κεφάλαιο 2ο