ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Α΄ ΤΕΥΧΟΣ

1ος ΤΟΜΟΣ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΕΡΓΟΥ:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Ι.Τ.Υ.Ε. «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

Αργυρόπουλος Ηλίας
Διδάκτωρ Μαθηματικών
Ε.Μ. Πολυτεχνείου
Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Βλάμος Παναγιώτης
Διδάκτωρ Μαθηματικών
Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Κατσούλης Γεώργιος
Μαθηματικός

Μαρκάτης Στυλιανός
Επίκουρος Καθηγητής Τομέα
Μαθηματικών
Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Σίδερης Πολυχρόνης
Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Ιστορικά Σημειώματα:
Βανδουλάκης Ιωάννης
Διδάκτωρ Πανεπιστημίου Μ. Lomonosov Μόσχας
Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Φιλολογική Επιμέλεια:
Δημητρίου Ελένη

Επιλογή εικόνων:
Παπαδοπούλου Μπία

Εικονογράφηση - Σελιδοποίηση:
Αλεξοπούλου Καίτη

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση
των προσαρμογών και
η επιστημονική επιμέλεια
του προσαρμοσμένου βιβλίου
πραγματοποιείται από τη Μονάδα
Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου
Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου
για μαθητές με μειωμένη όραση
από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ
πραγματοποιείται με βάση τις
προδιαγραφές που έχουν
αναπτυχθεί από ειδικούς
εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ
ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αγαπητοί Μαθητές,

το τεύχος που κρατάτε στα χέρια σας περιέχει τις λύσεις των ασκήσεων του σχολικού σας βιβλίου. Αν χρησιμοποιηθεί σωστά μπορεί να αποτελέσει πολύτιμη βοήθεια στην προσπάθειά σας να καταλάβετε τις γεωμετρικές έννοιες που εισάγονται στο βιβλίο σας και να τις χρησιμοποιήσετε δημιουργικά.

Σε καμμία περίπτωση το τεύχος των λύσεων δεν πρέπει να χρησιμοποιείται στην πρώτη δυσκολία που παρουσιάζει μία άσκηση ή για να καλύψει την "επιμέλεια" ενός μαθητή προς τον καθηγητή του στο σχολείο.

Για να χρησιμοποιήσετε σωστά τις λύσεις των ασκήσεων πρέπει να ακολουθήσετε μια συγκεκριμένη μεθοδολογία. Αρχικά, προσπαθήστε να λύσετε την άσκηση με διαφορετικούς τρόπους αντιμετώπισης. Αν αποτύχετε κάντε μία επανάληψη στην αντίστοιχη θεωρία για να διαπιστώσετε ότι δεν έχετε κενά. Κατόπιν, ξαναπροσπαθήστε την άσκηση διαβάζοντας και την υπόδειξη που βρίσκεται στο τέλος του σχολικού βιβλίου. Αν πάλι δυσκολεύεστε να λύσετε την άσκηση, τότε διαβάστε την ολοκληρωμένη λύση της. Φροντίστε να εντοπίσετε τα κύρια βήματα της λύσης, καθώς και τα κενά που σας οδήγησαν στο να μην αντιμετωπίζετε σωστά την άσκηση. Προσπαθήστε να διορθώσετε τα κενά αυτά και να ξαναλύσετε την άσκηση, χωρίς όμως να επαναλαμβάνετε τη λύση με στείρα απομνημόνευση, αλλά υλοποιώντας τα κύρια βήματά της. Τέλος, δοκιμάστε να λύσετε την άσκηση με διαφορετικό και ίσως καλύτερο τρόπο.

Πρέπει να τονισθεί ότι οι λύσεις είναι προτεινόμενες, με την έννοια ότι είναι δυνατόν και ελπίζουμε να βρεθούν κομψότερες από τους μαθητές.

Σημαντική είναι η προσπάθεια που έχει καταβληθεί, ώστε η κάθε άσκηση να προωθεί συγκεκριμένες αντιλήψεις και συνήθειες στο μαθητή, ενώ το σύνολο των ασκήσεων σε κατηγορία και διαβάθμιση οδηγούν τον μαθητή στην καλλιέργεια συγκεκριμένων ικανοτήτων.

Για να επιτευχθούν οι στόχοι αυτοί, είτε μέσα στη λύση της κάθε άσκησης, είτε μετά την ολοκλήρωσή της, αναγράφεται ο διδακτικός της στόχος, ενώ οι ασκήσεις χωρίστηκαν στις παρακάτω κατηγορίες, δίνοντας φυσικά βαρύτητα στη διαβάθμιση των ασκήσεων κάθε κατηγορίας:

1) Ασκήσεις Εμπέδωσης:

Οι ασκήσεις αυτές εισάγονται αμέσως μετά τη Θεωρία και τις Εφαρμογές, με σκοπό την εμπέδωση των εννοιών από τους μαθητές και τη χρήση τους σε απλές ασκήσεις.

2) Αποδεικτικές Ασκήσεις:

Είναι ασκήσεις που ταιριάζουν στη φύση της Γεωμετρίας, καλλιεργώντας την αποδεικτική διαδικασία στους μαθητές.

3) Σύνθετα θέματα:

Είναι θέματα που συνδυάζουν

περισσότερες από μία γεωμετρικές έννοιες ή γνώσεις, είτε από το ίδιο κεφάλαιο, είτε από διαφορετικά, αναδεικνύοντας την κριτική σκέψη και συνδυαστική ικανότητα των μαθητών.

4) Γενικές Ασκήσεις:

Είναι ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας, που παρατίθενται στο τέλος κάθε Κεφαλαίου και απευθύνονται σε μαθητές με ιδιαίτερο ζήλο και αγάπη προς τη Γεωμετρία.

5) Δραστηριότητες:

Είναι αντικείμενο μελέτης ομάδας μαθητών ή και ενός, εφόσον του παρέχεται το κατάλληλο χρονικό διάστημα, ενώ θα πρέπει να δοθεί κάθε δυνατή βοήθεια και υποδείξεις από τον καθηγητή.

Κάθε κεφάλαιο, τέλος, πλαισιώνεται από ερωτήσεις κατανόησης που συντελούν στη σωστή επανάληψη και καλύτερη οργάνωση της ύλης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- **Από τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία το ένα βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων. Για την επίλυση σχετικών ασκήσεων διακρίνουμε περιπτώσεις.**
  (Ασκήσεις: § 2.1-2.10 Αποδεικτικές 3, Σύνθετα 1)

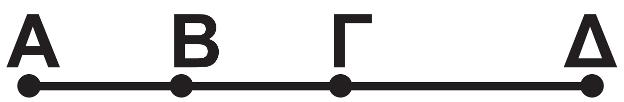
- **Αν δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν κοινό μέσο Ο τότε ΟΑ = ΟΒ και ΟΓ = ΟΔ. Για να αποδείξουμε ότι δυο τμήματα έχουν κοινό μέσο, θεωρούμε το μέσο του ενός και αποδεικνύουμε ότι είναι μέσο και του άλλου τμήματος.**
(**Ασκήσεις:** Γενικές 2)

- **Για να υπολογίσουμε την παραπληρωματική $\hat{\varphi}$ ή την συμπληρωματική $\hat{\theta}$ μιας γωνίας $\hat{\omega}$ θέτουμε:**
$\hat{\varphi} = 180^{\circ} - \hat{\omega}$ **και** $\hat{\theta} = 90^{\circ} - \hat{\omega}$.
(**Ασκήσεις:** § 2.19 Αποδεικτικές 1, 2)

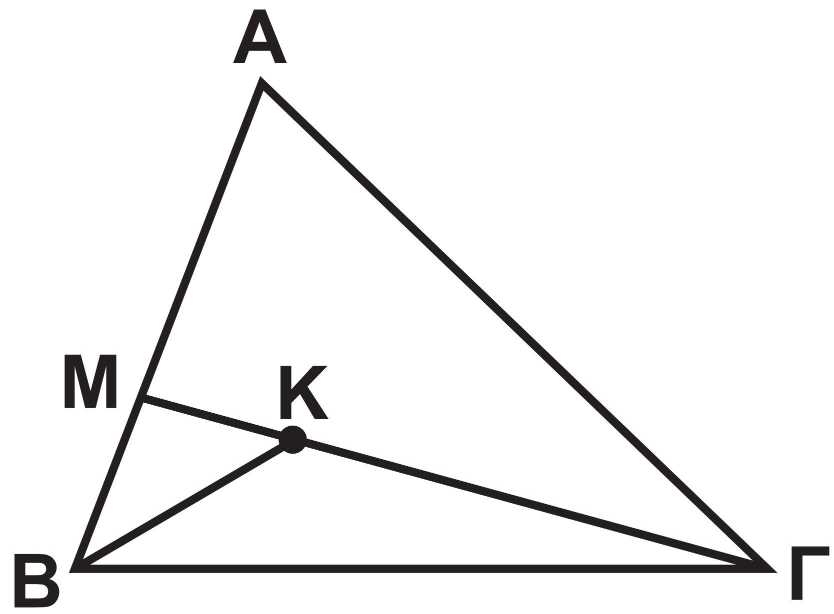
§ 2.1-2.10

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. i) Έξι ευθύγραμμα τμήματα, τα ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ και ΓΔ.

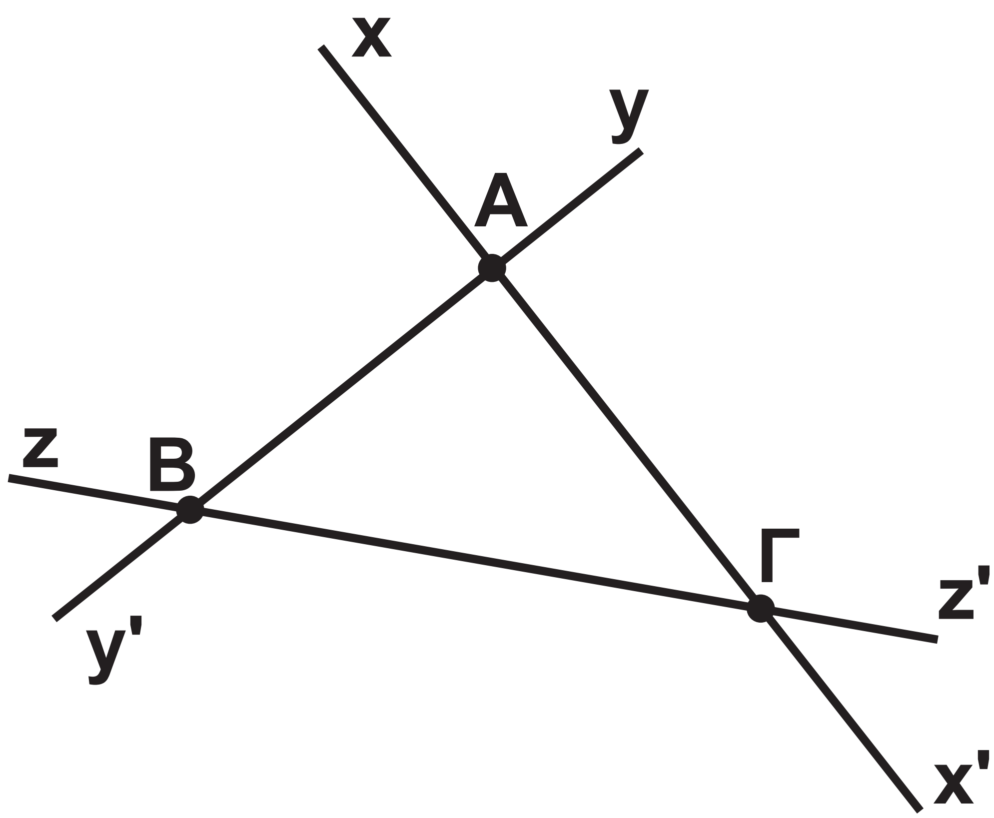


ii) Τα τμήματα που έχουμε στο σχήμα είναι τα ΑΒ, ΑΓ, ΑΜ, ΒΚ, ΒΓ, ΒΜ, ΓΚ, ΓΜ, ΜΚ και το ΑΚ που δεν είναι σχεδιασμένο.

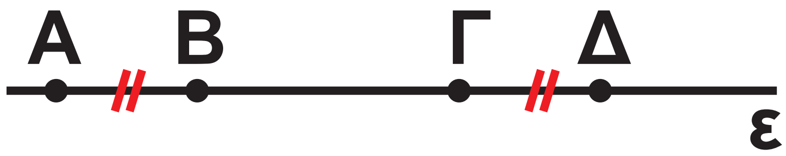


2. **i)** **Τα σημεία τομής είναι τρία, τα Α, Β και Γ.**

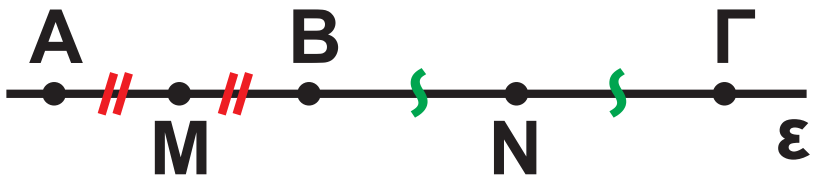
ii) **Ορίζονται τρία ευθύγραμμα τμήματα, τα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, και 12 ημιευθείες, οι εξής: Αx, Αx′, Αy, Αy′, Βy, Βy′, Βz, Βz′, Γx, Γx′, Γz, Γz′.**



3. Είναι $ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ = ΓΔ + ΒΓ = ΒΔ$, αφού $ΑΒ = ΓΔ$.

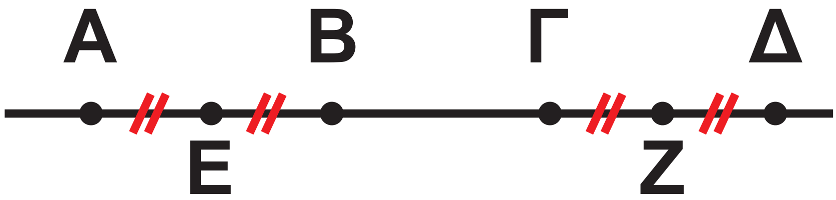


4. $ΑΓ = ΑΜ + ΜΒ + ΒΝ + ΝΓ = 2ΜΒ + 2ΒΝ = 2(ΜΒ + ΒΝ) = 2ΜΝ$, αφού $ΑΜ = ΜΒ$ και $ΒΝ = ΝΓ$.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Έχουμε $ΑΔ = ΑΕ + ΕΖ + ΖΔ$
και $ΒΓ = ΕΖ - ΕΒ - ΓΖ$,
οπότε $ΑΒ + ΒΓ = 2ΕΖ$ ($ΑΕ = ΕΒ$, $ΖΔ = ΓΖ$) $\Leftrightarrow ΕΖ = \dfrac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$.



ii) Έχουμε

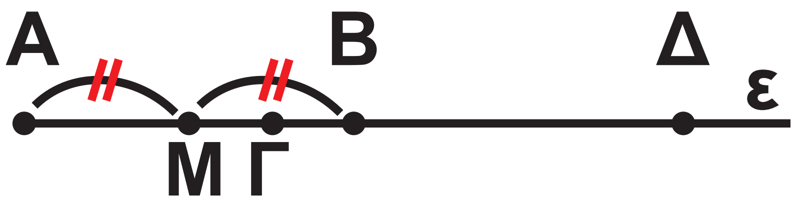
$$ΑΓ + ΒΔ = (ΑΒ + ΒΓ) + ΒΔ =$$
$$= (ΑΒ + ΒΔ) + ΒΓ = ΑΔ + ΒΓ.$$

2. i) Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} ΓΑ = ΓΜ + ΜΑ \\ ΓΒ = ΜΒ - ΓΜ \end{array}\right\} \text{Άρα } ΓΑ - ΓΒ =$$
$$= 2ΓΜ \ (ΜΑ = ΜΒ) \Leftrightarrow ΓΜ = \frac{ΓΑ - ΓΒ}{2}.$$

ii) Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} ΔΑ = ΑΜ + ΔΜ \\ ΔΒ = ΔΜ - ΒΜ \end{array}\right\} \text{Άρα } ΔΑ + ΔΒ =$$
$$= 2ΔΜ \Leftrightarrow ΔΜ = \frac{ΔΑ + ΔΒ}{2}.$$



3. α) i) 

Αν το Γ είναι μεταξύ των Α και Β τότε ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ.

ii) 

Αν το Β είναι μεταξύ των Α και Γ τότε ΑΒ < ΑΓ, οπότε ΑΒ < ΑΓ + ΓΒ.

iii) 

Αν το Α είναι μεταξύ των Β και Γ τότε ΑΒ < ΓΒ, οπότε ΑΒ < ΑΓ + + ΓΒ. Άρα πάντα έχουμε ΑΒ ≤ ΑΓ + ΓΒ .

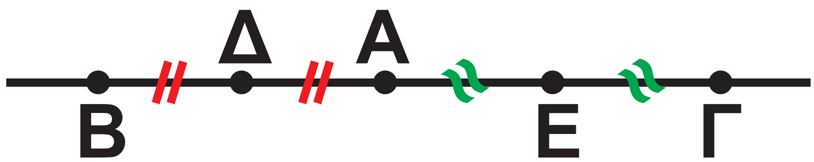
β) Για τα Α, Β, Γ ισχύει ΑΒ ≤ ΑΓ + ΓΒ (1) ενώ για τα Α, Β, Δ ισχύει ΑΔ ≤ ΑΒ + ΒΔ (2).

17 / 7

Από (1), (2) προκύπτει ότι
$ΑΔ \leq ΑΓ + ΓΒ + ΒΔ$.

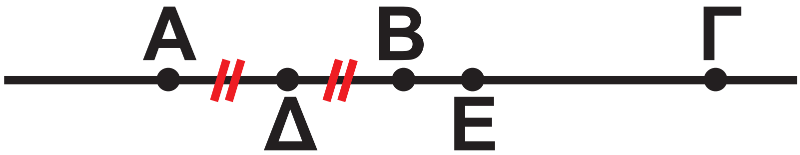
Σύνθετα Θέματα

1. i) Αν το Α είναι μεταξύ των Β και Γ τότε:



$$ΔΕ = ΑΔ + ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΑΓ}{2} =$$

$$= \frac{ΑΒ + ΑΓ}{2} = \frac{ΒΓ}{2}.$$

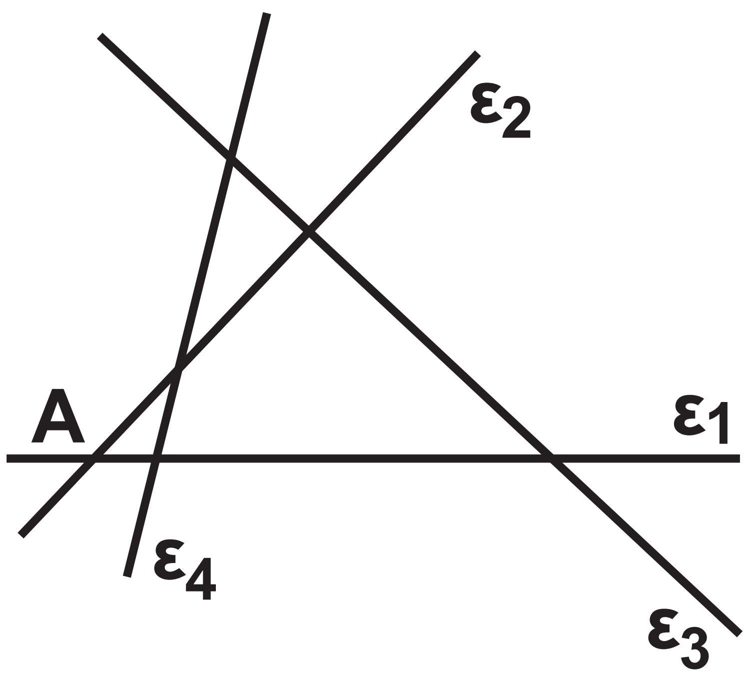
ii) 

Αν το Α είναι στην προέκταση του ΒΓ, π.χ. προς το μέρος του Β, τότε:

$$ΔΕ = ΑΕ - ΑΔ = \frac{ΑΓ}{2} - \frac{ΑΒ}{2} =$$

$$= \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} \,.$$

2. Αν παραστήσουμε με $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ και $ε_4$ τις τέσσερις ευθείες οδούς αρκεί να βρούμε πόσα είναι τα σημεία τομής των ευθειών αυτών. Σε κάθε μια ευθεία, π.χ. την $ε_1$, οι άλλες (4 − 1) = 3 ευθείες ορίζουν (4 − 1) = 3 σημεία. Άρα συνολικά θα ορίζονταν 4 (4 − 1) = 12 σημεία. Αλλά κάθε σημείο το υπολογίσαμε 2 φορές, π.χ. το Α ως σημείο της $ε_1$ και της $ε_2$.



Άρα τελικά ορίζονται $\frac{4(4-1)}{2} = \frac{12}{2} = 6$ σημεία.

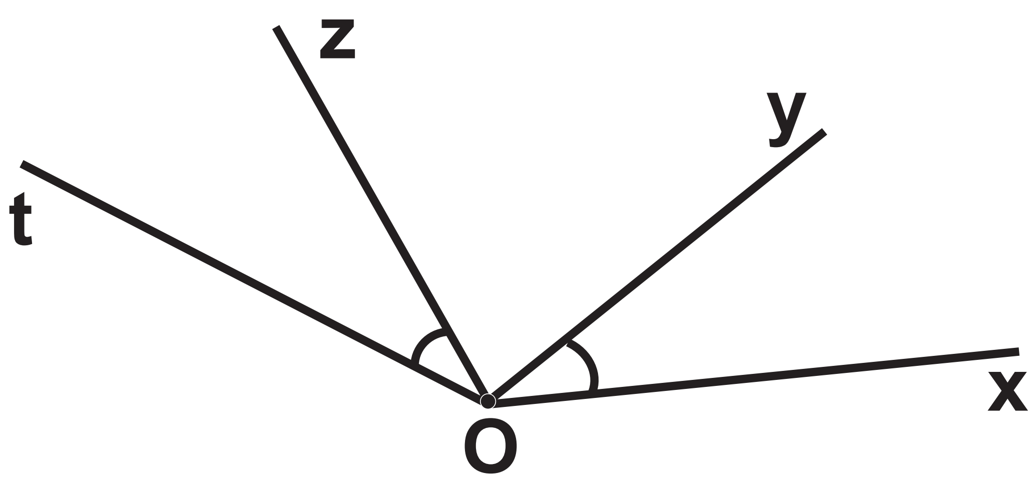
Επομένως χρειάζονται 6 τροχονόμοι.

Όμοια οι ν ευθείες ορίζουν $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ σημεία.

§ 2.11-2.16

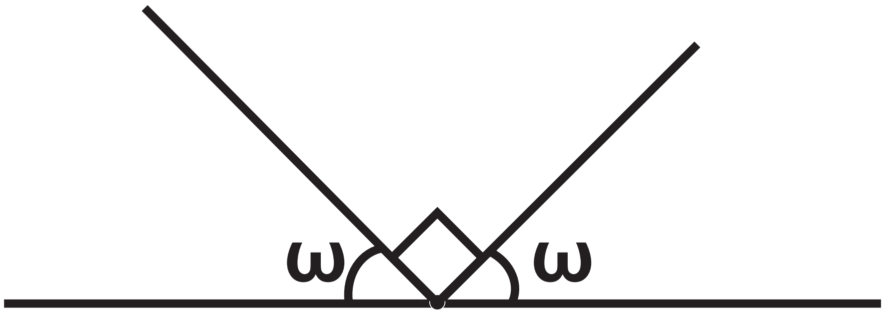
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Έχουμε $x\hat{O}z = y\hat{O}t$ ή
   $x\hat{O}y + y\hat{O}z = y\hat{O}z + z\hat{O}t$.
   Άρα $x\hat{O}y = z\hat{O}t$.



2. Είναι $\hat{\omega} + 1$ ορθή $+ \hat{\omega} = 2$ ορθές,

οπότε $2\hat{\omega} = 1$ορθή ή $\hat{\omega} = \frac{1}{2}$ ορθής.



3. Όταν το ρολόι δείχνει εννέα η ώρα ακριβώς οι δείκτες σχηματίζουν ορθή γωνία. Οι δείκτες θα σχηματίζουν και πάλι ορθή γωνία μετά από 6 ώρες. Τότε το ρολόι δείχνει τρεις η ώρα ακριβώς.

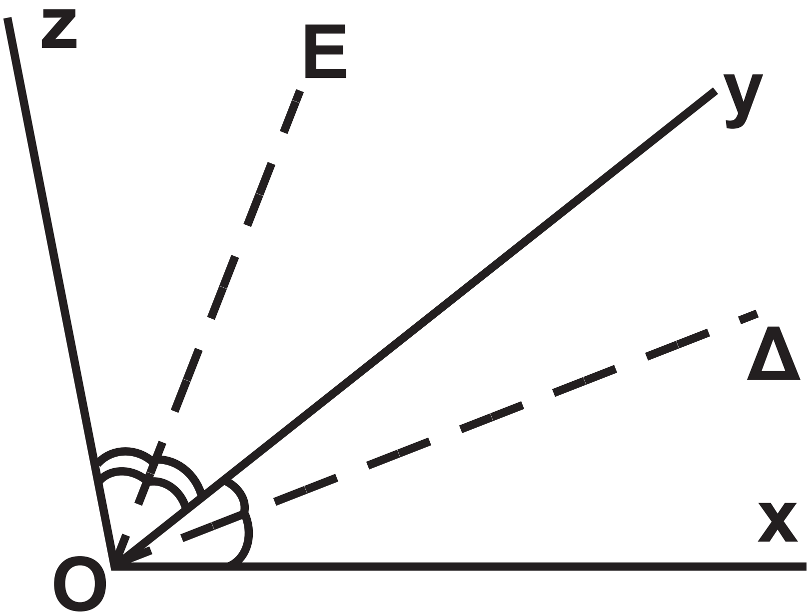
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω $x\hat{O}y, y\hat{O}z$ δύο εφεξής γωνίες και ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι τους αντίστοιχα.

Τότε

$$\Delta\hat{O}E = \Delta\hat{O}y + y\hat{O}E = \frac{x\hat{O}y}{2} + \frac{y\hat{O}z}{2}.$$

Άρα $\Delta\hat{O}E = \dfrac{x\hat{O}y + y\hat{O}z}{2}$.

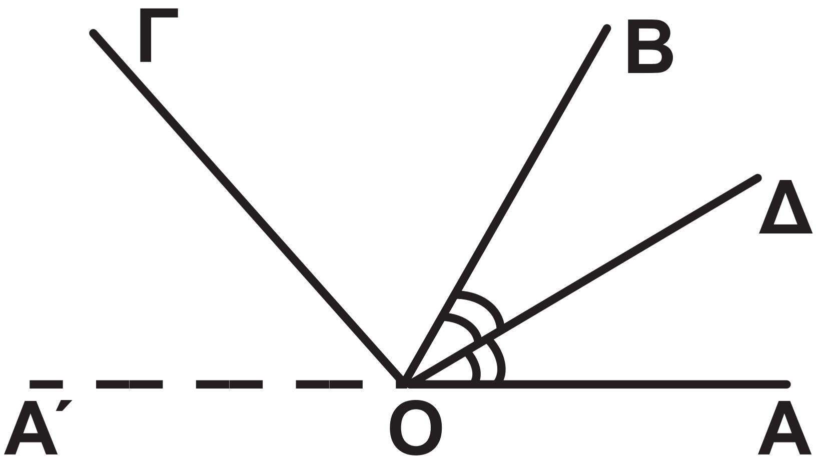


2. Έχουμε: $\left.\begin{aligned} \Gamma\hat{O}A &= \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}A \\ \Gamma\hat{O}B &= \Gamma\hat{O}\Delta - \Delta\hat{O}B \end{aligned}\right\}$

Άρα

$$\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B = 2\Gamma\hat{O}\Delta \quad (\Delta\hat{O}A = \Delta\hat{O}B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B}{2}.$$

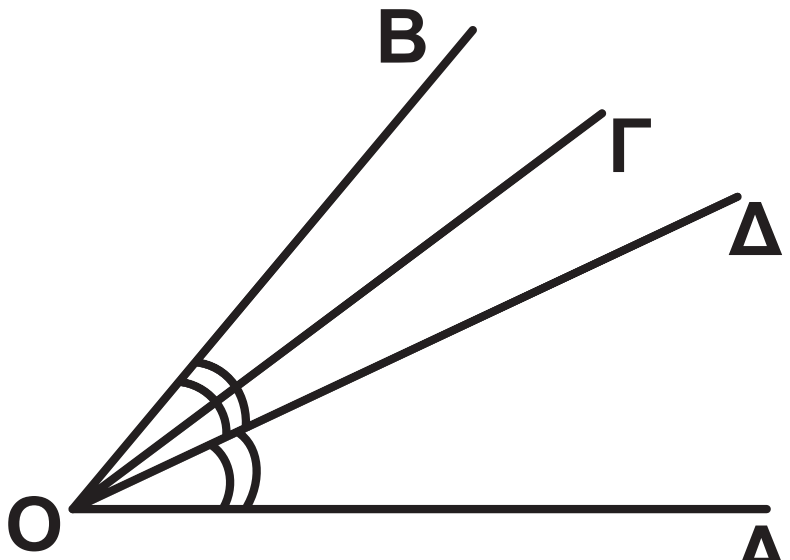


3. Έχουμε: $\left.\begin{array}{l} \Gamma\hat{O}A = \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}A \\ \Gamma\hat{O}B = \Delta\hat{O}B - \Gamma\hat{O}\Delta \end{array}\right\}$

Άρα

$$\Gamma\hat{O}A - \Gamma\hat{O}B = 2\Gamma\hat{O}\Delta \quad (\Delta\hat{O}A = \Delta\hat{O}B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A - \Gamma\hat{O}B}{2}$$



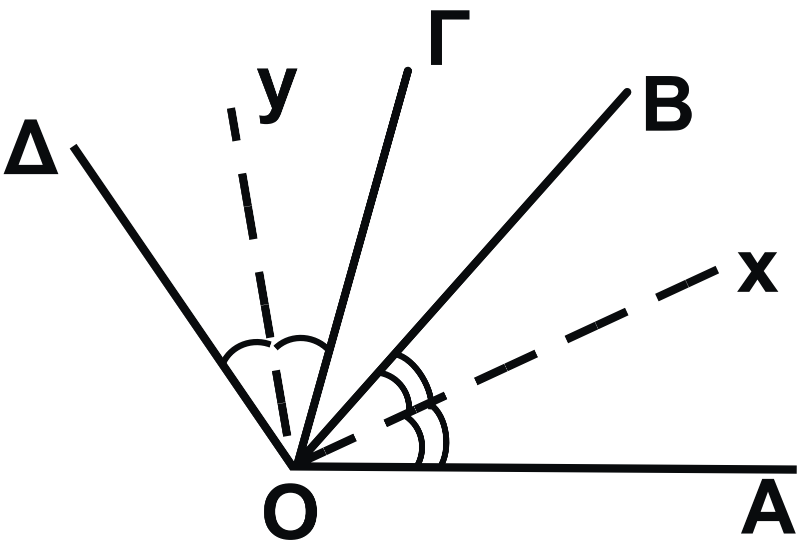
Σύνθετα Θέματα

1. Έχουμε: $\left.\begin{array}{l} A\hat{O}\Delta = A\hat{O}x + x\hat{O}y + y\hat{O}\Delta \\ B\hat{O}\Gamma = x\hat{O}y - B\hat{O}x - \Gamma\hat{O}y \end{array}\right\}$

Άρα $A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma = 2x\hat{O}y$

(γιατί $A\hat{O}x = B\hat{O}x$, $y\hat{O}\Delta = \Gamma\hat{O}y$)

$\Leftrightarrow x\hat{O}y = \dfrac{A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma}{2}$.

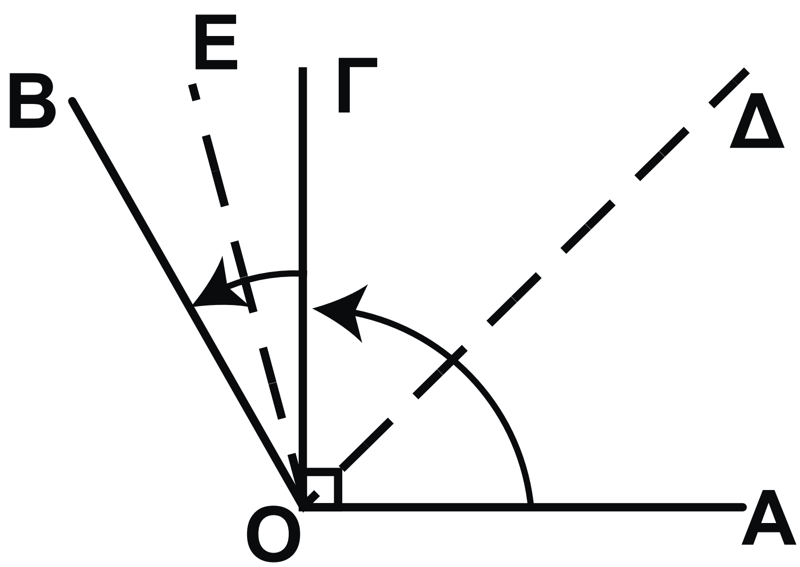


2. Έχουμε:

$$\Delta\hat{O}E = B\hat{O}\Delta - B\hat{O}E =$$

$$= \frac{A\hat{O}B}{2} - \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{A\hat{O}B - B\hat{O}\Gamma}{2} =$$

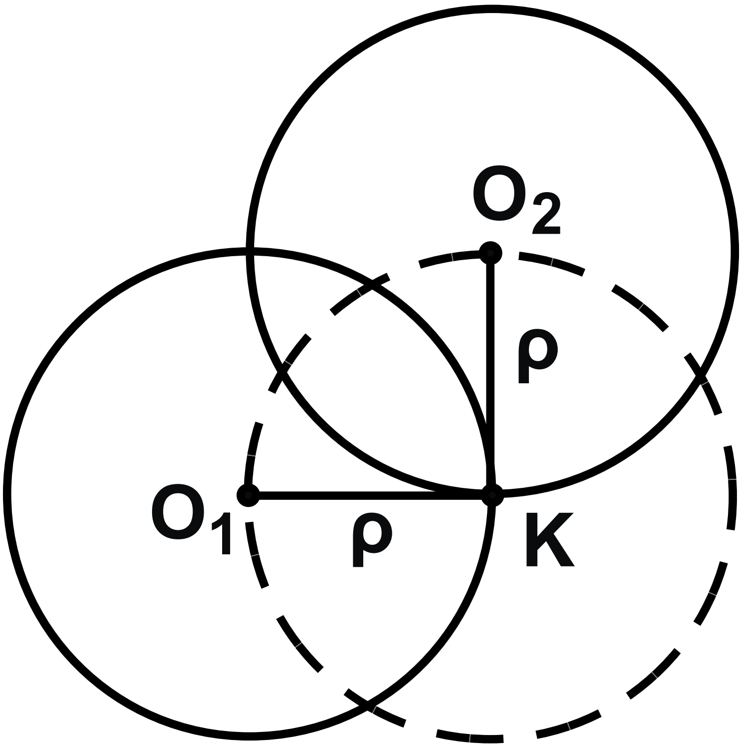
$$= \frac{A\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{1}{2}L \quad (O\Gamma \perp OA)$$



§ 2.17-2.18

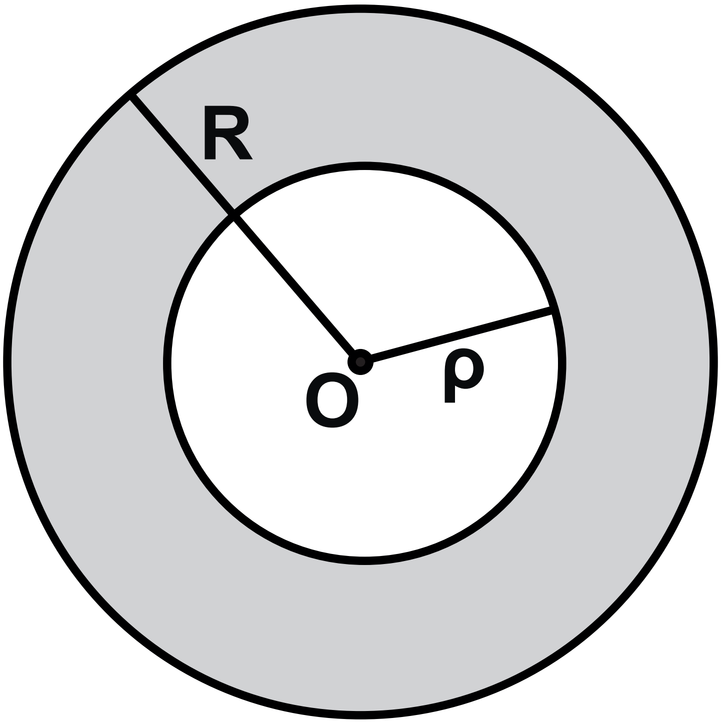
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Υπάρχουν άπειροι κύκλοι ακτίνας ρ που διέρχονται από το Κ. Τα κέντρα τους βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ρ.



2. Τα σημεία που είναι εσωτερικά του κύκλου (Ο, R) και εξωτερικά

του κύκλου (Ο, ρ) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Επειδή η ε διέρχεται από το κοινό κέντρο Ο των κύκλων τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι διάμετροι αυτών με κοινό μέσον το Ο και επομένως έχουμε:
ΑΟ = ΟΔ και ΒΟ = ΟΓ.

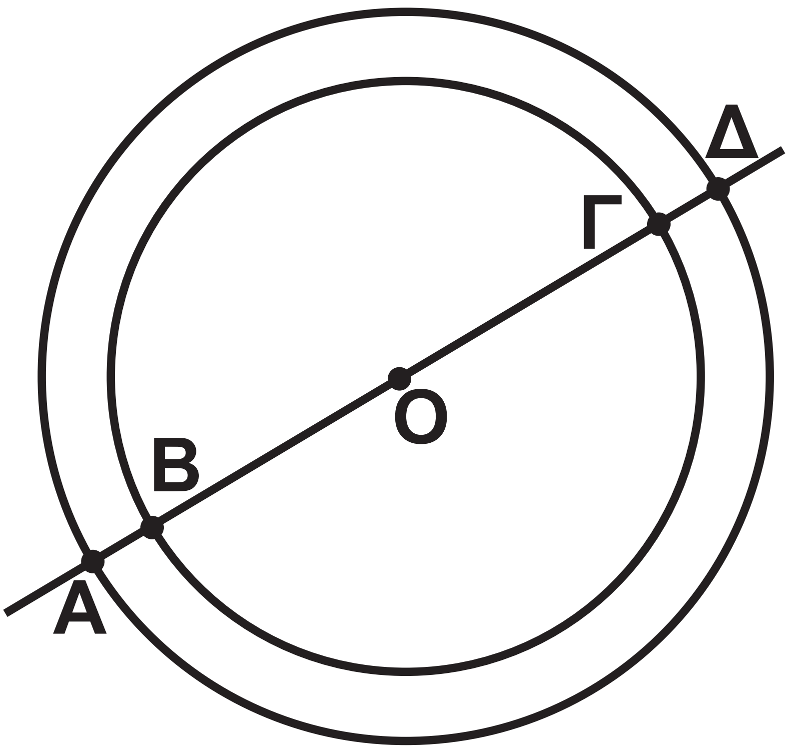
Με αφαίρεση αυτών κατά μέλη προκύπτει:

$AO - BO = O\Delta - O\Gamma \Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta$,

σύμφωνα με το σχήμα. Επίσης έχουμε:

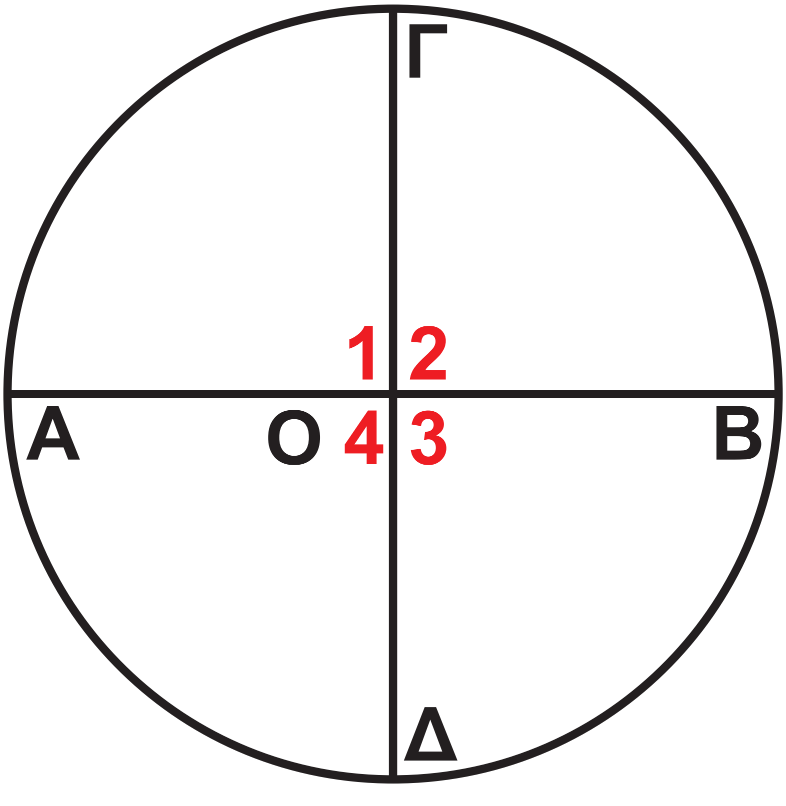
$AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow AB + B\Gamma = B\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A\Gamma = B\Delta$



2. Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο διάμετροι ενός κύκλου (Ο, R) τέτοιες ώστε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Τότε η ΟΓ είναι διχοτόμος

της ευθείας γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$, επομένως κάθε μια από τις $\hat{\mathrm{O}}_1$, $\hat{\mathrm{O}}_2$ είναι ορθή γωνία. Η $\hat{\mathrm{O}}_3$, ως κατακορυφήν της $\hat{\mathrm{O}}_1$, είναι κι αυτή ορθή. Όμοια και η $\hat{\mathrm{O}}_4$. Έτσι οι επίκεντρες γωνίες $\hat{\mathrm{O}}_1$, $\hat{\mathrm{O}}_2$, $\hat{\mathrm{O}}_3$ και $\hat{\mathrm{O}}_4$ είναι ίσες, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα αυτών είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\mathrm{B}} = \overset{\frown}{\mathrm{B}\Delta} = \overset{\frown}{\Delta\mathrm{A}}$ και επειδή τα τόξα αυτά αποτελούν ολόκληρο τον κύκλο προκύπτει το ζητούμενο.

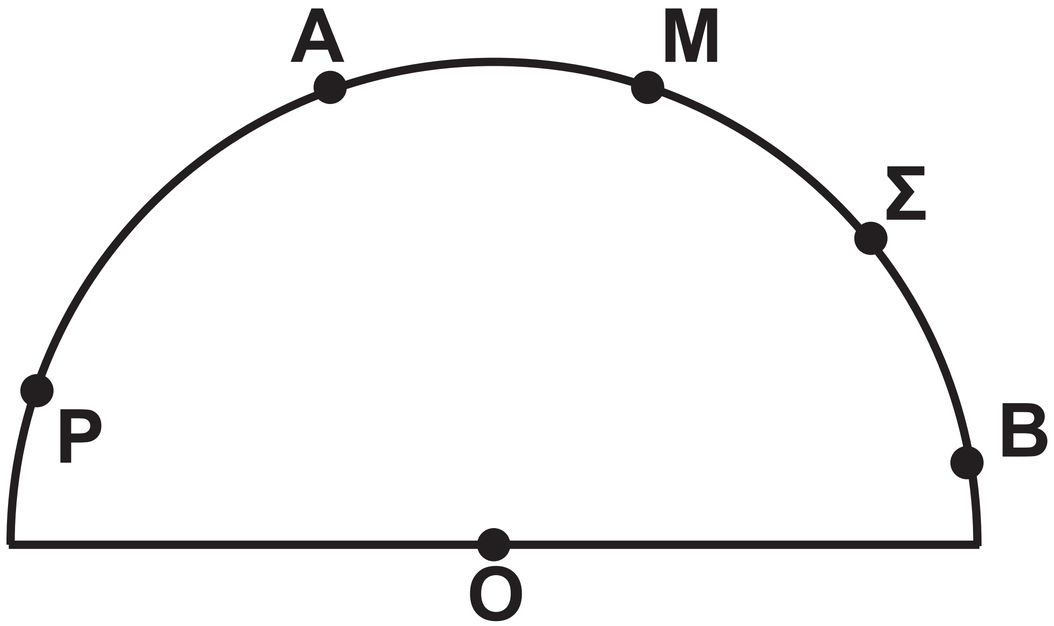


29 / 10

§ 2.19

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Έστω ημικύκλιο κέντρου Ο, δύο σημεία Α, Β αυτού και το σημείο Μ του $\overset{\frown}{AB}$ ώστε $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$.



i) Για σημείο Ρ του ημικυκλίου, που δεν ανήκει στο $\overset{\frown}{AB}$ έχουμε: $\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{PM} - \overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{PM} + \overset{\frown}{MB}$. Με πρόσθεση αυτών κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη

ότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ προκύπτει

$$\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB} = 2\overset{\frown}{PM} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overset{\frown}{PM} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB}).$$

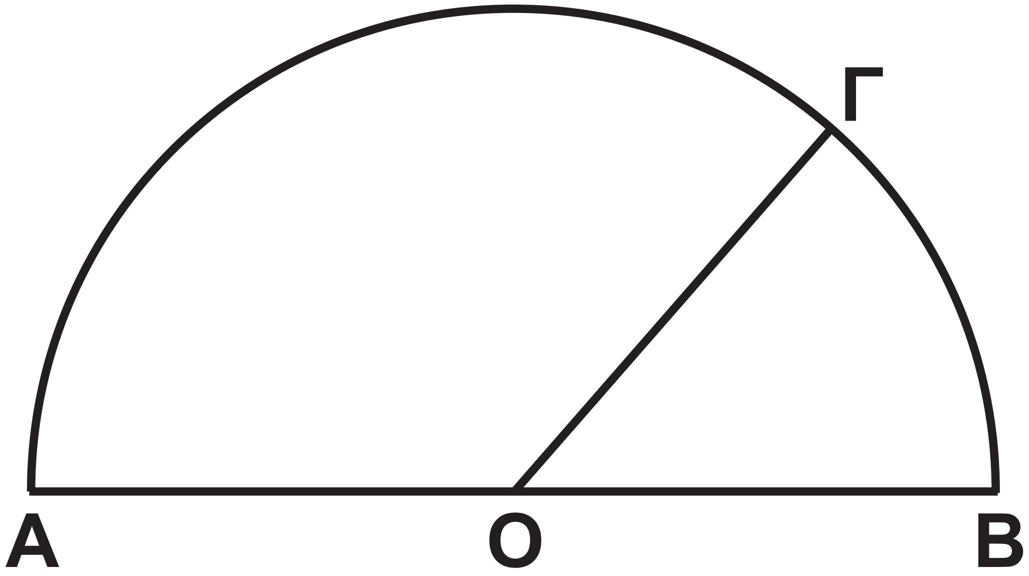
ii) Έστω σημείο Σ του τόξου $\overset{\frown}{MB}$. Έχουμε (βλέπε σχήμα) $\overset{\frown}{\Sigma A} = \overset{\frown}{\Sigma M} + \overset{\frown}{MA}$ και $\overset{\frown}{\Sigma B} = \overset{\frown}{MB} - \overset{\frown}{\Sigma M}$. Με αφαίρεση αυτών κατά μέλη, λαμβάνοντας πάλι υπόψη ότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ προκύπτει:

$$\overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{\Sigma B} = 2\overset{\frown}{\Sigma M} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overset{\frown}{\Sigma M} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{\Sigma B}).$$

2. α) Είναι $\overset{\frown}{A\Gamma} - \overset{\frown}{\Gamma B} = 80^\circ$ και $\overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma B} = 180^\circ$, από τις οποίες με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε αντίστοιχα

$\overset{\frown}{ΑΓ} = 130^\circ$ και $\overset{\frown}{ΓΒ} = 50^\circ$, οπότε και $(\overset{\frown}{ΑΓ}) = 130^\circ, (\overset{\frown}{ΓΒ}) = 50^\circ$.



β) Η $Α\hat{Ο}Γ$ είναι επίκεντρη και βαίνει στο $\overset{\frown}{ΑΓ}$, άρα $(Α\hat{Ο}Γ) = (\overset{\frown}{ΑΓ}) = 130^\circ$. Όμοια $(Β\hat{Ο}Γ) = 50^\circ$.

3. Έστω $\hat{ω}$ και $\hat{φ}$ δύο συμπληρωματικές γωνίες με $\hat{ω} = 2\hat{φ}$. Πρέπει $\hat{ω} + \hat{φ} = 90^\circ$ ή $2\hat{φ} + \hat{φ} = 90^\circ$ ή $3\hat{φ} = 90^\circ$. Άρα $\hat{φ} = 30^\circ$, οπότε $\hat{ω} = 60^\circ$.

4. Είναι $\hat{\omega} = \frac{6}{5}$ ορθής $= \frac{6}{5} \cdot 90^\circ = 108^\circ$.
Άρα η παραπληρωματική της $\hat{\omega}$ είναι $\hat{\varphi} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. Η γωνία $\hat{\omega}$ δεν έχει συμπληρωματική, αφού είναι αμβλεία γωνία.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω $\hat{\varphi}$ η παραπληρωματική της $\hat{\omega}$ και $\hat{\theta}$ η συμπληρωματική της. Τότε $\hat{\varphi} = 180^\circ - \hat{\omega}$, $\hat{\theta} = 90^\circ - \hat{\omega}$ και $\hat{\varphi} = 3\hat{\theta}$. Άρα $180^\circ - \hat{\omega} = 3(90^\circ - \hat{\omega})$ ή $180^\circ - \hat{\omega} = 270^\circ - 3\hat{\omega}$ ή $2\hat{\omega} = 90^\circ$.
Άρα $\hat{\omega} = 45^\circ$.

2. Έστω $\hat{\omega}$ η συμπληρωματική της $\hat{\varphi}$.
Τότε $\hat{\varphi} = 90^\circ - \hat{\omega}$ και $\hat{\varphi} = \hat{\omega} - 20^\circ$.
Άρα $90^\circ - \hat{\omega} = \hat{\omega} - 20^\circ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\hat{\omega} = 110^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 55^\circ$.

Άρα $\hat{\omega} = 55^\circ$ και $\hat{\varphi} = 35^\circ$.

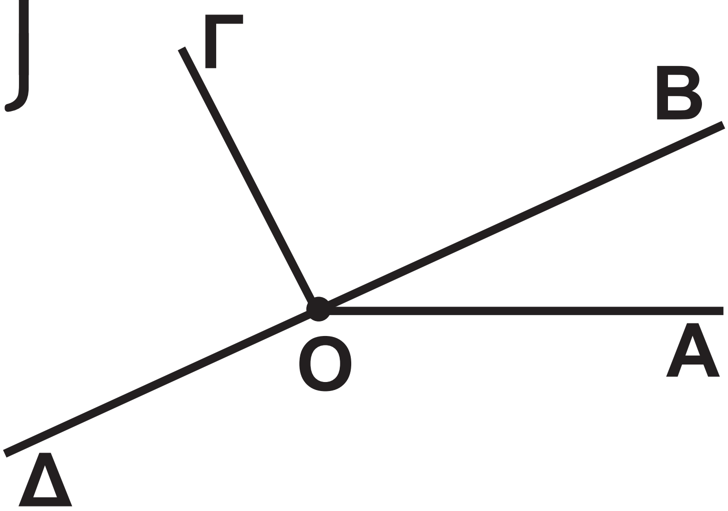
3. Έχουμε $\dfrac{A\hat{O}B}{1} = \dfrac{B\hat{O}\Gamma}{2} =$

$= \dfrac{\Gamma\hat{O}\Delta}{3} = \dfrac{\Delta\hat{O}A}{4}$. Θέτουμε

$$\frac{A\hat{O}B}{1} = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{\Gamma\hat{O}\Delta}{3} = \frac{\Delta\hat{O}A}{4} = \lambda,$$

οπότε

$$\left.\begin{aligned} A\hat{O}B &= \lambda \\ B\hat{O}\Gamma &= 2\lambda \\ \Gamma\hat{O}\Delta &= 3\lambda \\ \Delta\hat{O}A &= 4\lambda \end{aligned}\right\}$$ Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι



$A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}A = 10\lambda \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 360^\circ = 10\lambda.$
Άρα $\lambda = 36^\circ$. Επομένως
$A\hat{O}B = 36^\circ$, $B\hat{O}\Gamma = 2(36^\circ) = 72^\circ$,
$\Gamma\hat{O}\Delta = 3(36^\circ) = 108^\circ$ και
$\Delta\hat{O}A = 4(36^\circ) = 144^\circ$.

Γενικές Ασκήσεις

1. Έστω Ο το μέσο του ΑΒ.

Τότε ΕΖ = ΟΖ − ΟΕ (1)
Αλλά

$$OZ = OB + BZ = \frac{AB}{2} + \frac{B\Delta}{2} =$$

$$= \frac{AB + B\Delta}{2} = \frac{A\Delta}{2} \ (2) \text{ και}$$

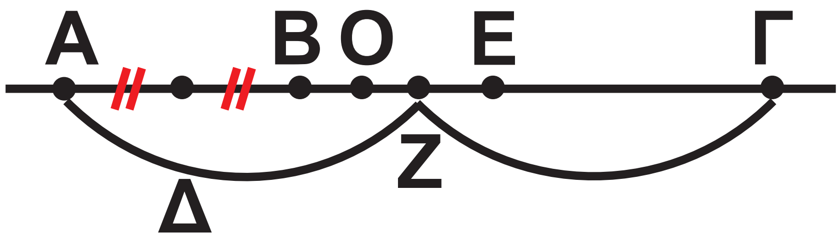
$$OE = AE - AO = \frac{AΓ}{2} - \frac{AB}{2} =$$

$$= \frac{AΓ - AB}{2} = \frac{BΓ}{2} \quad (3)$$

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι

$$EZ = \frac{AΔ - BΓ}{2}.$$

2. Έστω O το μέσο του BZ. Τότε OB = OZ.



Για να είναι το O μέσο και του ΔE αρκεί ΔB = ZE (αφού OB = OZ).

Πράγματι

$$ZE = Z\Gamma - E\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} - \frac{B\Gamma}{2} =$$

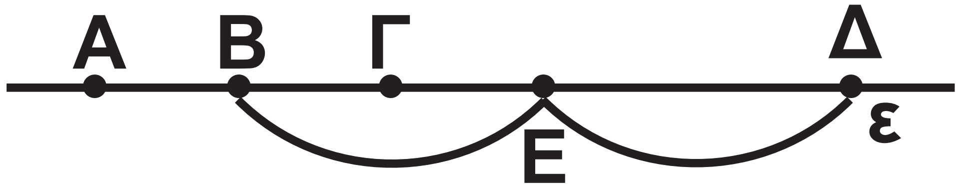
$$= \frac{A\Gamma - B\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = \Delta B.$$

3. Έχουμε: $AE = AB + BE =$

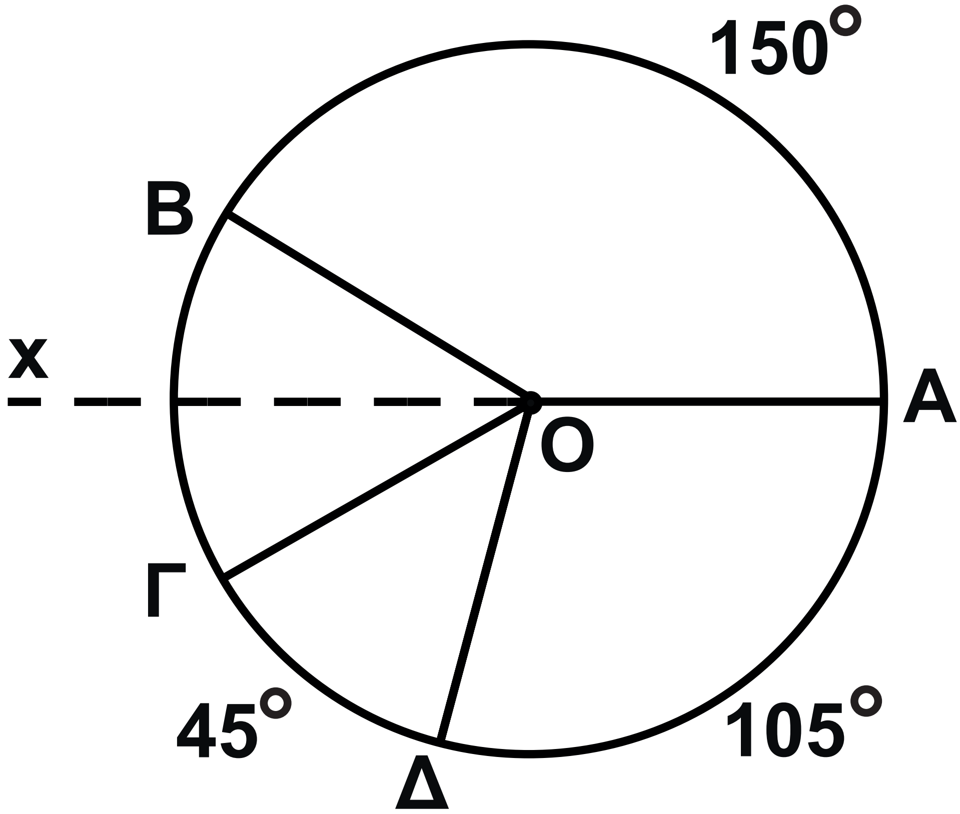
$$= AB + \frac{B\Delta}{2} = \frac{2AB + B\Delta}{2} =$$

$$= \frac{2AB + B\Gamma + \Gamma\Delta}{2} = \frac{AB + B\Gamma}{2} +$$

$$+ \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Gamma}{2} + \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} > \frac{A\Gamma}{2}.$$



4. Έχουμε $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{\Delta A} = 360^\circ$, οπότε
$\overset{\frown}{B\Gamma} = 360^\circ - 150^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ.$



Άρα οι επίκεντρες γωνίες είναι:
$A\hat{O}B = 150^\circ$ και $B\hat{O}\Gamma = 60^\circ$.
Επομένως

$$A\hat{O}B + B\hat{O}x = A\hat{O}B + \frac{B\hat{O}\Gamma}{2}$$

$$(\text{Ox διχοτόμος } B\hat{O}\Gamma) = 150^\circ + \frac{60^\circ}{2} \text{ ή}$$

$A\hat{O}B + B\hat{O}x = 180^\circ$, δηλαδή ΟΑ, Οx αντικείμενες ημιευθείες.

5. Αφού $\overset{\frown}{AB}$ ημικύκλιο και Μ μέσο $\overset{\frown}{AB}$, είναι $\overset{\frown}{AM} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

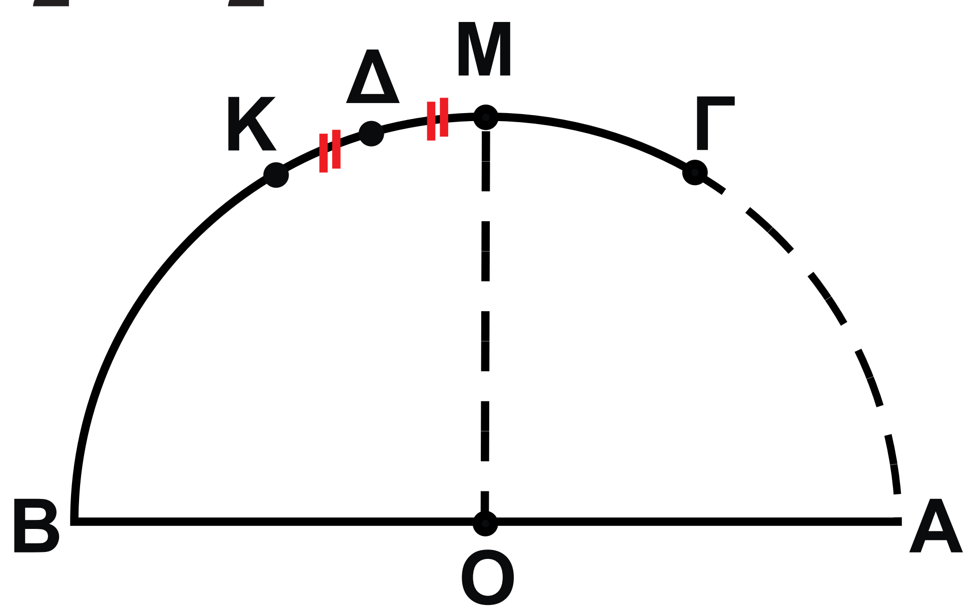
Άρα

$$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{A\Delta} - \overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{M\Delta} - \overset{\frown}{A\Gamma} =$$

$$= \overset{\frown}{AM} + \frac{\overset{\frown}{MK}}{2} - \frac{\overset{\frown}{AK}}{2} =$$

$$= \overset{\frown}{AM} - \left(\frac{\overset{\frown}{AK}}{2} - \frac{\overset{\frown}{MK}}{2}\right) = \overset{\frown}{AM} - \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} =$$

$$= \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- **Ένα σημείο ανήκει στη μεσοκάθετο ενός τμήματος αν ισαπέχει από τα άκρα του. Αντίστοιχα ένα εσωτερικό σημείο γωνίας ανήκει στη διχοτόμο της αν ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας. (Ασκήσεις: § 3.4 Σύνθετα 2)**

- **Αν δύο σημεία μιας ευθείας ε ισαπέχουν από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος η ευθεία ε είναι μεσοκάθετος του τμήματος.**
(**Ασκήσεις:** § 3.12 Εμπέδωσης 2)

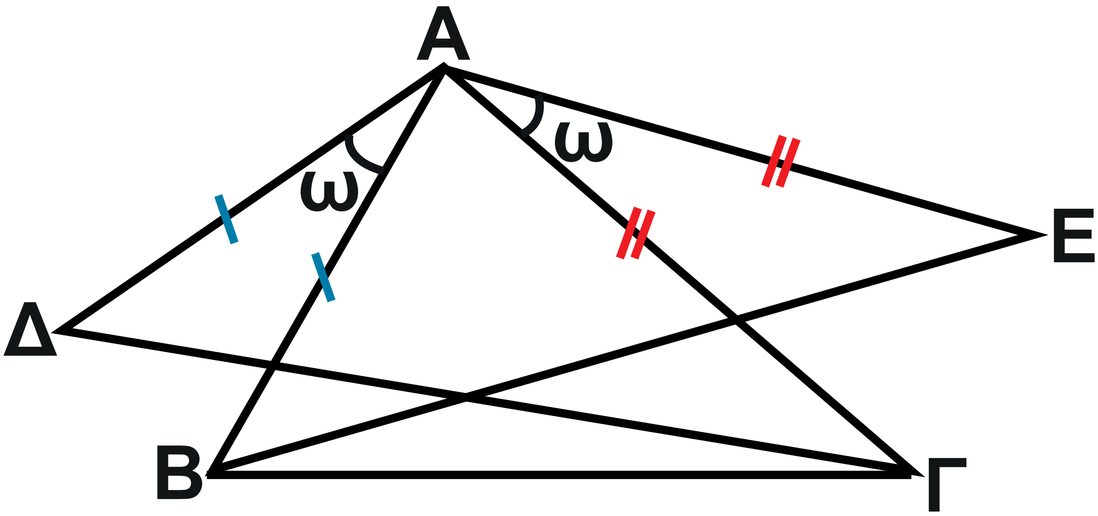
- **Σε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες, οπότε και οι αντίστοιχες εξωτερικές γωνίες του τριγώνου είναι ίσες (παραπληρώματα ίσων γωνιών).**
(**Ασκήσεις:** § 3.4 Σύνθετα 3 και § 3.12 Εμπέδωσης 8)

- **Για να συγκριθούν ανισοτικά δύο τρίγωνα πρέπει να έχουν απαραίτητα δυο πλευρές ίσες.**
(**Ασκήσεις:** § 3.12 Αποδεικτικές 2, 7)

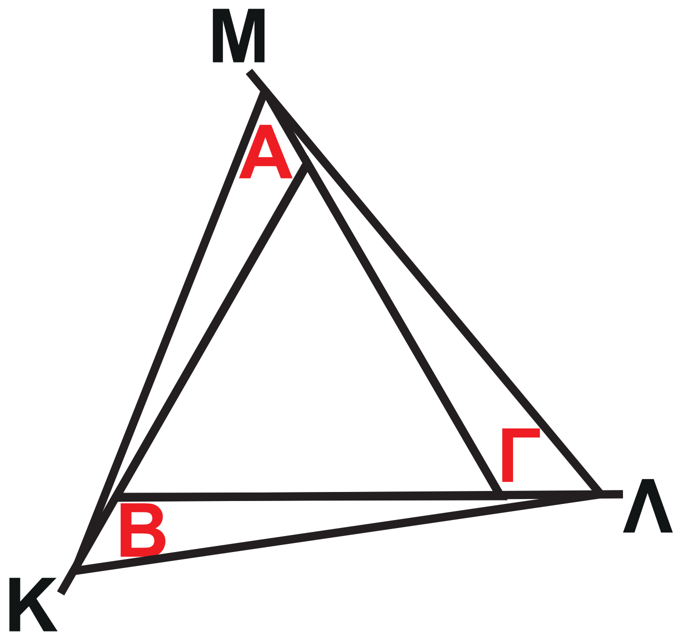
- **Όταν η διάμεσος είναι βασικό στοιχείο σε μια άσκηση, συχνά χρειάζεται να την προεκτείνουμε. (Ασκήσεις: § 3.12 Αποδεικτικές 3 και Γενικές 7)**

§ 3.1-3.2

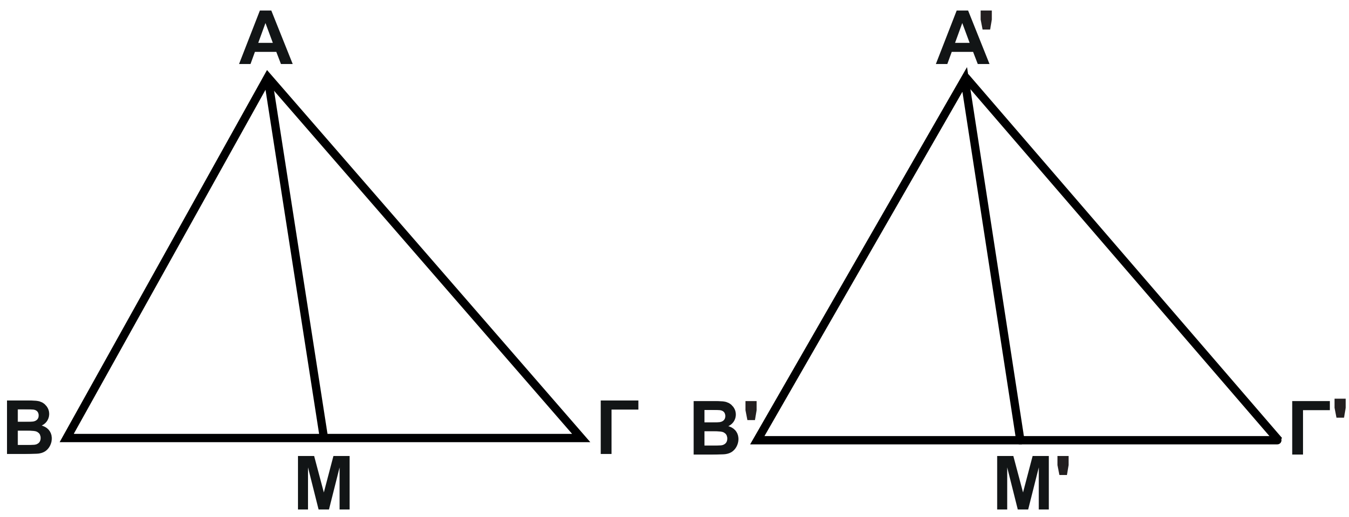
1. Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}E$ και $A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ είναι ίσα. (Π-Γ-Π). ($AB = A\Delta$, $A\Gamma = AE$, $B\hat{A}E = \Gamma\hat{A}\Delta$). Άρα $BE = \Gamma\Delta$.



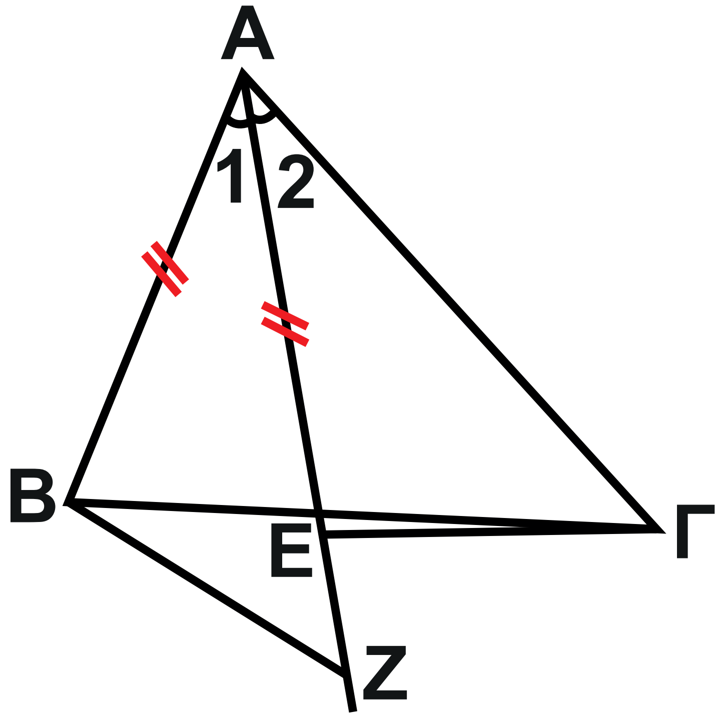
2. Τα τρίγωνα $K\overset{\triangle}{B}\Lambda$, $\Gamma\overset{\triangle}{\Lambda}M$, $M\overset{\triangle}{A}K$ είναι ίσα. (Π-Γ-Π)
($BK = \Gamma\Lambda = AM$, $B\Lambda = \Gamma M = AK$ ως άθροισμα ίσων τμημάτων και $K\hat{B}\Lambda = \Lambda\hat{\Gamma}M = M\hat{A}K$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών). Άρα $K\Lambda = \Lambda M = MK$.



3. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{ΑΜΓ}}$ και $\overset{\triangle}{\text{Α'Μ'Γ'}}$ είναι ίσα (Π-Γ-Π)
(ΑΒ = Α'Β', $\hat{B} = \hat{B}'$ και ΒΜ = Β'Μ' ως μισά ίσων πλευρών).
Άρα ΑΜ = Α'Μ'.



4. Τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{E}}\Gamma$ και $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\mathrm{Z}$ είναι ίσα, αφού $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2$, ΑΒ = ΑΕ και ΑΖ = ΑΓ (Π-Γ-Π).
Άρα $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$.



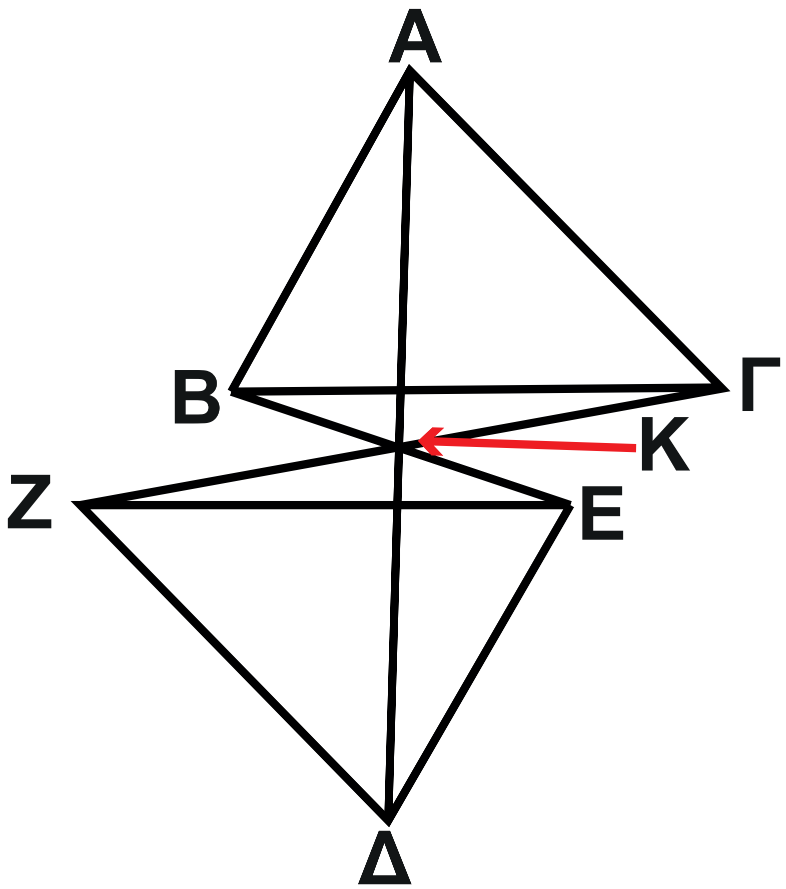
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Τα τρίγωνα $\Delta\overset{\triangle}{\mathrm{K}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{B}\overset{\triangle}{\mathrm{K}}\mathrm{A}$ είναι ίσα αφού ΑΚ = ΚΔ, ΒΚ = ΚΕ και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E}$ ως κατακορυφήν.

Άρα $E\hat{\Delta}K = B\hat{A}K$ (1)

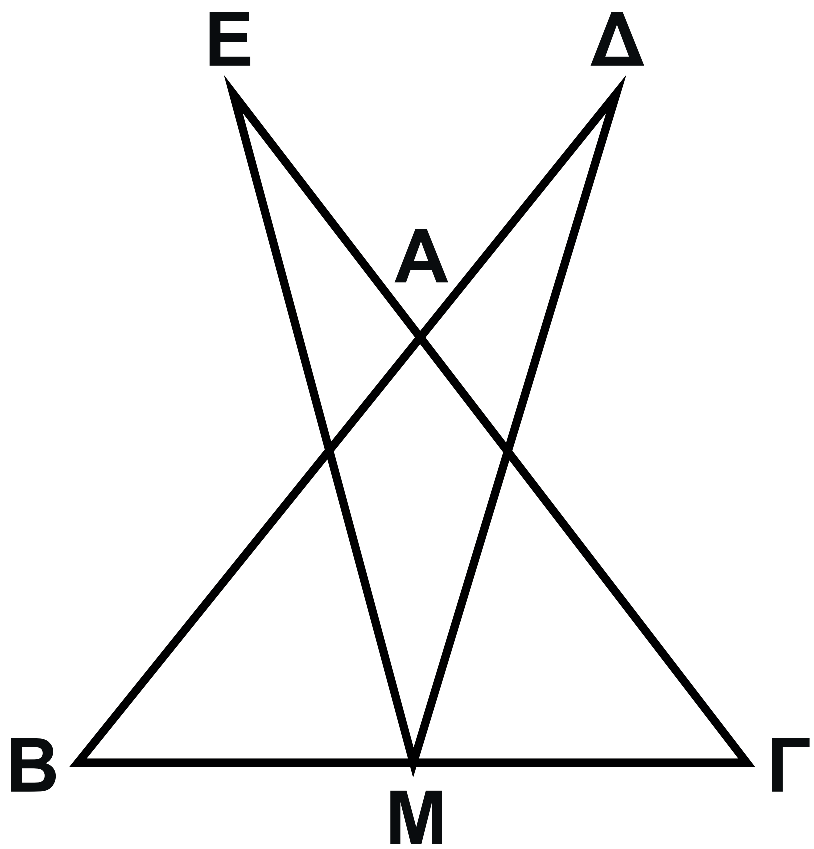
Όμοια τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{K}\Gamma$ και $Z\overset{\triangle}{K}\Delta$ είναι ίσα, οπότε $Z\hat{\Delta}K = \Gamma\hat{A}K$. (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι $E\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\Gamma$.

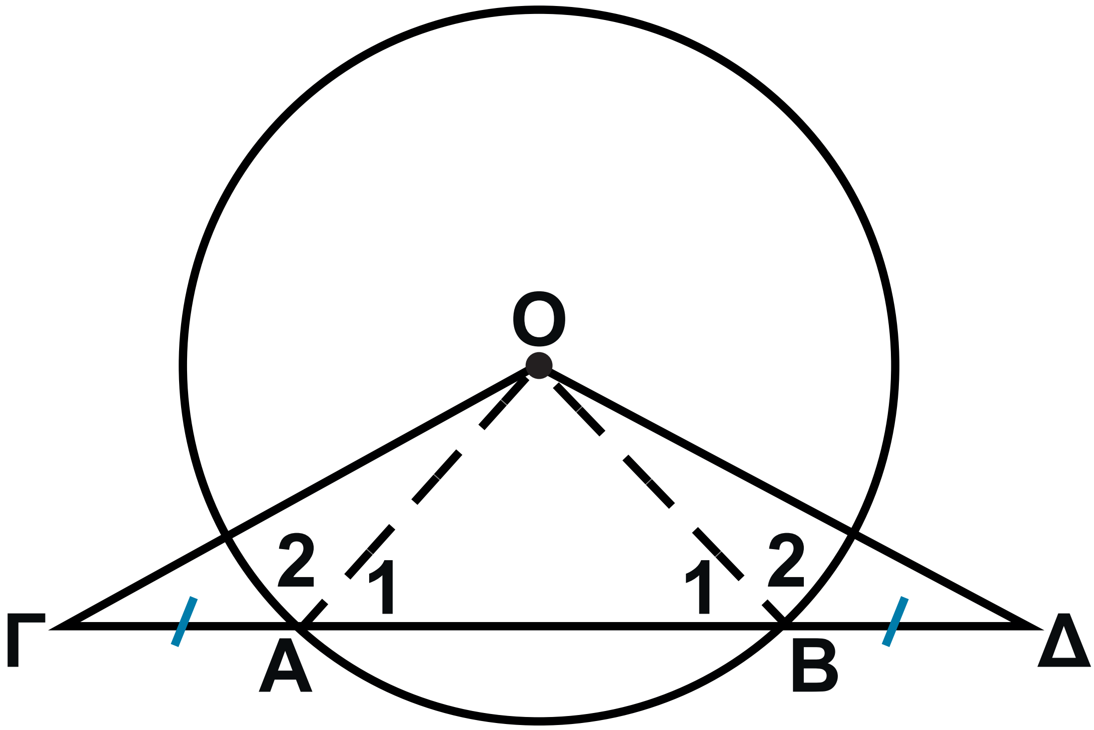


2. Τα τρίγωνα $M\overset{\triangle}{\Delta}B$ και $M\overset{\triangle}{E}\Gamma$ είναι ίσα. (Π-Γ-Π) (ΒΜ = ΜΓ, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ αφού ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ = ΓΕ ως άθροισμα

ίσων τμημάτων).
Άρα ΜΔ = ΜΕ.



3. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΟΑΒ}}$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και επομένως $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών. Έτσι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{ΟΑΓ}}$ και $\overset{\triangle}{\text{ΟΒΔ}}$ είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\text{Ο}\hat{\Gamma}\text{Α} = \text{Ο}\hat{\text{Α}}\text{Β}$.



Σχόλιο:

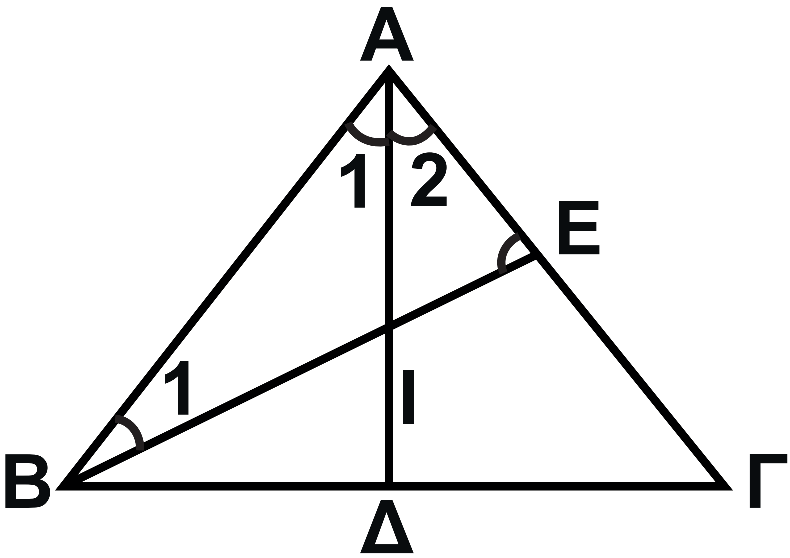
Στις παραπάνω ασκήσεις χρησιμοποιούμε ισότητες τριγώνων για να αποδείξουμε ισότητες τμημάτων ή γωνιών.

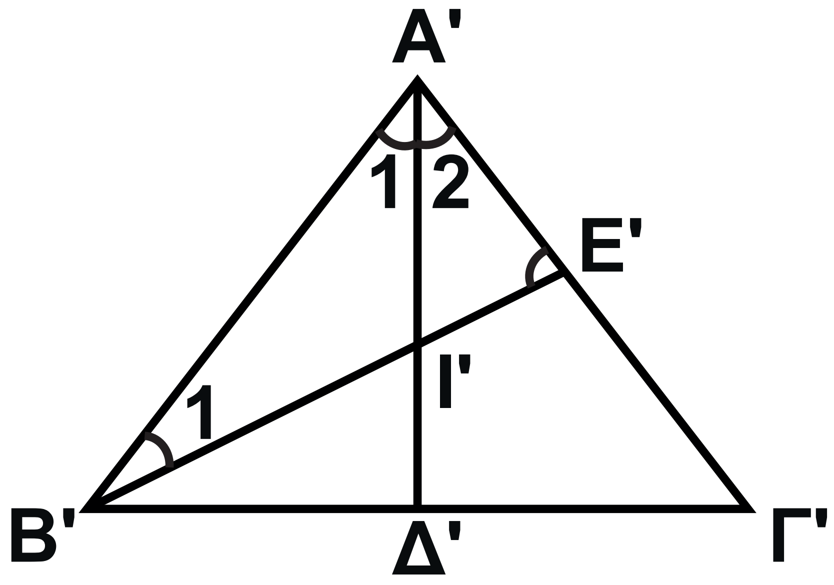
§ 3.3-3.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ είναι ίσα (Π-Γ-Π).

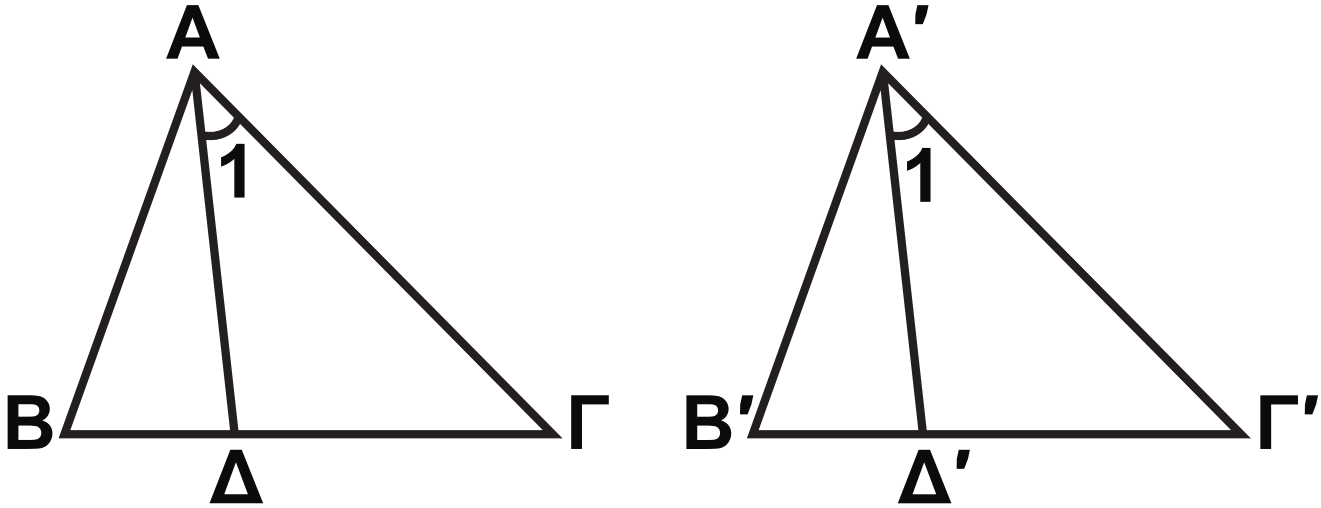
α) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Delta'}$ είναι ίσα ($AB = A'B'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{A}_1 = \dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{\hat{A}'}{2} = \hat{A}_1'$). Άρα $A\Delta = A'\Delta'$. Επίσης τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABE}$ και $\overset{\triangle}{A'B'E'}$ είναι ίσα (Γ-Π-Γ). Άρα $BE = B'E'$.





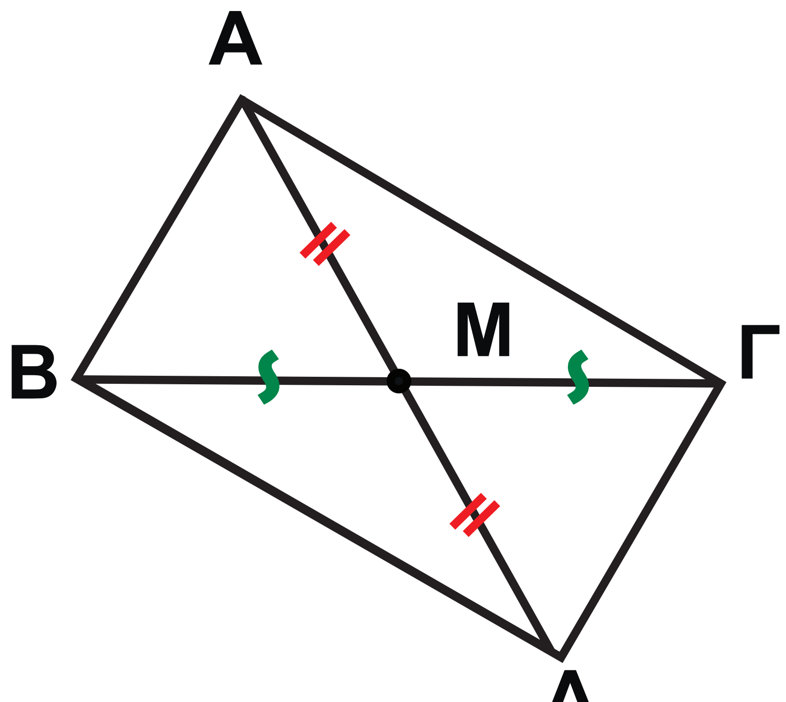
β) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AIE}$ και $\overset{\triangle}{A'I'E'}$ είναι ίσα γιατί ΑΕ = Α′Ε′ (από το (α)), $\hat{E} = \hat{E}'$ και $\hat{A}_2 = \hat{A}_1$ (Γ-Π-Γ). Άρα ΑΙ = Α′Ι′. Όμοια, από την ισότητα των τριγώνων $\overset{\triangle}{BI\Delta}$ και $\overset{\triangle}{B'I'\Delta'}$ προκύπτει ότι ΒΙ = Β′Ι′.

2. i) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{A'\Delta'\Gamma'}}$ είναι ίσα γιατί $\mathrm{A\Gamma = A'\Gamma'}$, $\mathrm{A\Delta = A'\Delta'}$ και $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}'_1$ (Π-Γ-Π). Άρα $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.



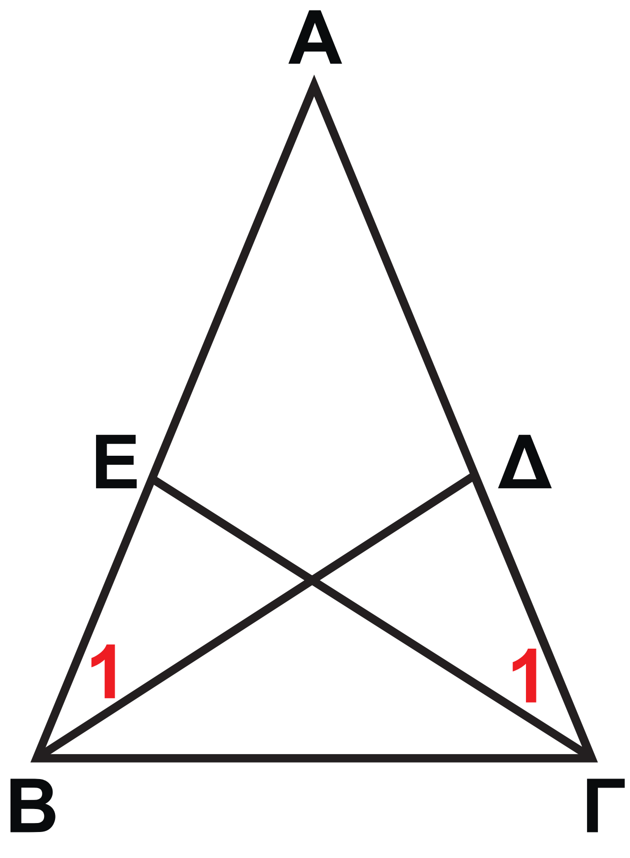
ii) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{A'B'\Gamma'}}$ είναι ίσα γιατί $\mathrm{A\Gamma = A'\Gamma'}$, $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ από το (α) (Γ-Π-Γ). Άρα $\alpha = \alpha'$ και $\gamma = \gamma'$.

3. Τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{M}}\mathrm{B}$ και $\Gamma\overset{\triangle}{\mathrm{M}}\Delta$ είναι ίσα (Π-Γ-Π). Άρα ΑΒ = ΓΔ. Όμοια τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{M}}\Gamma$ και $\mathrm{B}\overset{\triangle}{\mathrm{M}}\Delta$ είναι ίσα. Άρα ΑΓ = ΒΔ. Επομένως τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Gamma$ και $\mathrm{B}\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$ έχουν τις πλευρές τους ίσες. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (Π-Π-Π).

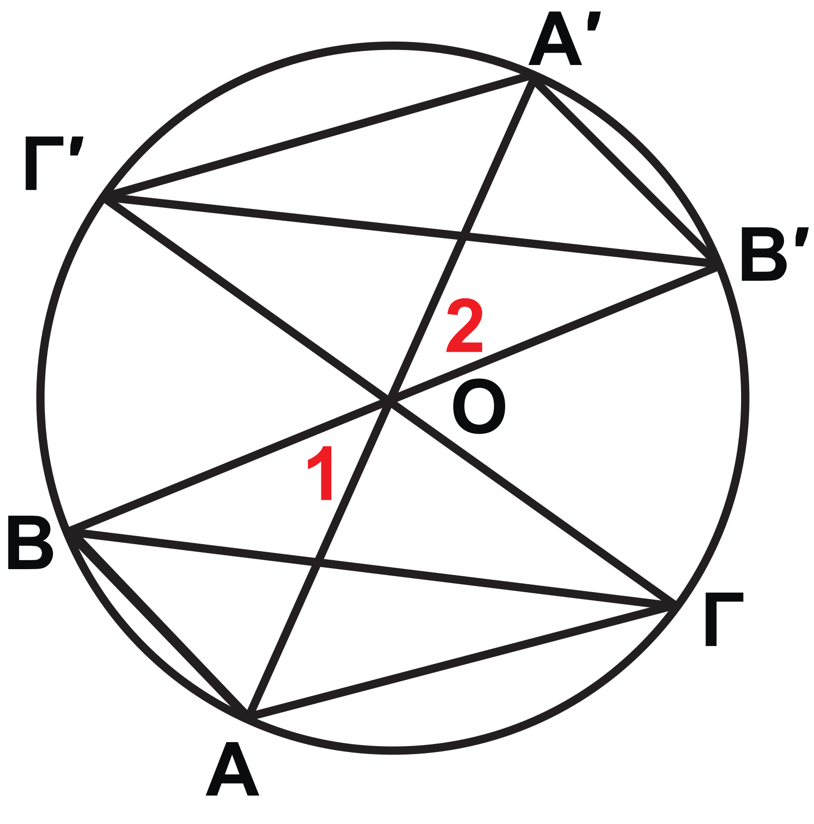


Αποδεικτικές Ασκήσεις

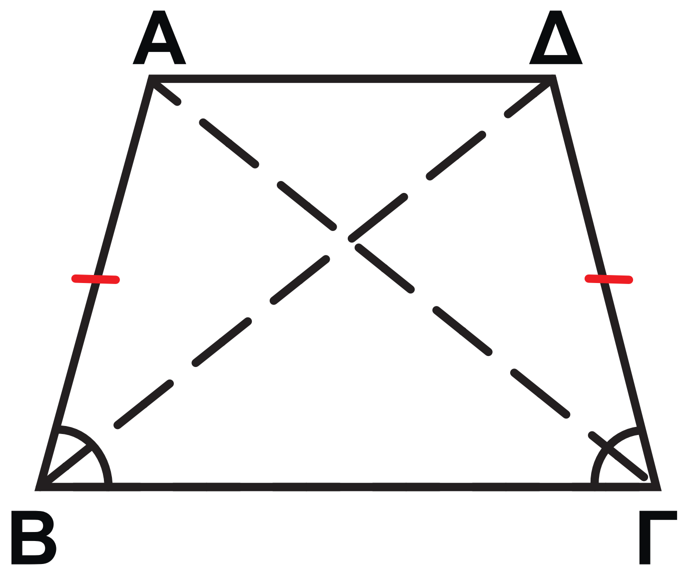
1. Έστω ΒΔ και ΓΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.
Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Delta$ και $A\overset{\triangle}{\Gamma}E$ είναι ίσα γιατί έχουν: ΑΒ = ΑΓ, $\hat{A}$ κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (μισά ίσων γωνιών).
Από την ισότητα αυτή προκύπτει το ζητούμενο.



2. Τα τρίγωνα $O\overset{\triangle}{A}B$ και $O\overset{\triangle}{A'}B'$ είναι ίσα, γιατί έχουν: ΟΑ = ΟΑ′ και ΟΒ = ΟΒ′, ως ακτίνες, και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, ως κατακορυφήν. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι ΑΒ = Α′Β′. Όμοια βρίσκουμε ότι ΑΓ = Α′Γ′ και ΒΓ = Β′Γ′. Έτσι τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και $A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$ έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες, επομένως είναι ίσα.



3. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ και $\overset{\triangle}{ΔΒΓ}$ είναι ίσα, γιατί έχουν: ΑΒ = ΓΔ, ΒΓ κοινή και $\hat{Β} = \hat{Γ}$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι ΑΓ = ΒΔ, οπότε και τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$ και $\overset{\triangle}{ΑΓΔ}$ είναι ίσα (Π-Π-Π). Άρα $\hat{Α} = \hat{Δ}$.



Σύνθετα Θέματα

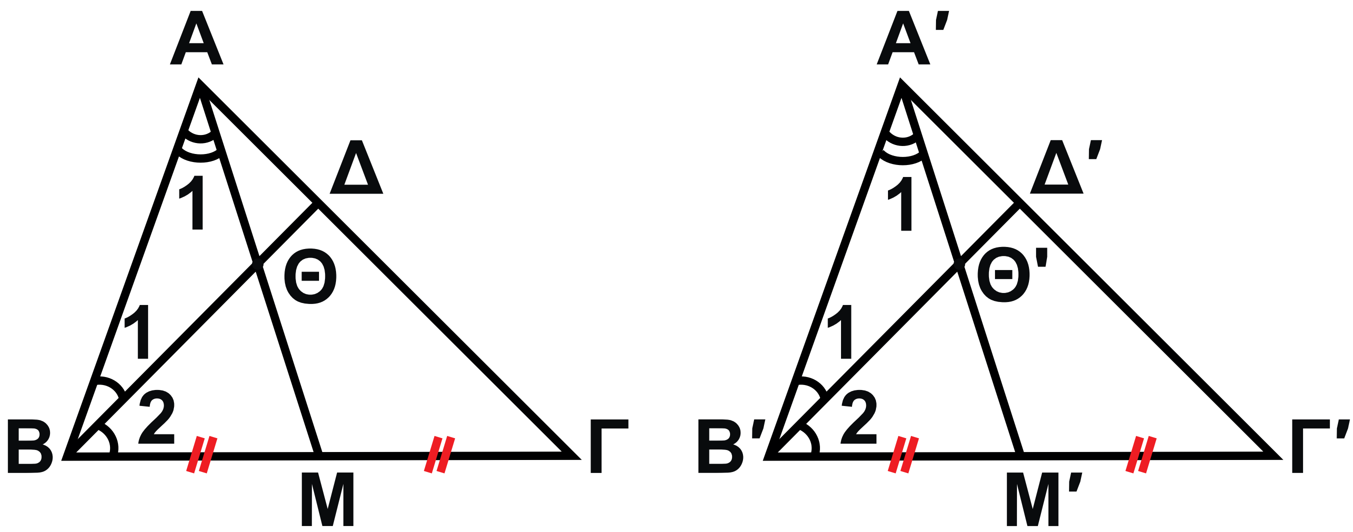
1. i) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Delta'}$ είναι ίσα ($AB = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$) (Γ-Π-Γ). Άρα $B\Delta = B'\Delta'$.

ii) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{BAM}$ και $\overset{\triangle}{B'A'M'}$ είναι ίσα ($AB = A'B'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $BM = B'M'$) (Π-Γ-Π). Άρα $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$.

iii) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Theta}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Theta'}$ είναι ίσα ($AB = A'B'$, $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$ και $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$ από το (β)) (Γ-Π-Γ).

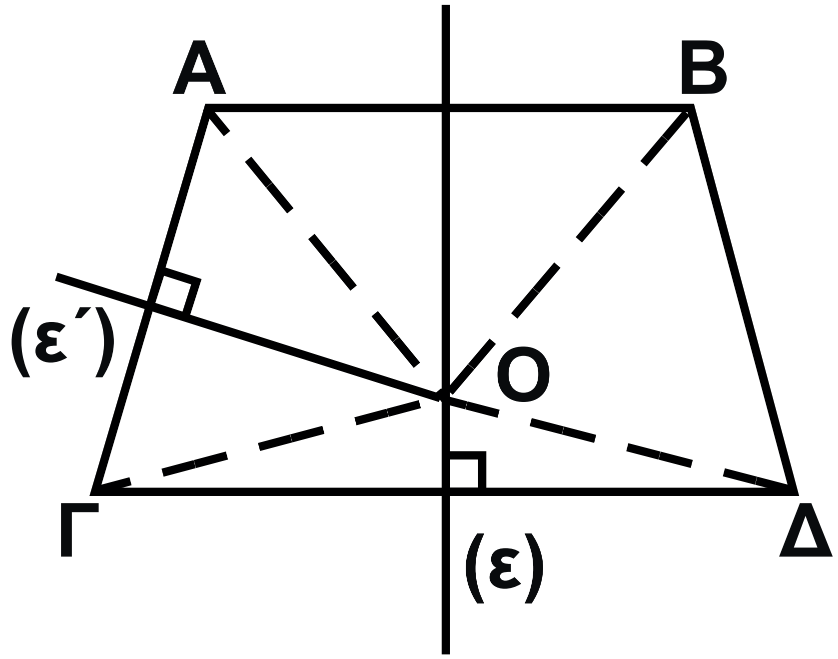
δ) Από το (γ) προκύπτει ότι $A\Theta = A'\Theta'$. Επίσης $B\Theta = B'\Theta'$.

Άρα ΒΔ – ΒΘ = Β′Δ′ – Β′Θ′ ή
ΘΔ = Θ′Δ′.



2. Έστω ε′ η μεσοκάθετος του ΑΓ και Ο το σημείο τομής των ε και ε′. Επειδή ε μεσοκάθετος του ΑΒ, θα είναι ΟΑ = ΟΒ (1). Όμοια ΟΓ = ΟΔ (2). Αλλά το Ο ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΑΓ. Άρα ΟΑ = ΟΓ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΟΒ = ΟΔ, δηλαδή το Ο ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΒΔ.

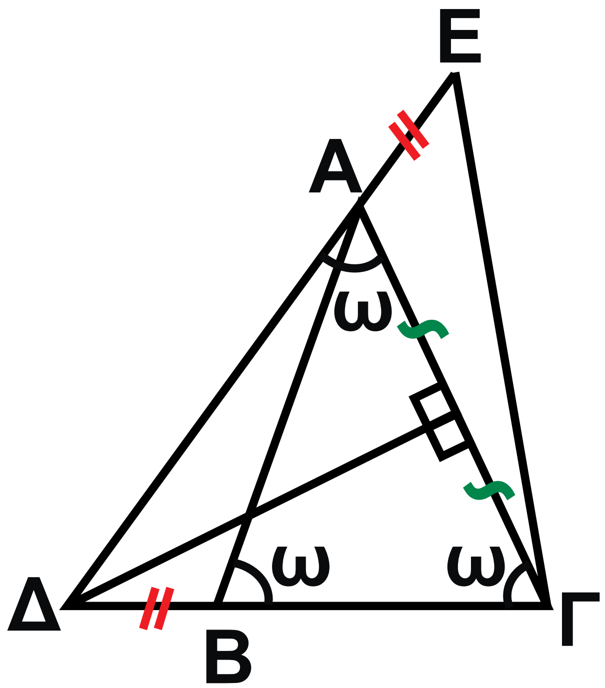


3. i) Επειδή το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΓ είναι ΔΑ = ΔΓ.

Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta A \Gamma}$ είναι ισοσκελές.

ii) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Gamma A E}$ και $\overset{\triangle}{A B \Delta}$ είναι ίσα, γιατί ΑΕ = ΒΔ, ΑΓ = ΑΒ και $A\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}E$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών ($\hat{B} = \hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}\Gamma = \omega$) (Π-Γ-Π).

Άρα ΓΕ = ΓΔ, δηλαδή το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta E}$ είναι ισοσκελές.

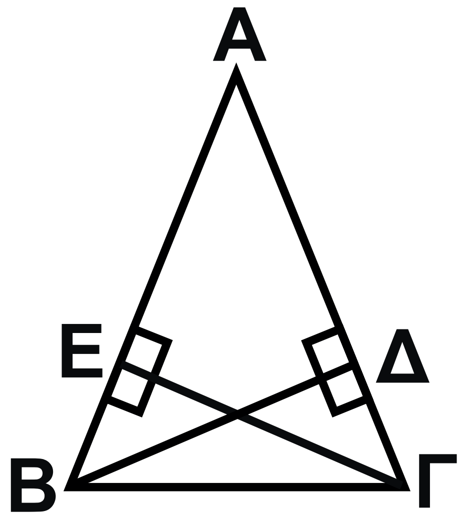


§ 3.5-3.6

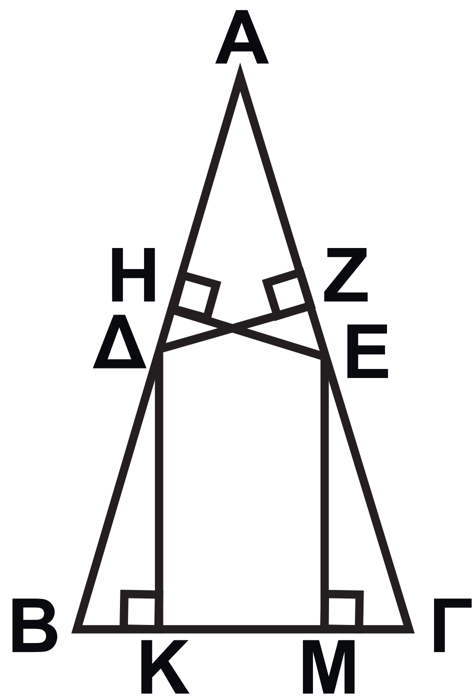
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ (ΑΒ = ΑΓ) και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ και $\overset{\triangle}{AE\Gamma}$ είναι ίσα ($\hat{A}$ κοινή, $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$,

ΑΒ = ΑΓ). Άρα ΒΔ = ΓΕ.



2. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ (ΑΒ = ΑΓ) και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.



i) Αν $ΔΚ \perp ΒΓ$, $ΕΜ \perp ΒΓ$ τα τρίγωνα

$\overset{\triangle}{ΒΔΚ}$ και $\overset{\triangle}{ΜΕΓ}$ είναι ίσα
($\hat{Κ} = \hat{Μ} = 90^\circ$, $\hat{Β} = \hat{Γ}$ και $ΔΒ = ΕΓ$
ως μισά ίσων πλευρών).
Άρα $ΔΚ = ΜΕ$.

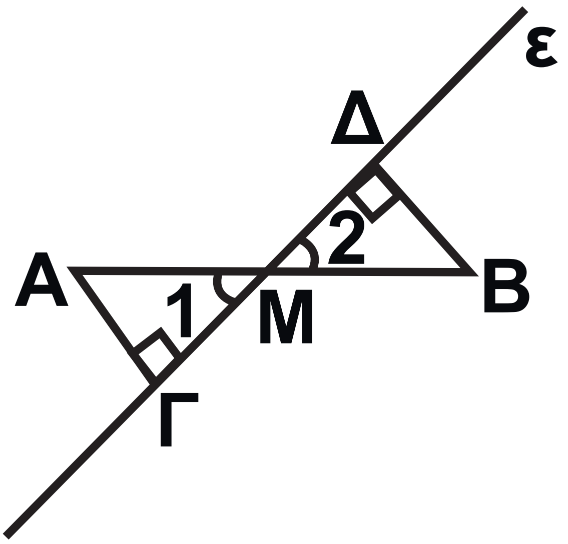
ii) Αν $ΔΖ \perp ΑΓ$ και $ΕΗ \perp ΑΒ$, τα τρί-

γωνα $\overset{\triangle}{ΑΗΕ}$ και $\overset{\triangle}{ΑΔΖ}$ είναι ίσα
($\hat{Α}$ κοινή, $\hat{Ζ} = \hat{Η} = 90^\circ$, $ΑΔ = ΑΕ$).
Άρα $ΔΖ = ΕΗ$.

3. Έστω ευθεία ε που διέρχεται
από το μέσο Μ του ΑΒ. Αν $ΑΓ \perp ε$

και $ΔΒ \perp ε$ τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΜΑΓ}$ και

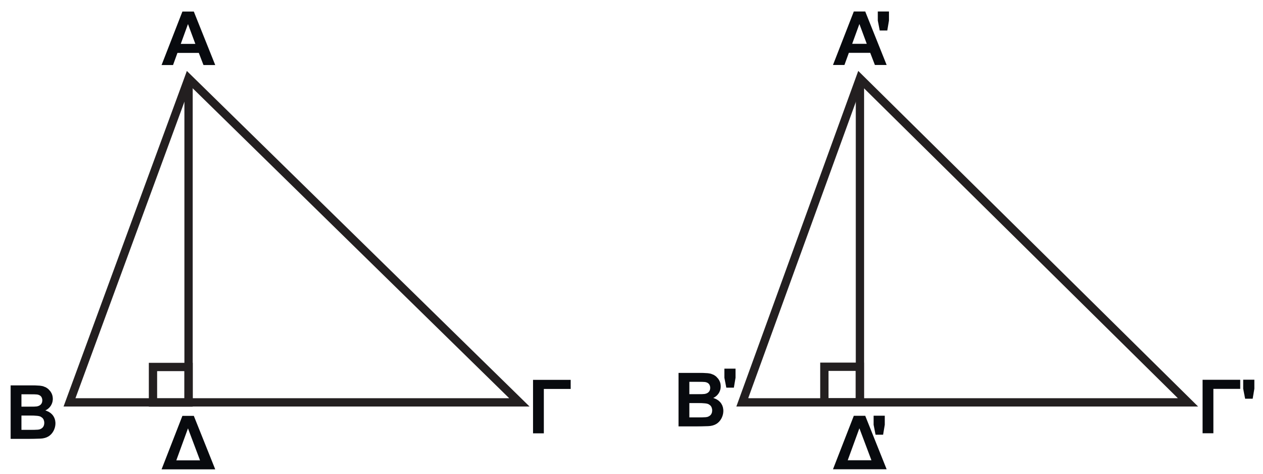
$\overset{\triangle}{ΜΔΒ}$ είναι ίσα ($ΑΜ = ΒΜ$, $\hat{Μ}_1 = \hat{Μ}_2$,
$\hat{Δ} = \hat{Γ} = 90^\circ$). Άρα $ΑΓ = ΒΔ$.



4. Έστω ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ και $\overset{\triangle}{Α'Β'Γ'}$ είναι ίσα με ΒΓ = Β′Γ′. Αν ΑΔ, Α′Δ′ τα αντίστοιχα ύψη, τότε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$ και $\overset{\triangle}{Α'Β'Δ'}$ είναι ίσα.

(ΑΒ = Α′Β′, $\hat{Β} = \hat{Β}'$, $\hat{Δ} = \hat{Δ}' = 90^\circ$).

Άρα ΑΔ = Α′Δ′.

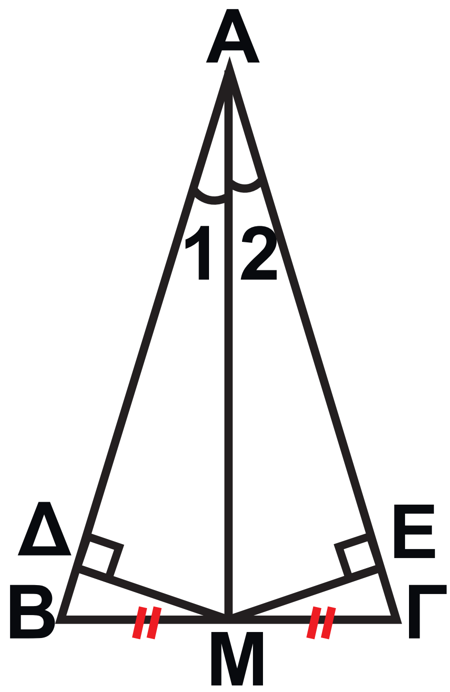


Σχόλιο:

Παρατηρήστε ότι αν το Δ ανήκει στην πλευρά ΒΓ τότε και το Δ′ ανήκει στην πλευρά Β′ Γ′.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

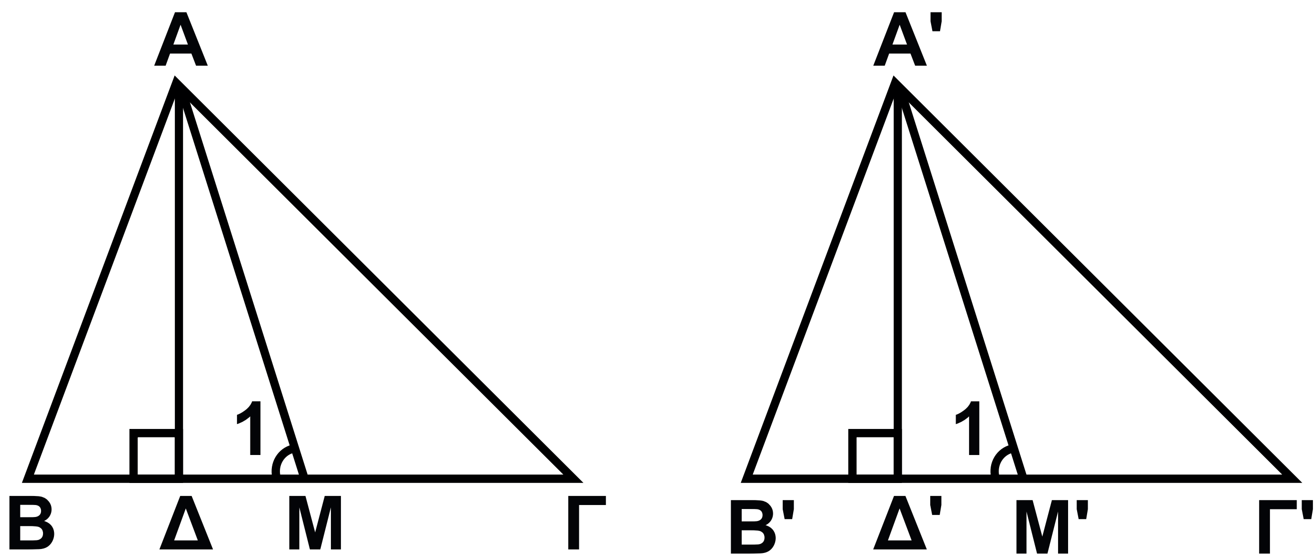
1. Έστω ΜΔ ⊥ ΑΒ και ΜΕ ⊥ ΑΓ. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{ΑΜΔ}}$ και $\overset{\triangle}{\text{ΑΜΕ}}$ είναι ίσα (ΑΜ κοινή, $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, αφού ΑΜ διάμεσος και διχοτόμος). Άρα i) ΜΔ = ΜΕ και ii) $A\hat{M}\Delta = A\hat{M}E$, δηλαδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{M}E$.



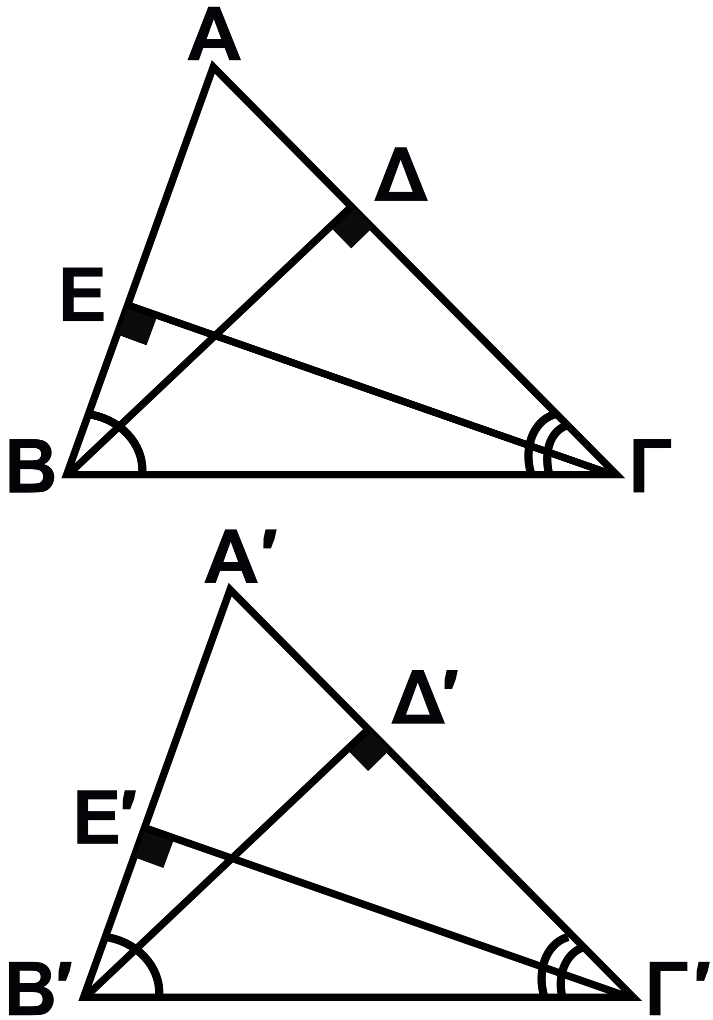
Σχόλιο:

Αποφύγαμε να συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{ΜΒΔ}}$ και $\overset{\triangle}{\text{ΜΓΕ}}$ γιατί δεν έχουμε αποδείξει ακόμη ότι τα Δ, Ε είναι προς το ίδιο μέρος της ΒΓ. Αυτό προκύπτει μετά τη διαπίστωση ότι οι γωνίες $\hat{\text{Β}}$, $\hat{\text{Γ}}$ είναι οξείες.

2. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta M}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{A'\Delta' M'}}$ είναι ίσα ($\hat{\Delta} = \hat{\Delta}' = 90^\circ$, ΑΔ = Α′Δ′, ΑΜ = Α′Μ′). Άρα $\hat{M}_1 = \hat{M}_1'$ (1). Επίσης τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{ABM}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{A'B'M'}}$ είναι ίσα (ΑΜ = Α′Μ′, $\hat{M}_1 = \hat{M}_1'$ από (1) και ΒΜ = Β′Μ′ ως μισά ίσων πλευρών). Άρα ΑΒ = Α′Β′ (2) και $\hat{B} = \hat{B}'$ (3). Από τις (2), (3) και την υπόθεση (α = α′), προκύπτει ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{A'B'\Gamma'}}$ είναι ίσα (Π-Γ-Π).



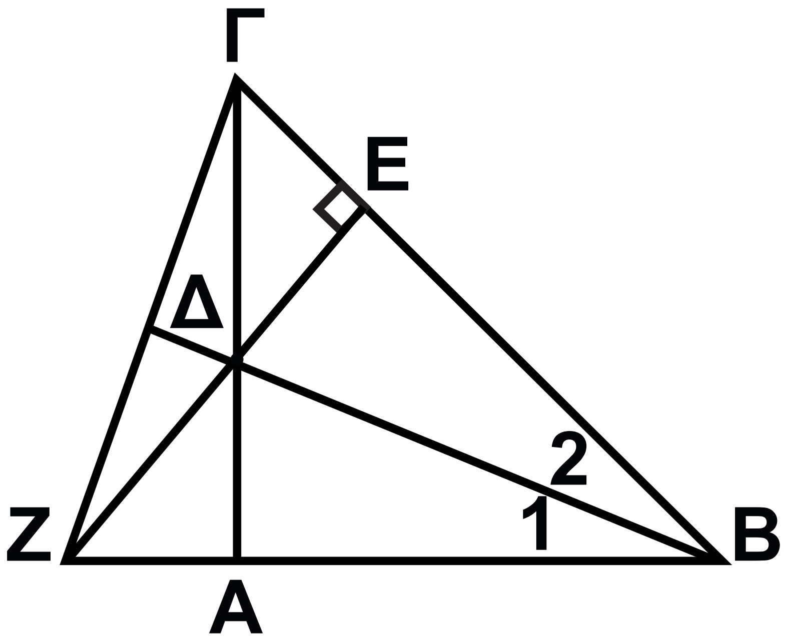
3. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΒΕΓ}$ και $\overset{\triangle}{Β'Ε'Γ'}$ είναι ίσα ($ΒΓ = Β'Γ'$, $ΓΕ = Γ'Ε'$, $\hat{Ε} = \hat{Ε}' = 90^\circ$). Άρα $\hat{Β} = \hat{Β}'$ (1). Όμοια από τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΒΔΓ}$ και $\overset{\triangle}{Β'Δ'Γ'}$ προκύπτει ότι $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$ (2).
Από τις (1), (2) και την υπόθεση ($α = α'$), προκύπτει ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ και $\overset{\triangle}{Α'Β'Γ'}$ είναι ίσα (Γ-Π-Γ).



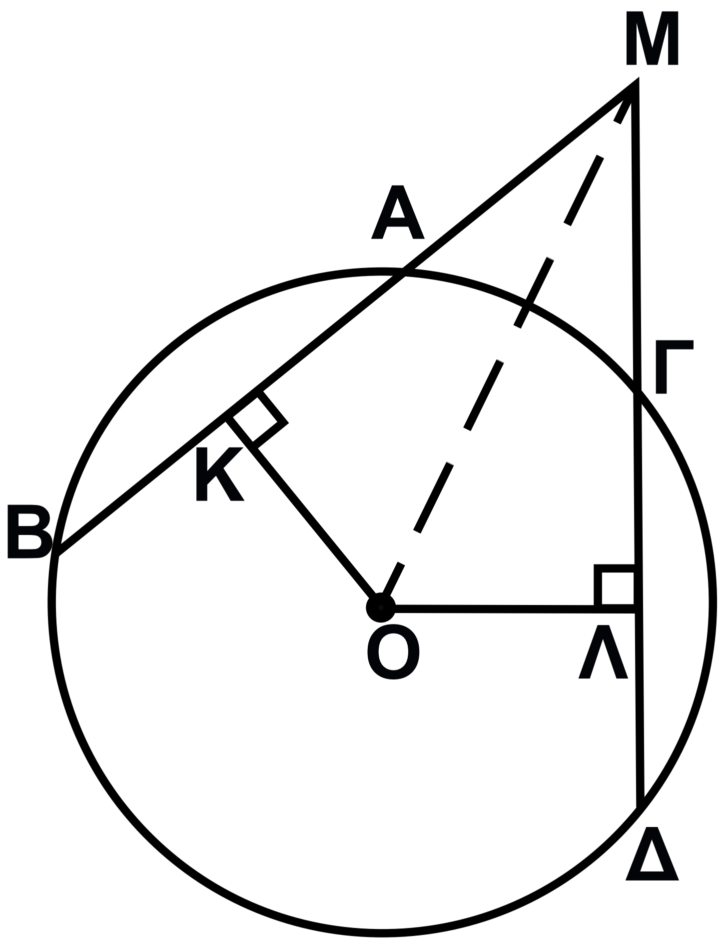
4. Τα τρίγωνα $E\overset{\triangle}{\Delta}B$ και $A\overset{\triangle}{\Delta}B$ έχουν $\hat{E} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, ΒΔ κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, άρα είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΒΕ (1).

Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και $E\overset{\triangle}{B}Z$ έχουν $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$, ΑΒ = ΒΕ (από (1)) και $\hat{B}$ κοινή, άρα είναι ίσα, οπότε

ΒΖ = ΒΓ, δηλαδή το τρίγωνο $B\overset{\triangle}{\Gamma}Z$ είναι ισοσκελές.



5. i) Επειδή ΑΒ = ΓΔ θα είναι ΟΚ = ΟΛ, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{MOK}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{MO\Lambda}}$ είναι ίσα γιατί έχουν ΟΜ κοινή και ΟΚ = ΟΛ.



ii) Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΜΚ = ΜΛ (1). Όμως τα Κ, Λ είναι

μέσα των ίσων χορδών ΑΒ και ΓΔ, οπότε ΑΚ = ΓΛ (2) και ΒΚ = ΔΛ (3). Από τις (1), (2) προκύπτει ΜΑ = ΜΓ και από τις (1), (3) ότι ΜΒ = ΜΔ.

Σύνθετα Θέματα

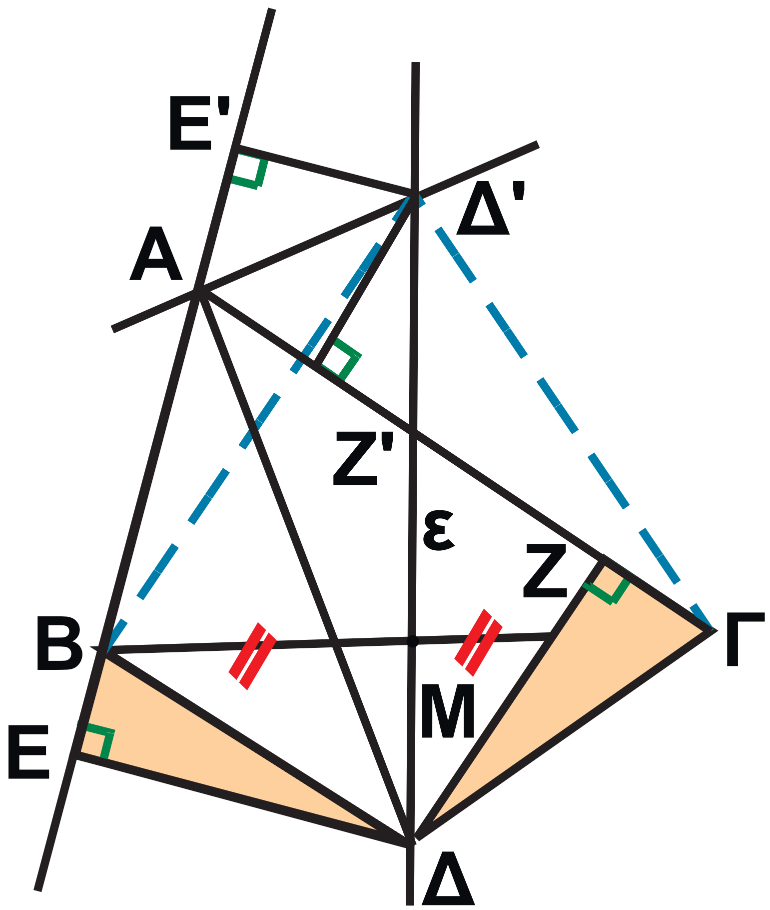
1. i) Τα τρίγωνα $E\overset{\triangle}{\Delta}B$ και $\Delta\overset{\triangle}{Z}\Gamma$ είναι ορθογώνια ($\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$) και έχουν ΔΒ = ΔΓ (Δ σημείο της μεσοκαθέτου), ΔΕ = ΔΖ (αποστάσεις σημείου της διχοτόμου), άρα είναι ίσα.

   ii) Για τους ίδιους λόγους και τα τρίγωνα $\Delta'\overset{\triangle}{B}E'$ και $\Delta'\overset{\triangle}{\Gamma}Z'$ είναι ίσα.

iii) Από τις παραπάνω ισότητες τριγώνων προκύπτουν: ΑΕ = ΑΖ και ΓΖ′ = ΒΕ′.

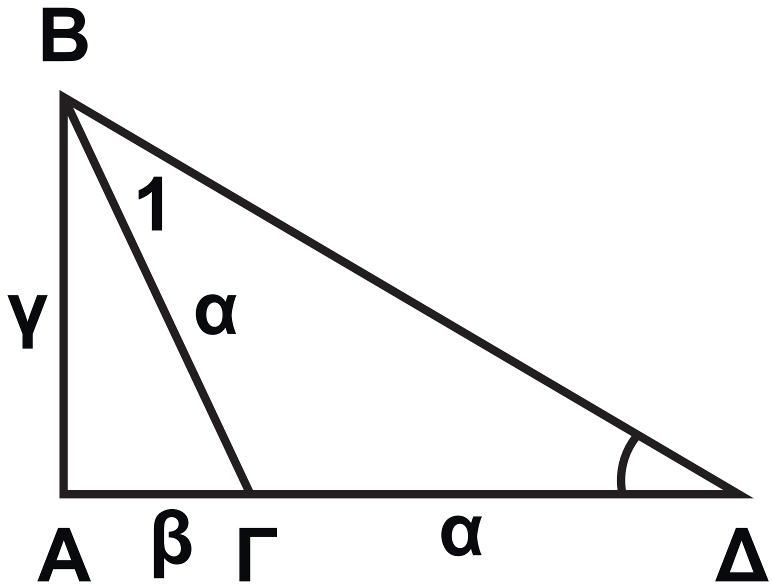
Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες αυτές παίρνουμε:

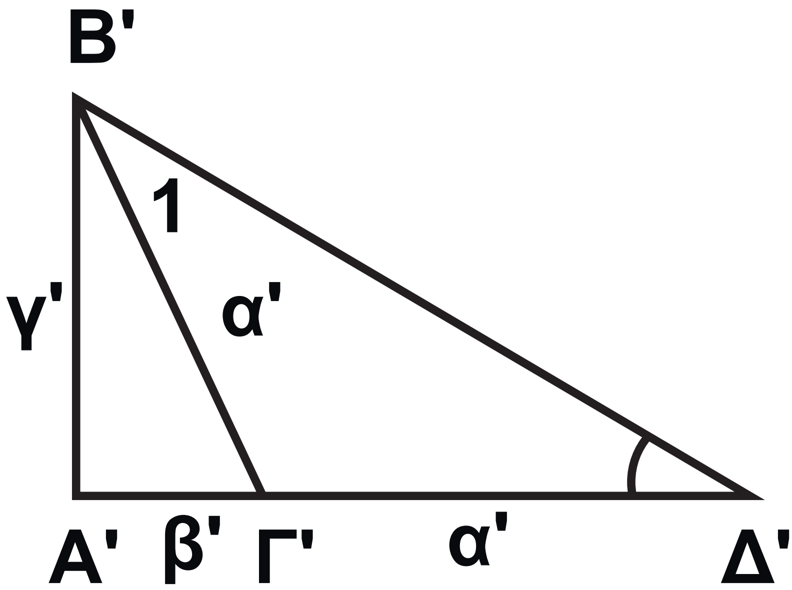
$ΑΕ + ΓΖ' = ΑΖ + ΒΕ' \Leftrightarrow ΑΒ + ΒΕ +$
$+ ΑΓ - ΑΖ' = ΑΓ - ΓΖ + ΑΒ + ΑΕ' \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ΒΕ + ΓΖ = ΑΕ' + ΑΖ' \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2ΒΕ = 2\,ΑΖ' \Leftrightarrow ΒΕ = ΑΖ'$, οπότε:
$ΕΕ' = ΑΕ + ΑΕ' = ΑΖ + ΖΓ = ΑΓ$ και
$ΖΖ' = ΑΖ - ΑΖ' = ΑΕ - ΒΕ = ΑΒ$.



2. Έστω ότι $\gamma = \gamma'$. Προεκτείνουμε τις ΑΓ, Α′Γ′ κατά τμήματα ΓΔ = α και Γ′Δ′ = α′ αντίστοιχα. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$ και $\overset{\triangle}{Α'Β'Δ'}$ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία και επομένως είναι ίσα. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι $Α\hat{Β}Δ = Α'\hat{Β}'Δ'$ (1) και $\hat{Δ} = \hat{Δ}'$, οπότε και $\hat{Β}_1 = \hat{Β}'_1$ (2) (γιατί τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΒΓΔ}$, $\overset{\triangle}{Β'Γ'Δ'}$ είναι ισοσκελή).

Από τις (1) και (2) προκύπτει $\hat{Β} = \hat{Β}'$, οπότε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ και $\overset{\triangle}{Α'Β'Γ'}$ έχουν $\hat{Α} = \hat{Α}' = 90^\circ$, ΑΒ = Α′Β′ και $\hat{Β} = \hat{Β}'$, επομένως είναι ίσα.

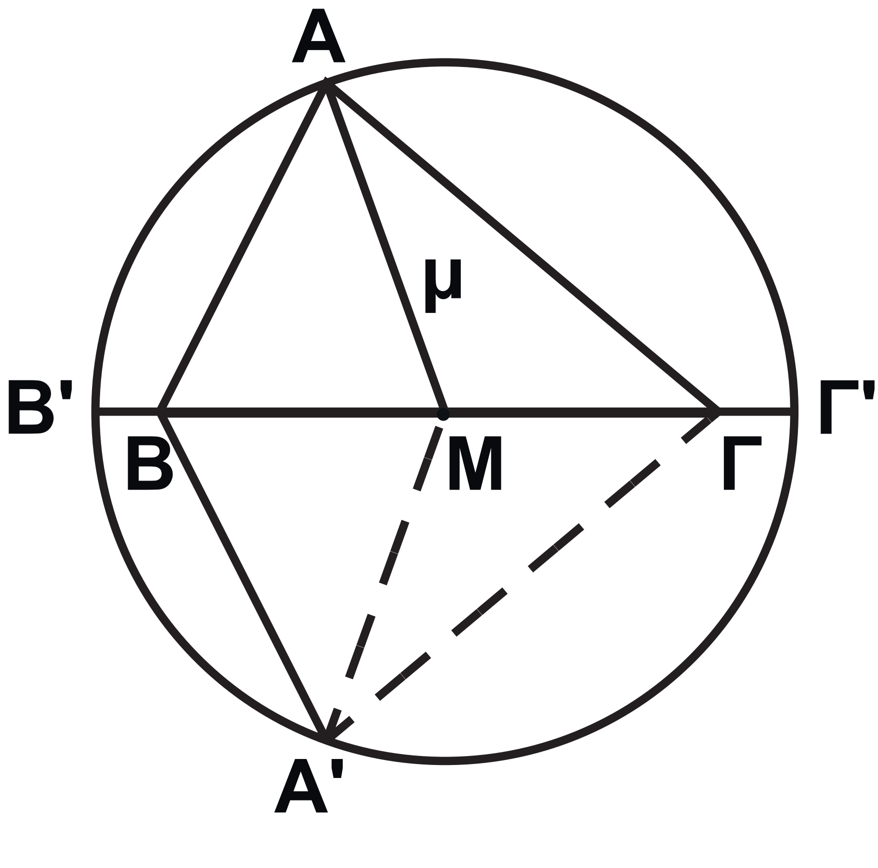

Β
1
γ
α
Α
β
Γ
α
Δ


Β'
1
γ'
α'
Α'
β'
Γ'
α'
Δ'

§ 3.7

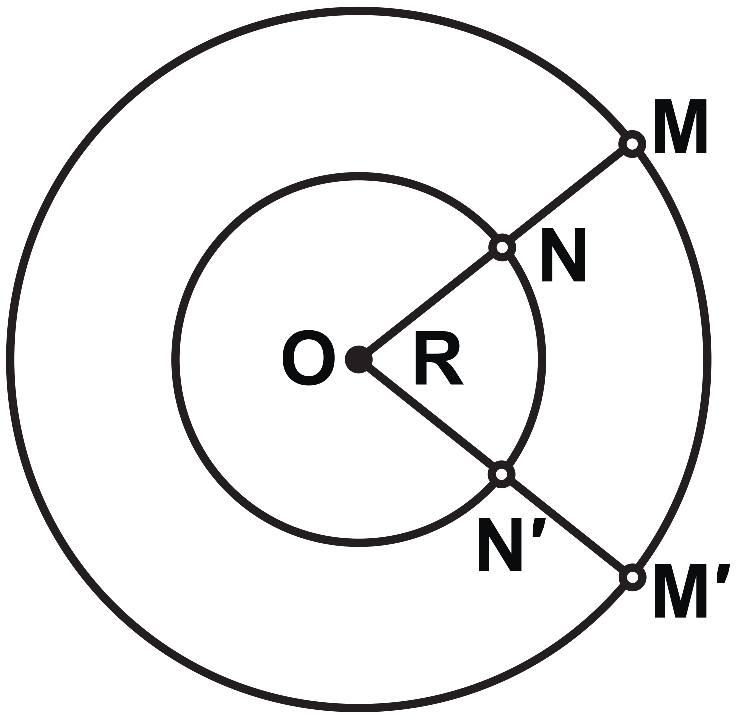
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Έστω τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με σταθερή την πλευρά ΒΓ = α και τη διάμεσο ΑΜ με γνωστό μήκος μ. Επειδή το Α απέχει από το σταθερό σημείο Μ σταθερή απόσταση μ, βρίσκεται στον κύκλο (Μ, μ).



• **Αντίστροφα:** Έστω Α′ σημείο του κύκλου (Μ, μ) τότε Α′Μ = μ, ως ακτίνα του κύκλου, και Α′Μ διάμεσος του $\overset{\triangle}{\text{Α′ΒΓ}}$. Το Α δεν είναι σημείο της ευθείας ΒΓ. Επομένως γ.τ. του Α είναι ο κύκλος (Μ, μ) χωρίς τα σημεία του Β′ και Γ′.

2. Αν Μ είναι ένα σημείο του ζητούμενου γ.τ., θα είναι ΟΜ = 2R και επομένως το Μ ανήκει στον κύκλο (Ο, 2R).



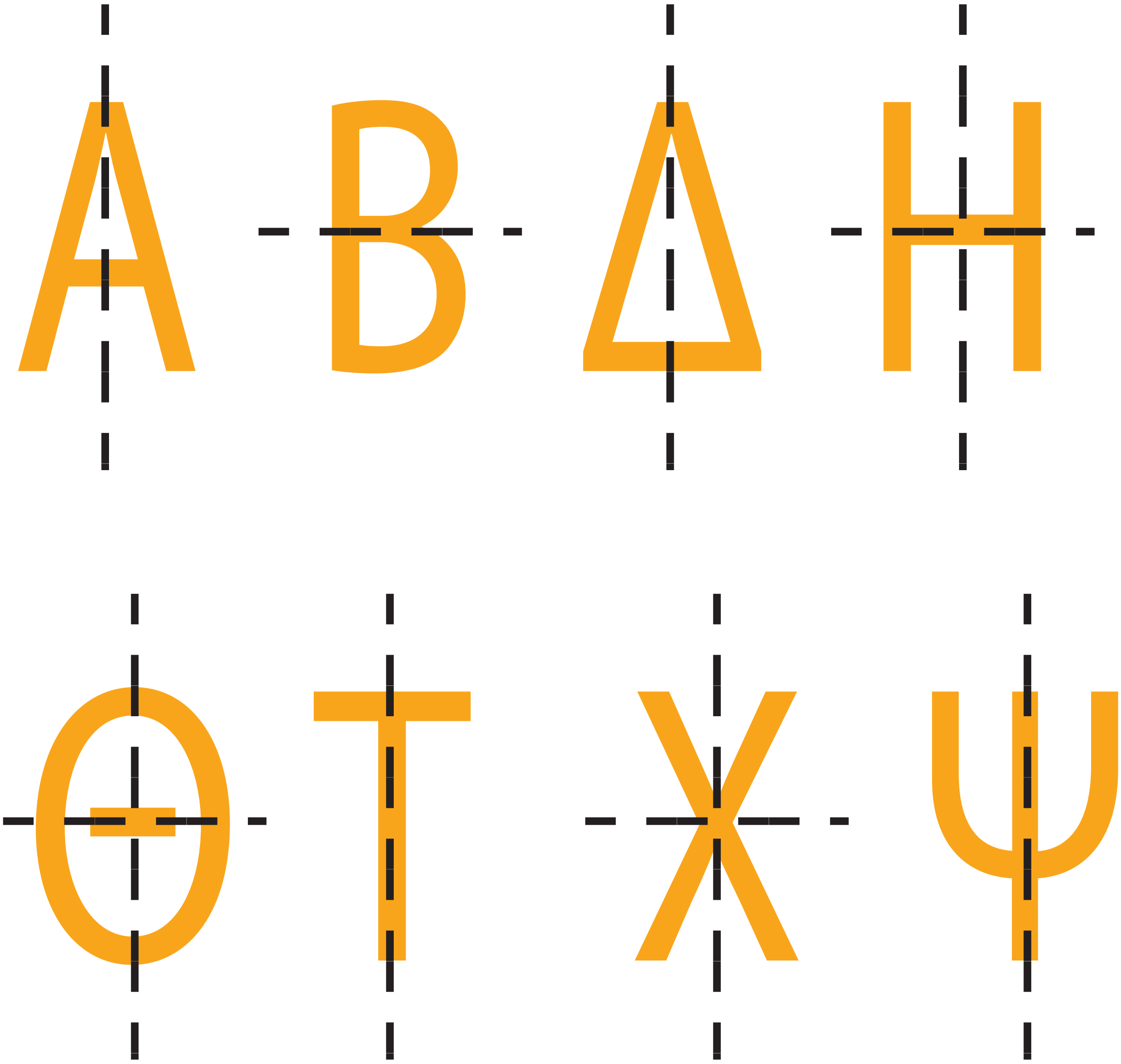
- **Αντίστροφα:** Αν Μ′ είναι ένα σημείο του (Ο, 2R) και Ν′ η τομή του ΟΜ′ με τον (Ο, R) τότε ΟΝ′ = R, οπότε Ν′Μ′ = 2R − R = R, δηλαδή ΟΝ′ = Ν′Μ′. Άρα ο γ.τ. του Μ είναι ο κύκλος (Ο, 2R).

Σχόλιο:
Στα προβλήματα γ.τ. εξετάζουμε ευθύ και αντίστροφο.

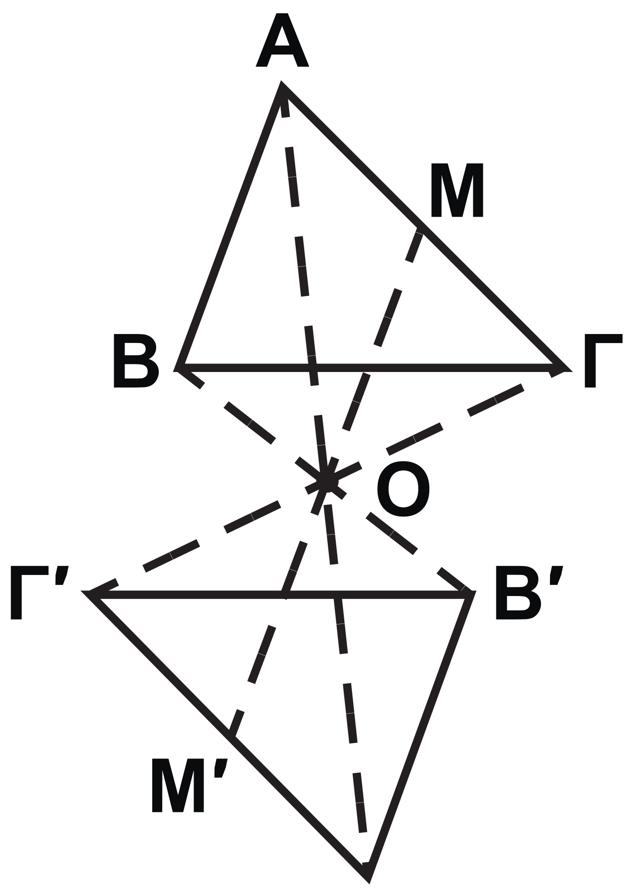
§ 3.8-3.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

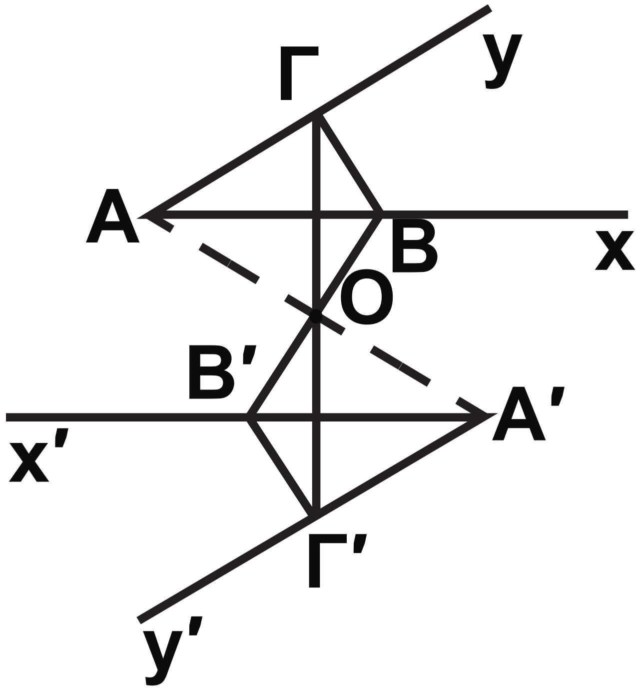
1. Οι ζητούμενοι άξονες συμμετρίας φαίνονται στα επόμενα σχήματα:


A B Δ H
Θ T Ж Ψ

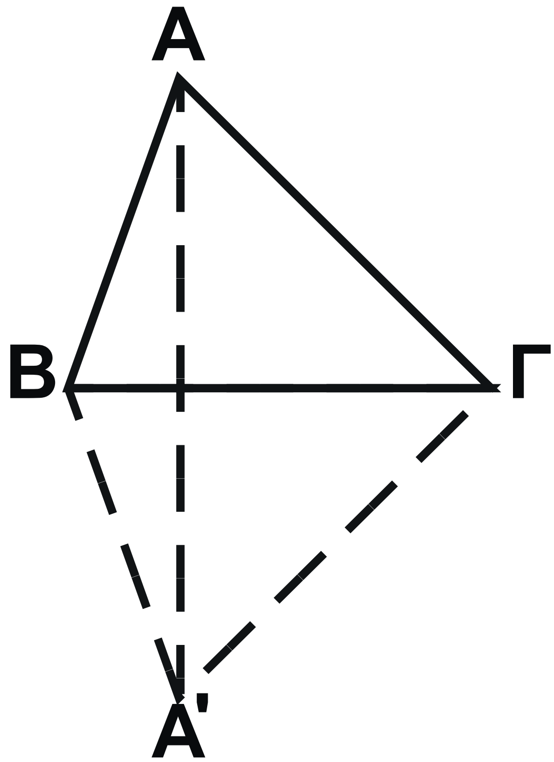
2. Σύμφωνα με την εφαρμογή της § 3.8 το συμμετρικό Μ′ ενός σημείου Μ του τριγώνου $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ είναι σημείο του τριγώνου $\overset{\triangle}{Α'Β'Γ'}$ και αντίστροφα. Άρα τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$, $\overset{\triangle}{Α'Β'Γ'}$ είναι συμμετρικά ως προς το Ο. Εξάλλου από Α′Β′ = ΑΒ, Β′Γ′ = ΒΓ και Γ′Α′ = ΓΑ προκύπτει ότι $\overset{\triangle}{Α'Β'Γ'} = \overset{\triangle}{ΑΒΓ}$.



3. Έστω Β, Γ σημεία των Αx, Αy αντίστοιχα και Β′, Γ′ τα συμμετρικά αυτών ως προς το Ο. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση είναι $A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma' = A\overset{\triangle}{B}\Gamma$, οπότε $x'\hat{A}'y' = x\hat{A}y$.



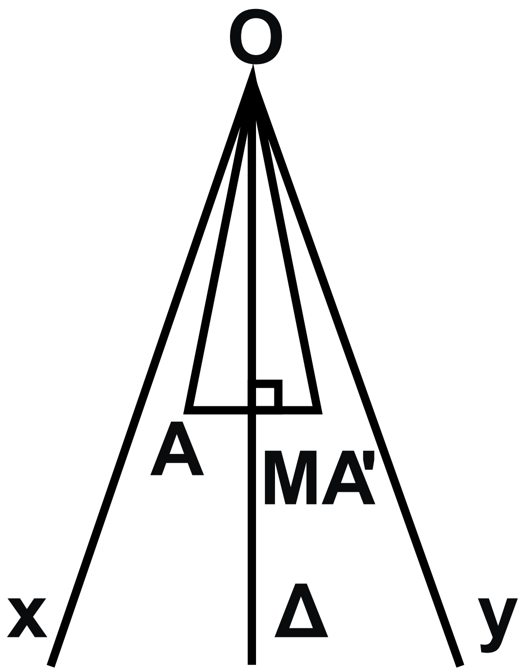
4. Σύμφωνα με την εφαρμογή της § 3.9 είναι ΒΑʹ = ΒΑ και ΓΑʹ = ΓΑ, οπότε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ και $\overset{\triangle}{\text{ΑʹΒΓ}}$ είναι ίσα (Π-Π-Π).



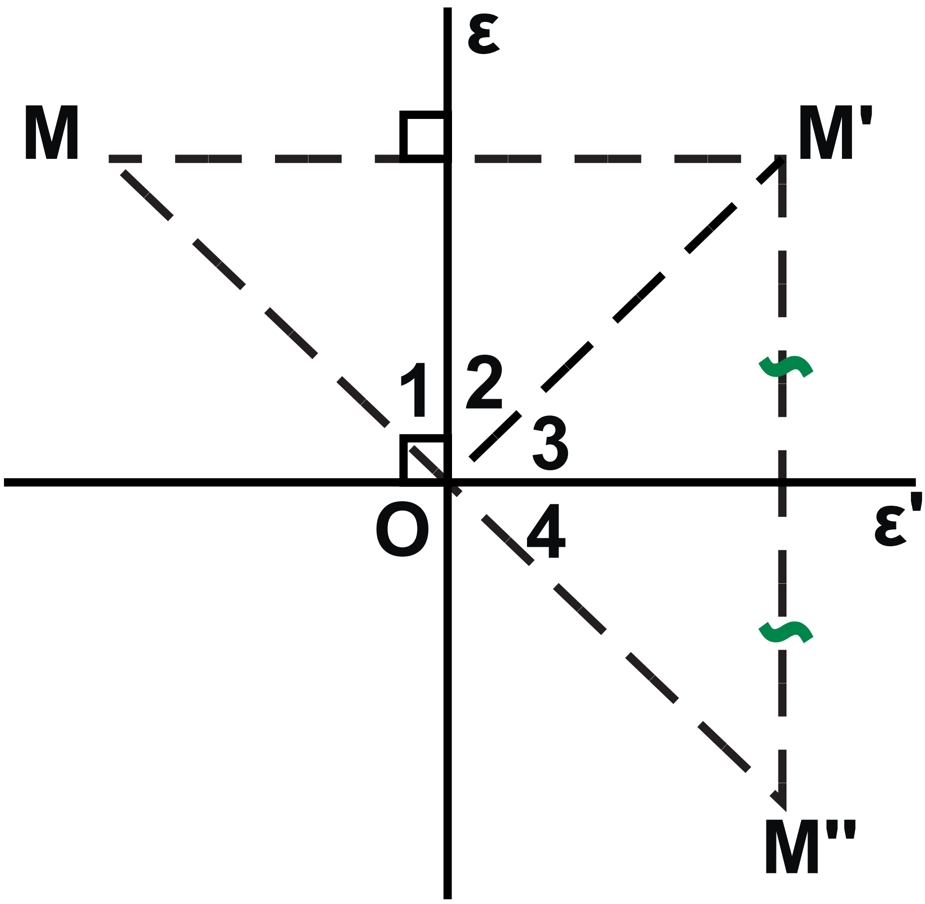
5. Έστω ΟΔ η διχοτόμος της $x\hat{O}y$ και Α σημείο της $x\hat{O}y$, π.χ. της $x\hat{O}\Delta$. Αν Αʹ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ΟΔ τότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΟΑΑʹ}}$ είναι ισοσκελές, οπότε έχουμε:

$$A'\hat{O}M = A\hat{O}M \leq M\hat{O}x = M\hat{O}y.$$

Το Α′ επομένως είναι σημείο της $\Delta\hat{O}y$, δηλαδή της $x\hat{O}y$. Άρα η ΟΔ είναι άξονας συμμετρίας.



6. i) Επειδή Μ′ συμμετρικό του Μ ως προς ε, η ε είναι μεσοκάθετη του ΜΜ′, οπότε ΟΜ = ΟΜ′ (1). Για τους ίδιους λόγους είναι και ΟΜ′ = ΟΜ″ (2). Από τις (1) και (2) προκύπτει ΟΜ = ΟΜ″.



ii) Η ε είναι άξονας συμμετρίας του ΜΜ′, οπότε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Όμοια $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$, οπότε έχουμε:

$$M\hat{O}M'' = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 =$$

$$= 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2 \cdot 1L =$$

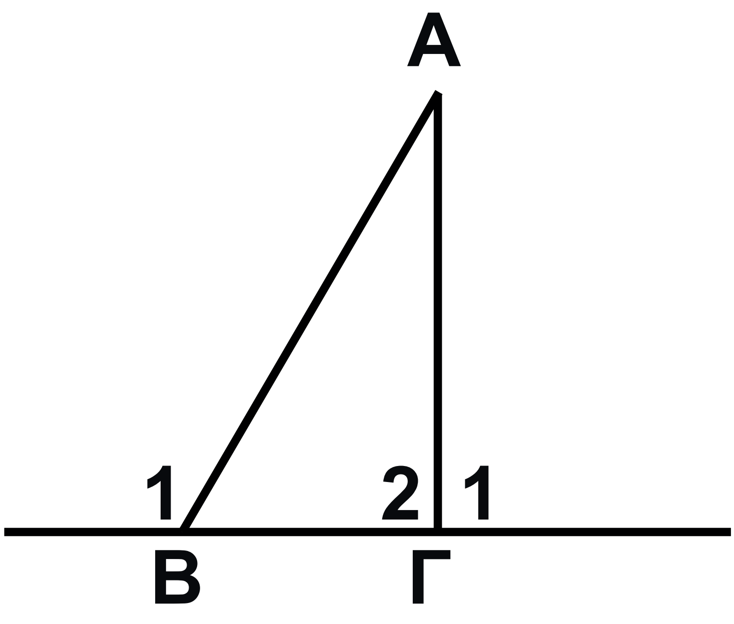
$= 2L$ αφού οι ε, ε′ είναι κάθετες.
Η ισότητα $M\hat{O}M'' = 2L$ σημαίνει ότι τα Μ, Ο, Μ″ είναι συνευθειακά.

Σχόλιο:
Από την άσκηση αυτή συμπεραίνουμε ότι: αν ένα σχήμα έχει δύο κάθετους άξονες συμμετρίας, τότε το σημείο τομής τους είναι κέντρο συμμετρίας του σχήματος.

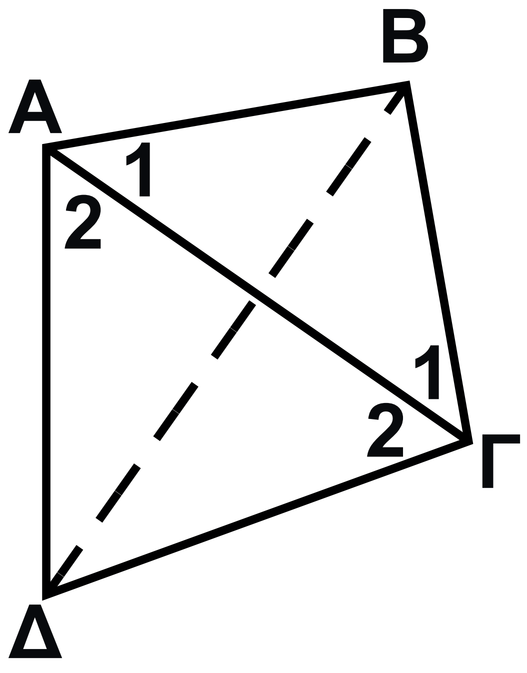
§ 3.10-3.12

Ασκήσεις Εμπέδωσης

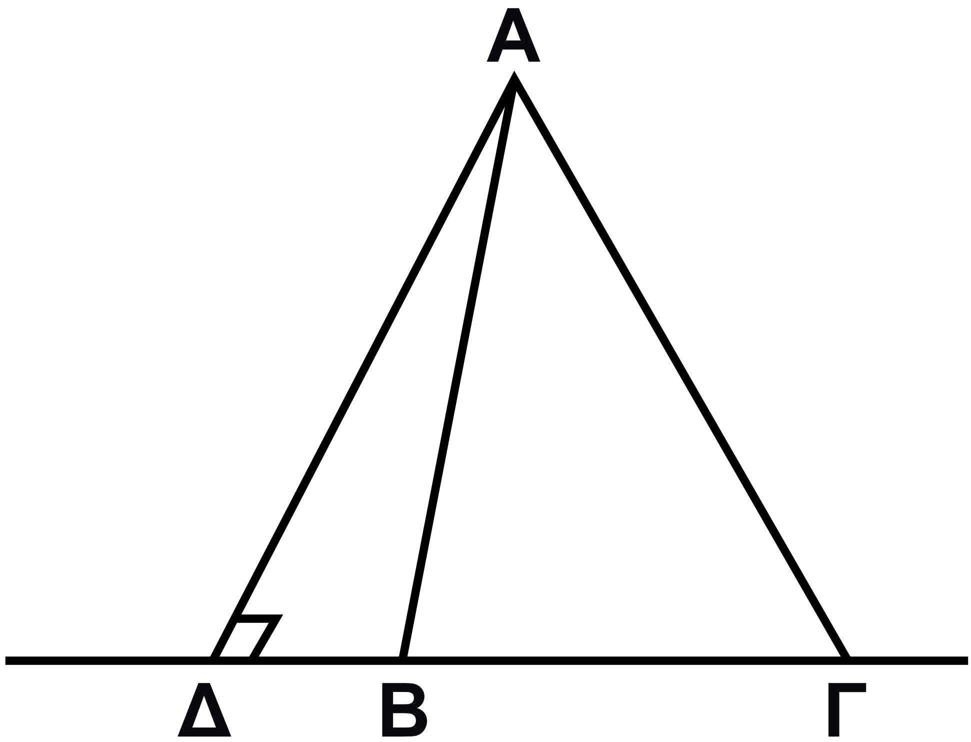
1. Επειδή η $\hat{B}_1$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι
$\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_2$ (1).
Από υπόθεση όμως $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$ (2).
Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει
$2\hat{B}_1 > 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_1 > 90^\circ$.



2. Το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και αφού $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ θα είναι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_2$. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ΑΔ = ΓΔ. Επειδή τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από το Α και Γ, η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.

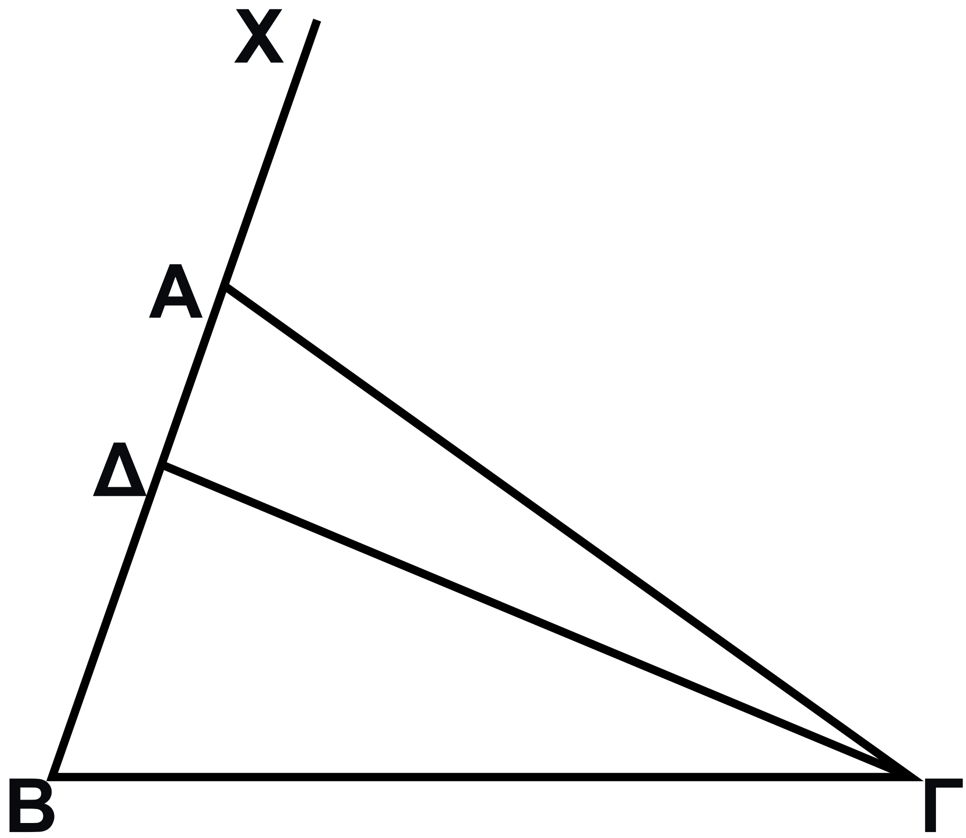


3. i) Επειδή $\hat{B} + \hat{\Gamma} < 180^\circ$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} < 90^\circ$.

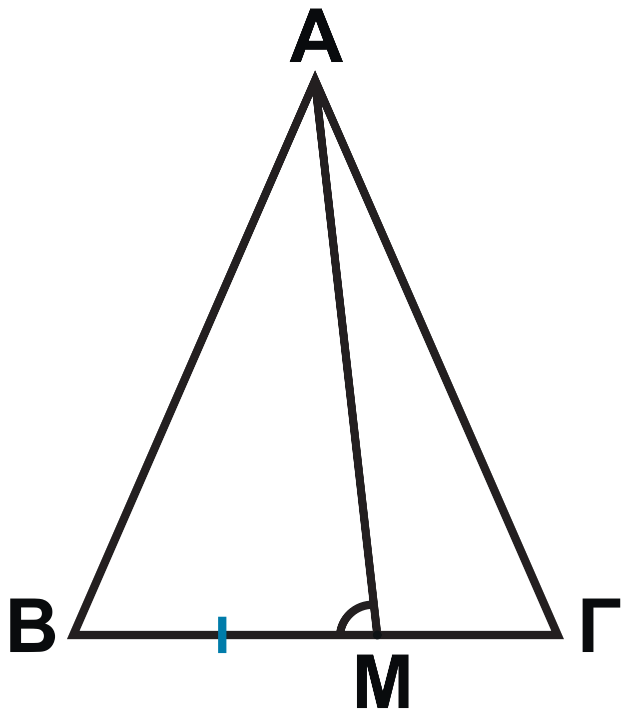


ii) Έστω ΑΔ το ύψος. Αν $\Delta \equiv B$ θα είχαμε $A\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B}$, δηλαδή $90^\circ = \hat{B}$ άτοπο. Αν το Δ ήταν σημείο της προέκτασης της ΓΒ προς το Β θα είχαμε $\hat{B} > \hat{\Delta} \Leftrightarrow \hat{B} > 90^\circ$ άτοπο. Άρα το Δ είναι εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ.

4. Αν το Δ βρίσκεται μεταξύ των Β, Α τότε η $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $\overset{\triangle}{\Delta A \Gamma}$, οπότε $B\hat{\Delta}\Gamma > B\hat{A}\Gamma$. Ομοίως για τις άλλες περιπτώσεις.

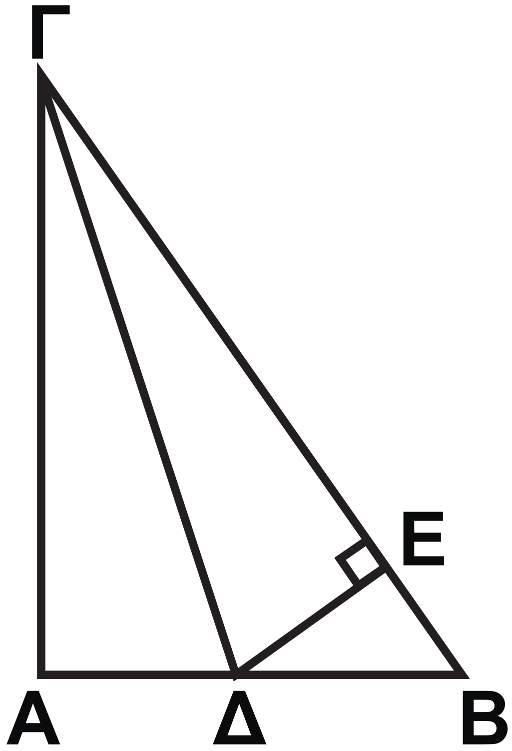


5. Είναι $\hat{M} > \hat{\Gamma}$ (1), αφού $\hat{M}$ εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$. Όμως $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ (2). Από (1), (2) παίρνουμε $\hat{M} > \hat{B}$, οπότε από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABM}$ προκύπτει ΑΒ > ΑΜ.

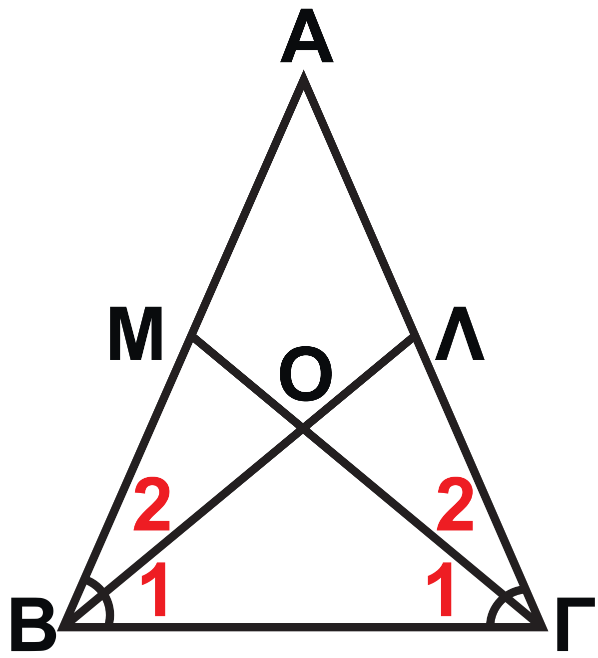


6. Φέρνουμε ΔΕ ⊥ ΒΓ. Επειδή ΓΔ διχοτόμος θα είναι ΑΔ = ΔΕ (1). Όμως από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{E\Delta B}$ προκύπτει ΔΕ < ΔΒ (2).

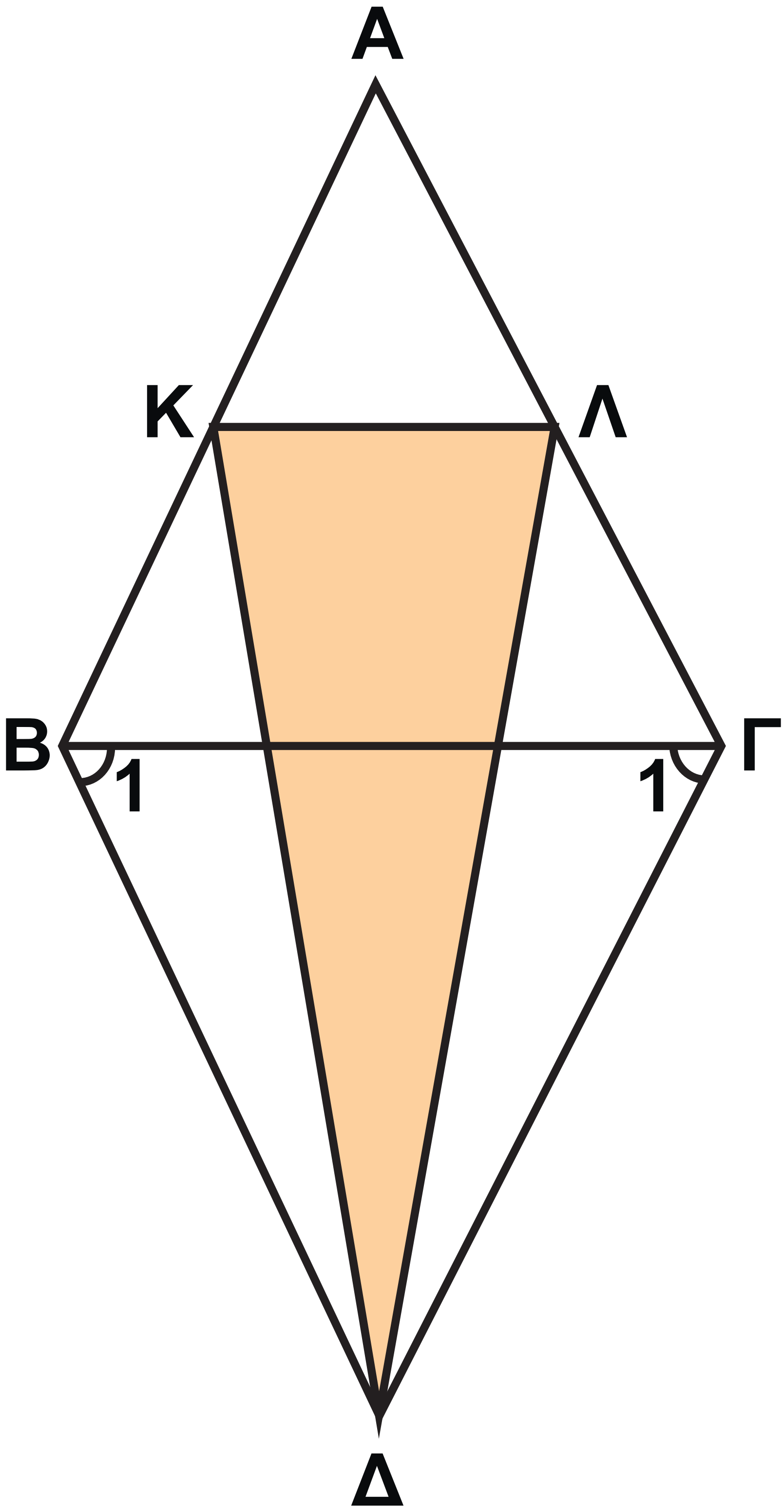
Από (1), (2) παίρνουμε ΑΔ < ΔΒ.



7. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{OMB}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{O\Gamma\Lambda}}$ είναι ίσα (Π-Γ-Π), επομένως $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$. Είναι και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ αφού ΟΒ = ΟΓ, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι ισοσκελές.

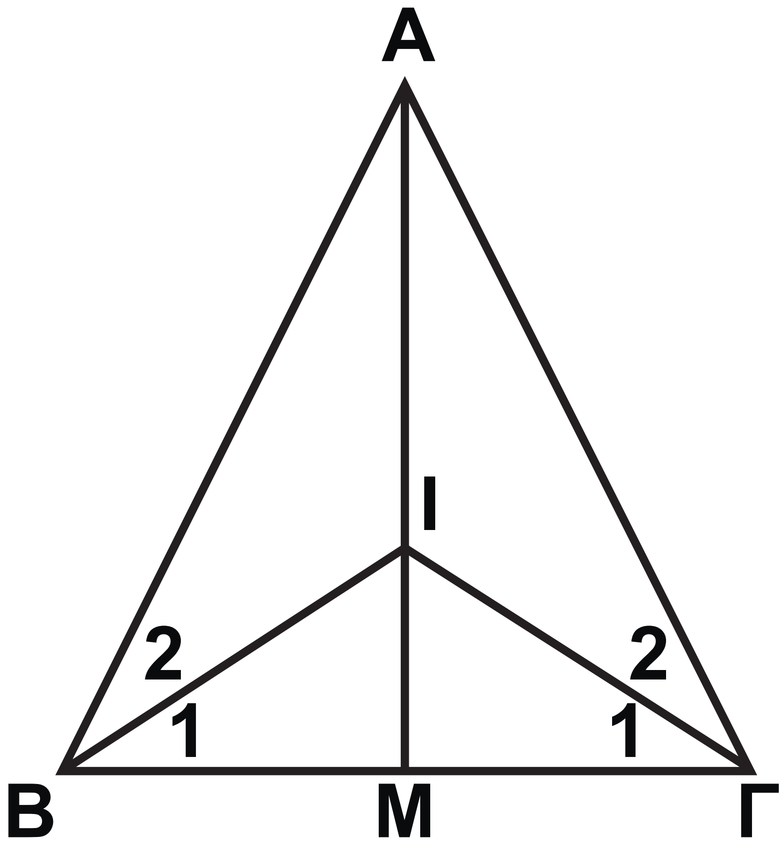


8. Επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ θα είναι $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$, οπότε και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και επομένως ΒΔ = ΔΓ. Έτσι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{ΚΒΔ}}$ και $\overset{\triangle}{\text{ΛΓΔ}}$ έχουν ΚΒ = ΛΓ, ΒΔ = ΓΔ και $\text{Κ}\hat{\text{Β}}\text{Δ} = \text{Λ}\hat{\Gamma}\text{Δ}$, οπότε είναι ίσα και επομένως ΔΚ = ΔΛ.


Α
Κ
Λ
Β
Γ
1
1
Δ

9. i) Είναι $\hat{B}_1 = \dfrac{\hat{B}}{2} = \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}_1$, οπότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{BI\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

ii) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AIB}$ και $\overset{\triangle}{AI\Gamma}$ είναι ίσα (Π-Π-Π), αφού έχουν $BI = \Gamma I$, $AB = A\Gamma$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$
$(\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2)$.

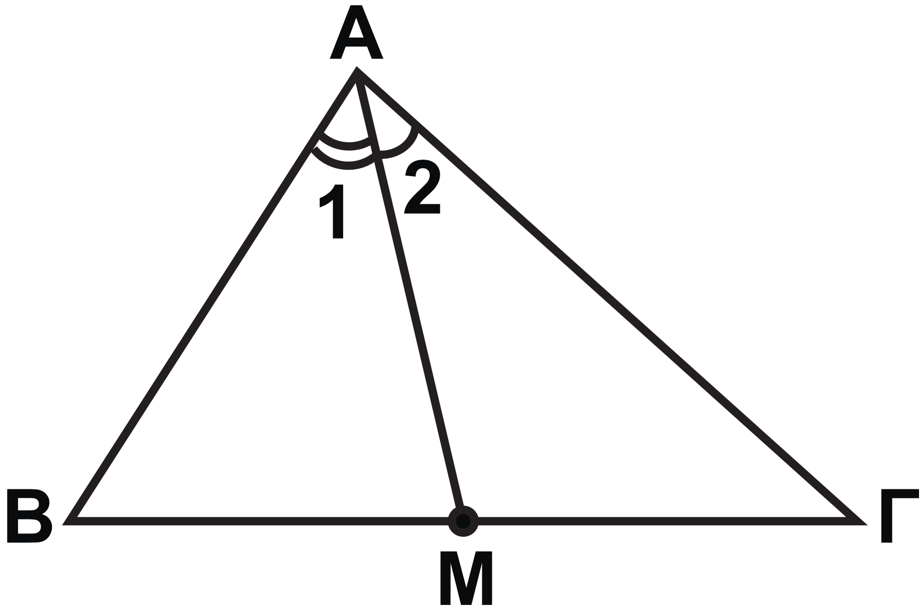


10. Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Pi K_1 K_2}$, $\overset{\triangle}{\Pi K_1 K_3}$ και $\overset{\triangle}{\Pi K_3 K_2}$ (σχ. Βιβλίου) παίρνουμε αντίστοιχα $K_1K_2 < 13$, $K_1K_3 < 17$ και $K_3K_2 < 16$. Προσθέτοντας αυτές κατά μέλη βρίσκουμε $K_1K_2 + K_1K_3 + K_3K_2 < 46$. Επομένως ο χιλιομετρητής θα έπρεπε να γράψει απόσταση μικρότερη του 46 και όχι 48.

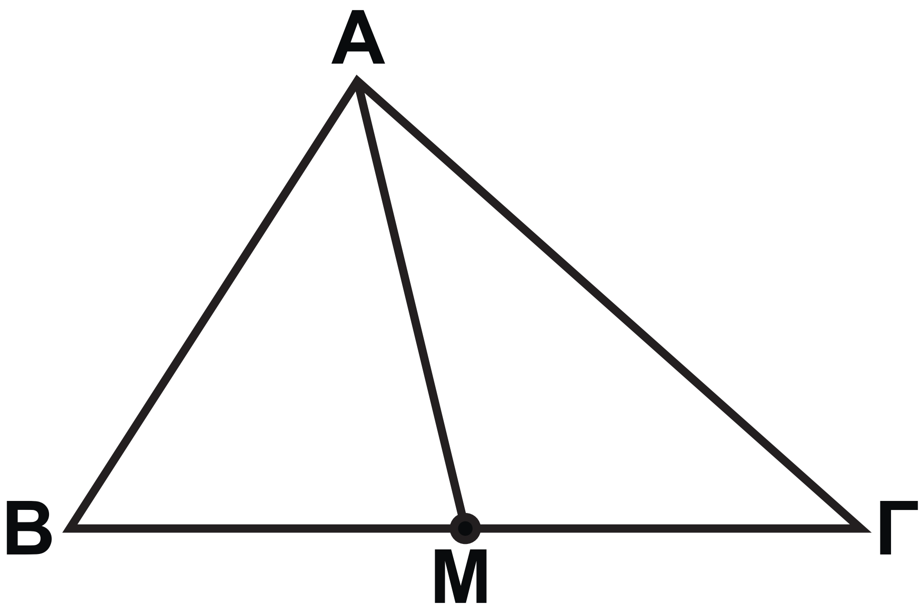
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Από την $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$ προκύπτουν $AM < BM$ και $AM < M\Gamma$. Απ' αυτές παίρνουμε αντίστοιχα $\hat{B} < \hat{A}_1$ και $\hat{\Gamma} < \hat{A}_2$, απ' όπου με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $\hat{B} + \hat{\Gamma} < \hat{A}$.

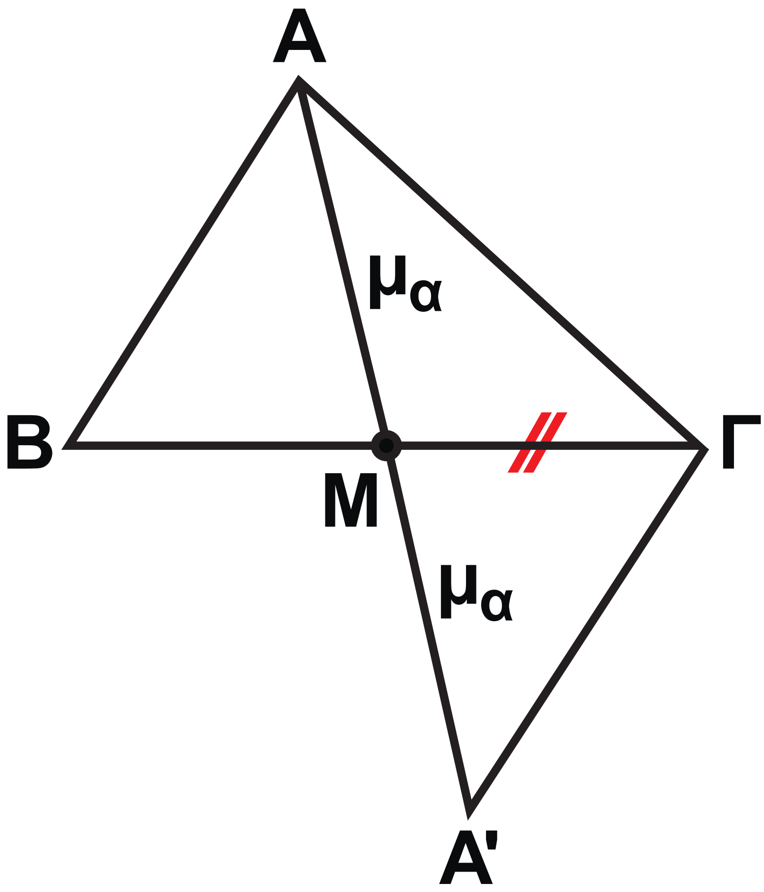
Όταν $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ ή $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$ ισχύουν αντίστοιχα $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A}$ ή $\hat{B} + \hat{\Gamma} > \hat{A}$.



2. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AMB}$ και $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$ έχουν δύο πλευρές ίσες (ΑΜ = κοινή, ΒΜ = ΜΓ) και τις τρίτες άνισες (ΑΒ < ΑΓ), οπότε (εφαρμογή § 3.12) οι απέναντι γωνίες θα είναι ομοίως άνισες $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$.



3. α) Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΑ′. Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{M}B$ και $A'\overset{\triangle}{M}\Gamma$ είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\Gamma A' = AB$ και $B\hat{A}M = \Gamma\hat{A}'M$ (1). Στο τρίγωνο $A\overset{\triangle}{\Gamma}A'$ είναι $A\Gamma > \Gamma A'$ (γιατί $A\Gamma > AB$), οπότε $M\hat{A}'\Gamma > M\hat{A}\Gamma$, από την οποία σύμφωνα με την (1) προκύπτει $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$.



β) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Gamma A'}}$ παίρνουμε:

$$\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{\Gamma A'} < \mathrm{AA'} < \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma A'} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta - \gamma < 2\mu_\alpha < \beta + \gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta - \gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

96 / 27 - 28

γ) Σύμφωνα με το β) έχουμε:

$\mu_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$, $\mu_\beta < \dfrac{\gamma+\alpha}{2}$ και

$\mu_\gamma < \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha + \beta +$ $+ \gamma = 2\tau$.

4. Αν τα Σ, Ο, Μ δεν είναι συνευθειακά με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Sigma M O}$ παίρνουμε:

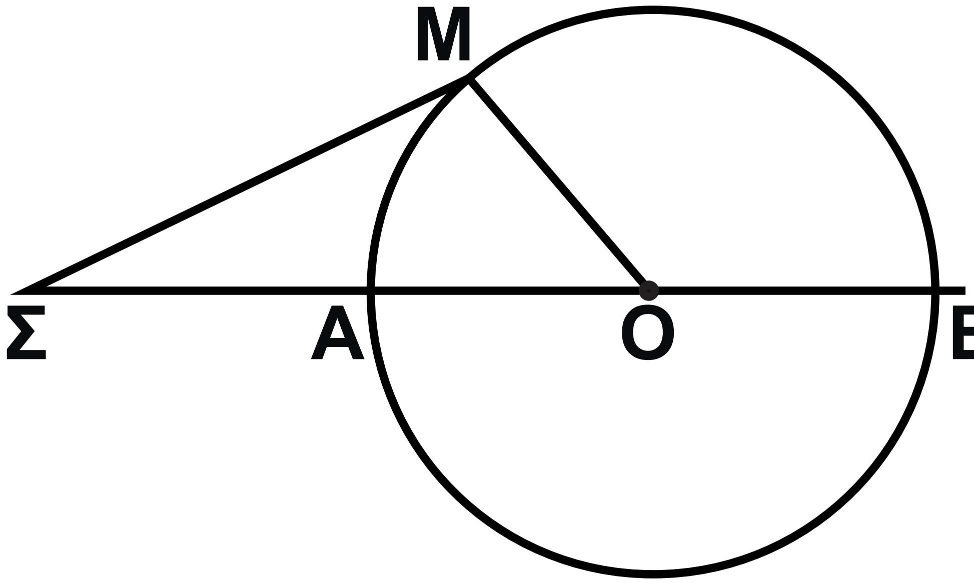
$\Sigma O - OM < \Sigma M < \Sigma O + OM \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Sigma O - OA < \Sigma M < \Sigma O + OB \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Sigma A < \Sigma M < \Sigma B$.

- Αν $M \equiv A$ τότε: $\Sigma A = \Sigma M < \Sigma B$ και

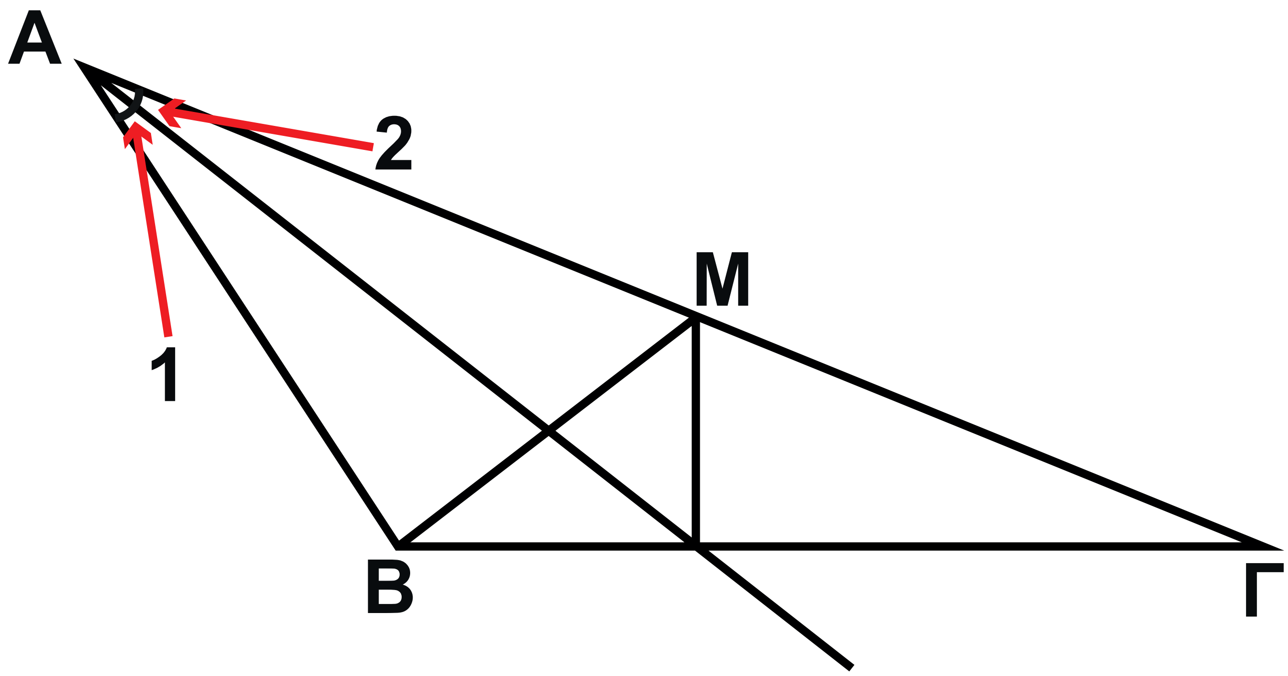
- αν $M \equiv B$ είναι $ΣA < ΣM = ΣB$.



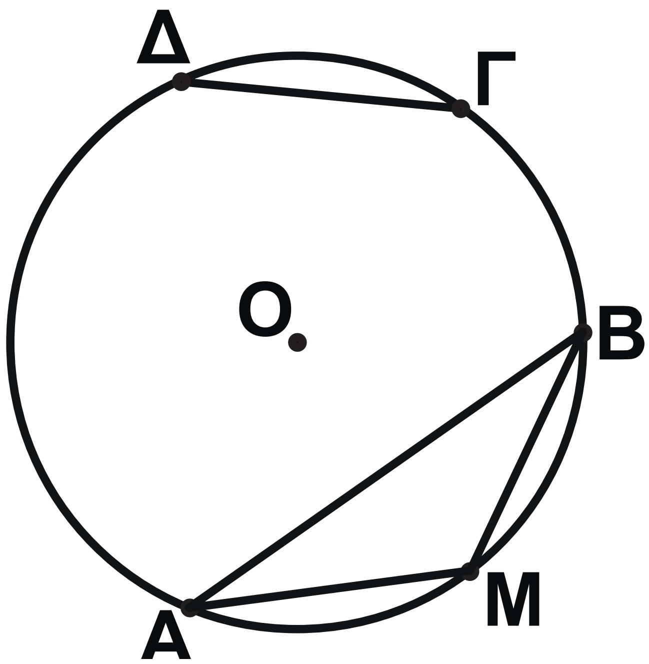
5. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABM}$ η διχοτόμος είναι και ύψος, επομένως είναι ισοσκελές, δηλαδή

$$AB = AM = \frac{1}{2}AΓ \Leftrightarrow AΓ = 2AB \ (1).$$

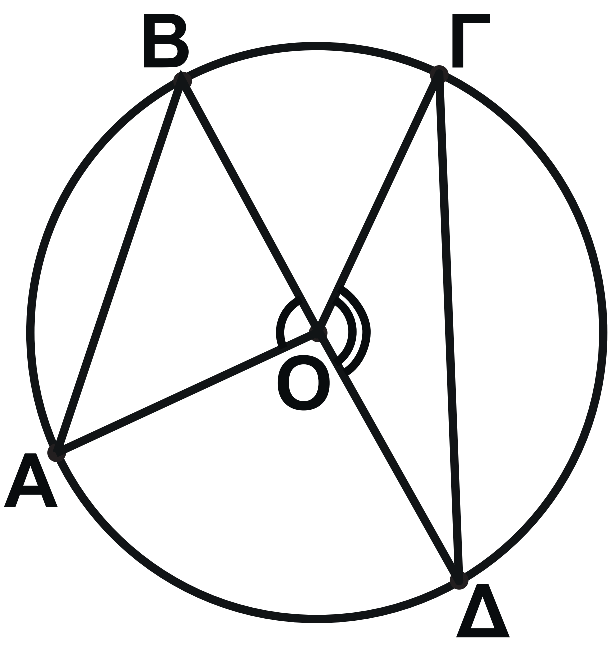
Με εφαρμογή της τριγ. ανισότητας στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABΓ}$ βρίσκουμε $AΓ < AB + BΓ \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow 2AB < AB + BΓ \Leftrightarrow AB < BΓ$.



6. Θεωρούμε το μέσο του τόξου ΑΒ, οπότε $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και ΑΜ = ΜΒ = = ΓΔ. Τότε, λόγω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AMB}$, έχουμε ότι: ΑΜ + ΜΒ > ΑΒ ή 2ΓΔ > ΑΒ.



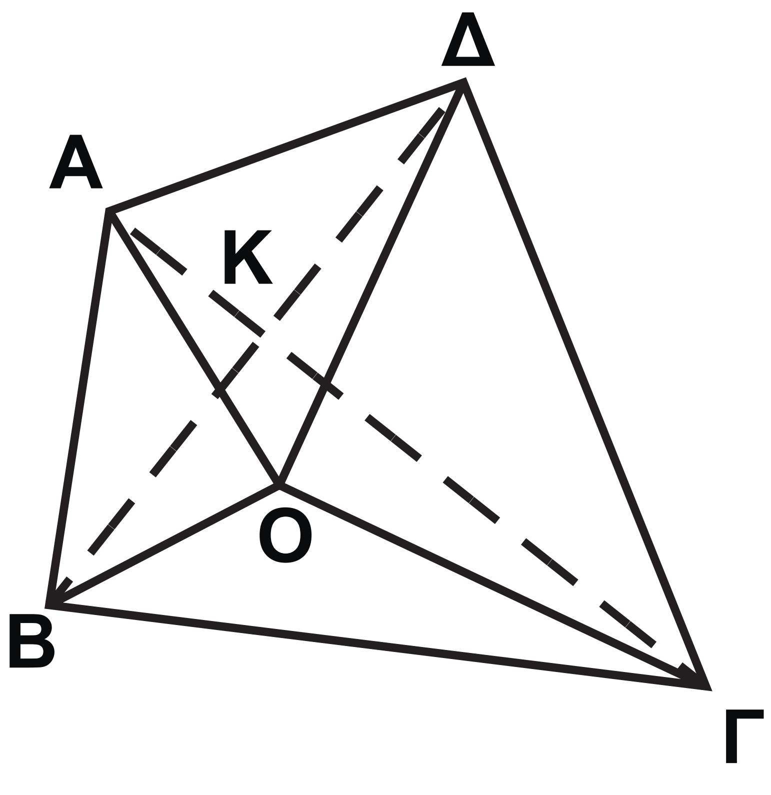
7. Έστω ότι $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} > \overset{\frown}{AB}$, οπότε η επίκεντρη γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι μεγαλύτερη της $A\hat{O}B$. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Gamma O\Delta}$ και $\overset{\triangle}{AOB}$ έχουν δύο ζεύγη πλευρών ίσα ($OA = OB = O\Gamma = O\Delta = R$) και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, οπότε $\Gamma\Delta > AB$. (εφ. § 3.11).



Το αντίστροφο αποδεικνύεται εύκολα με απαγωγή σε άτοπο.

Σύνθετα Θέματα

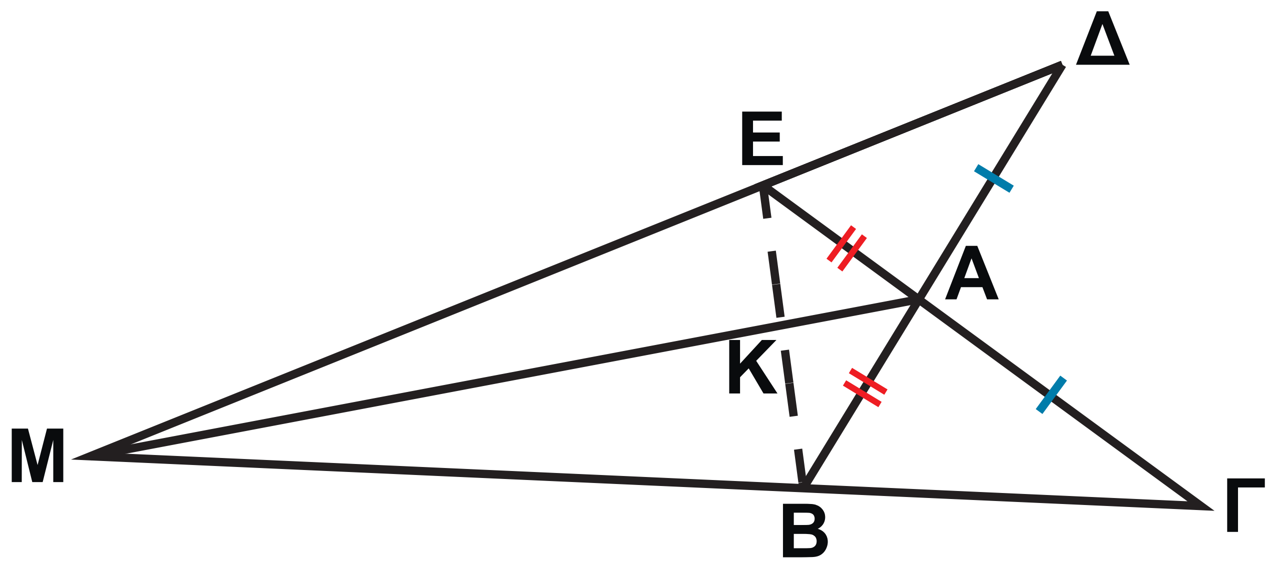
1. i) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{O}B$, $B\overset{\triangle}{O}\Gamma$, $\Gamma\overset{\triangle}{O}\Delta$ και $\Delta\overset{\triangle}{O}A$ παίρνουμε αντίστοιχα: $AB < OA + OB$, $B\Gamma < OB + O\Gamma$, $\Gamma\Delta < O\Gamma + O\Delta$ και $A\Delta < O\Delta + OA$ από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.



ii) Αν το Ο δεν είναι σημείο της ΑΓ από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AO\Gamma}}$ προκύπτει ότι: $\mathrm{OA} + \mathrm{O\Gamma} > \mathrm{A\Gamma}$ και αν το Ο είναι σημείο της ΑΓ θα είναι $\mathrm{OA} + \mathrm{O\Gamma} \geq \mathrm{A\Gamma}$ (1). Όμοια παίρνουμε $\mathrm{OB} + \mathrm{O\Delta} \geq \mathrm{B\Delta}$ (2).
Από (1), (2) προκύπτει
$\mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma} + \mathrm{O\Delta} \geq \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{B\Delta}$ η οποία σημαίνει ότι ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $\mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma} + \mathrm{O\Delta}$ είναι η $\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{B\Delta}$ και συμβαίνει όταν το Ο είναι σημείο της ΑΓ και της ΒΔ, δηλαδή όταν $\mathrm{O} \equiv \mathrm{K}$.

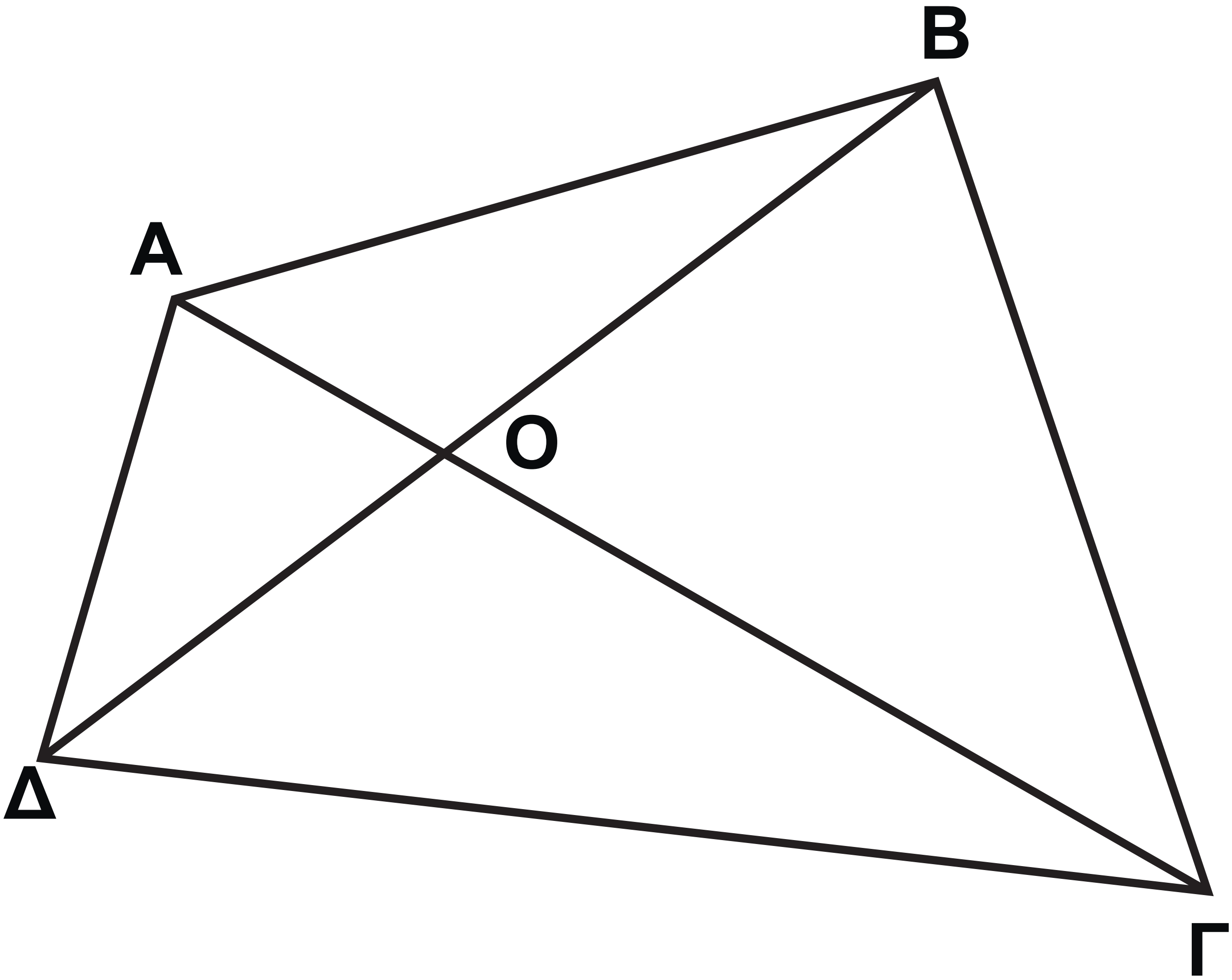
2. i) Αφού το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AEB}}$ είναι ισοσκελές, θα είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ και επειδή τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AE\Delta}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι ίσα, θα είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{\Delta} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{\Gamma}$.
Επομένως $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{\Delta} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{\Gamma}$ και

$M\hat{E}B = M\hat{B}E$, οπότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{MBE}$ είναι ισοσκελές.



ii) Αν φέρουμε τη διάμεσο ΑΚ του ισοσκελούς τριγώνου $\overset{\triangle}{AEB}$ θα είναι ύψος και διχοτόμος, όμοια και η ΜΚ, οπότε τα σημεία Μ, Κ, Α είναι συνευθειακά.

3. i) Είναι ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ (από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$) ΑΓ < ΑΔ + ΔΓ (από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$) και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.



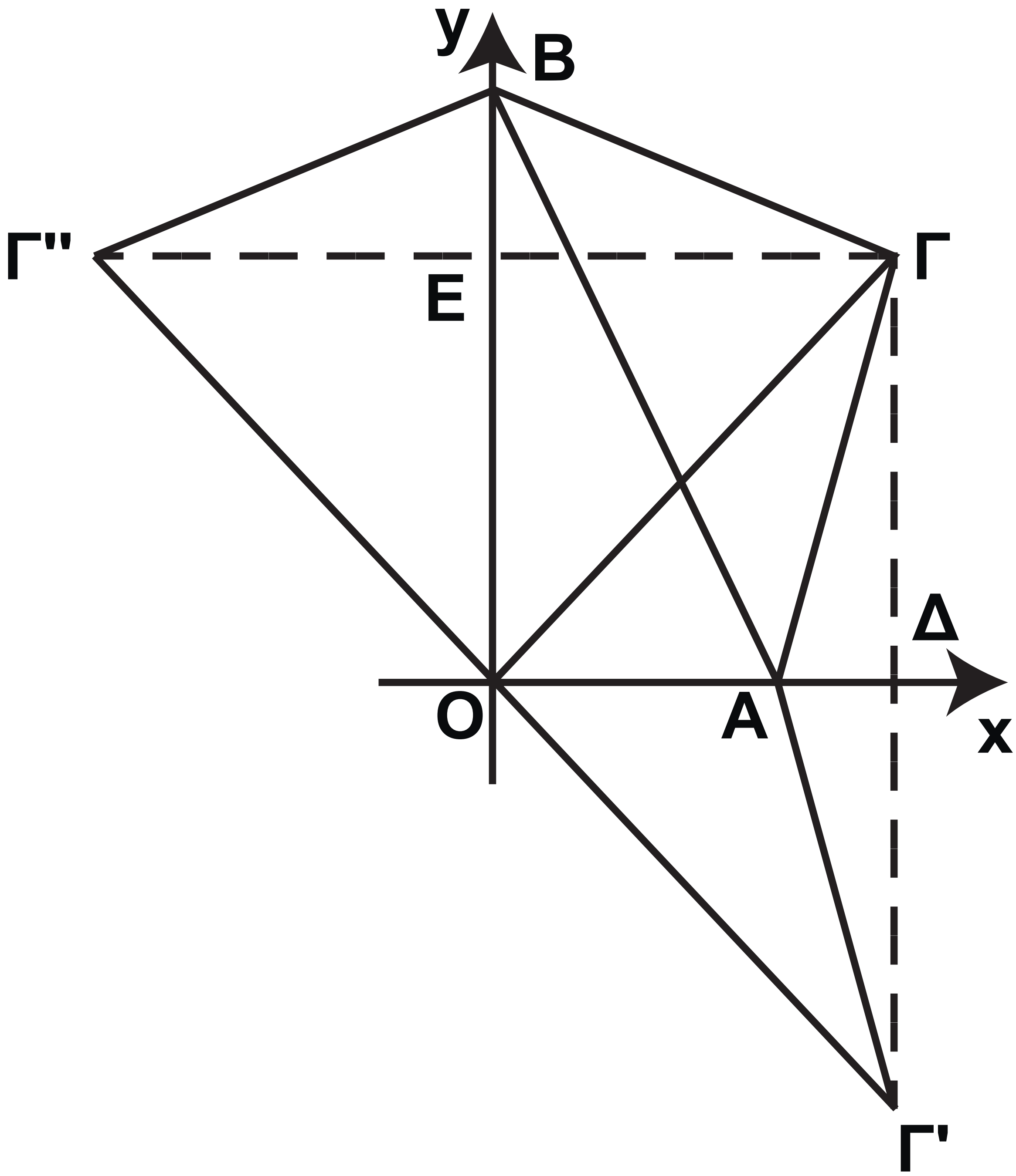
ii) Είναι ΑΟ + ΟΒ > ΑΒ και ΔΟ + ΟΓ > ΓΔ και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.

iii) Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο ανισότητες (ii) έχουμε ότι:

$$\frac{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ}{2} < ΑΓ + ΒΔ.$$

Επίσης προσθέτοντας κατά μέλη τις ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ, ΑΓ < ΑΔ + ΔΓ, ΒΔ < ΑΒ + ΑΔ και ΒΔ < ΒΓ + ΓΔ καταλήγουμε ότι ΑΓ + ΒΔ < ΑΒ + + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ.

4. Από το Γ φέρουμε κάθετες στις Οx, Οy που τις τέμνουν στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα και παίρνουμε τμήματα ΓΔ = Γ′Δ και ΓΕ = Γ″Ε (συμμετρικά). Τότε η περίμετρος του $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ είναι Γ′Α + ΑΒ + ΒΓ″ > > Γ′Γ″ = 2ΟΓ.



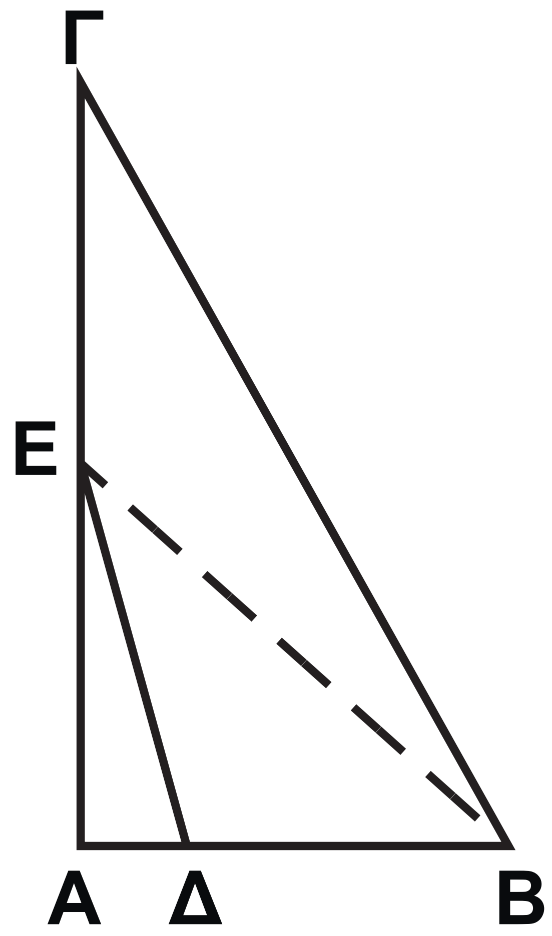
Σχόλιο:

Τα σημεία Γ′, Ο, Γ″ είναι συνευθειακά. (Άσκηση 6-§ 3.8-3.9).

§ 3.13

Ασκήσεις Εμπέδωσης

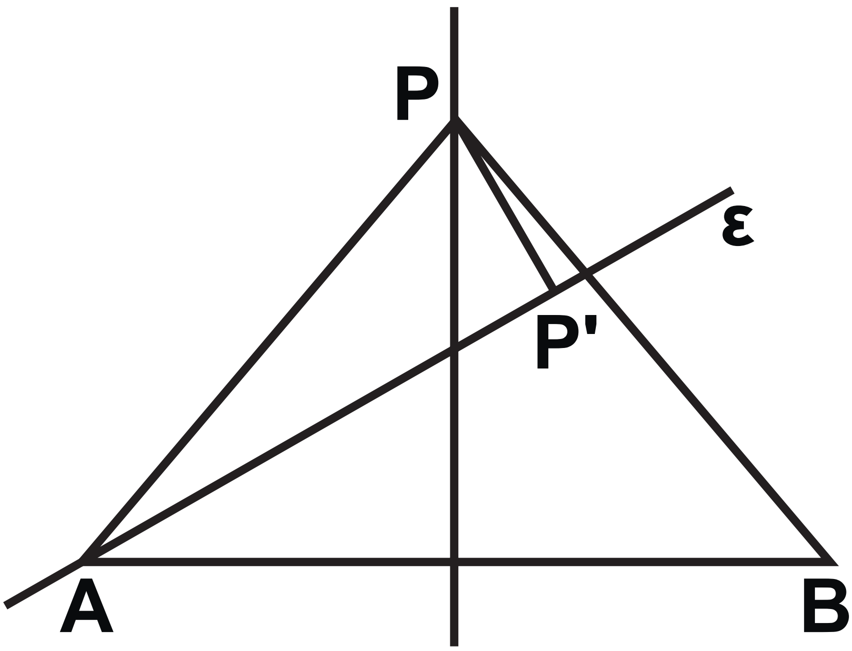
1. Επειδή ΕΑ κάθετος στην ΑΒ και ΑΔ < ΑΒ θα είναι ΔΕ < ΕΒ (1). Επίσης ΒΑ κάθετος στην ΑΓ και ΑΕ < ΑΓ. Άρα συνεπάγεται ότι ΕΒ < ΒΓ (2). Από (1), (2) προκύπτει ότι ΔΕ < ΒΓ.



2. Το ΑΗ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ (σχ. Βιβλίου), άρα ΑΒ = ΑΓ. Τα τμήματα ΑΓ και ΑΔ είναι πλάγια και επειδή ΗΓ < ΗΔ και ΑΗ κάθετος προκύπτει ότι ΑΓ < ΑΔ.

3. i) Έστω Ρ′ το ίχνος της καθέτου από το Ρ στην ε. Αν το Ρ′ δεν ταυτίζεται με το Α τότε θα είναι ΡΒ = ΡΑ > ΡΡ′.

ii) Θα πρέπει το Ρ′ να ταυτίζεται με το Α, επομένως η ε να είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΡΑ, στο σημείο Α.

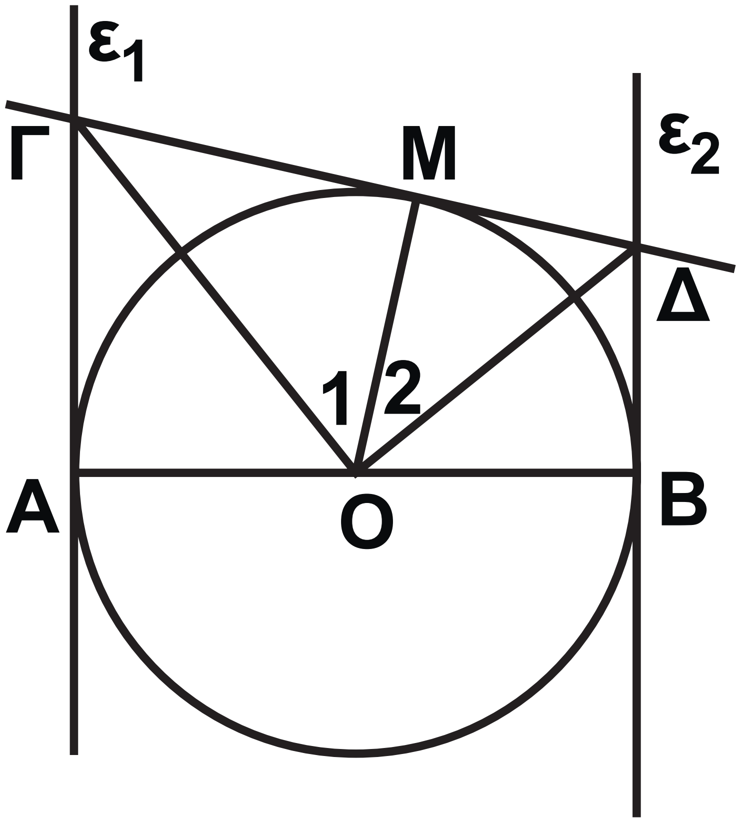


§ 3.14-3.15

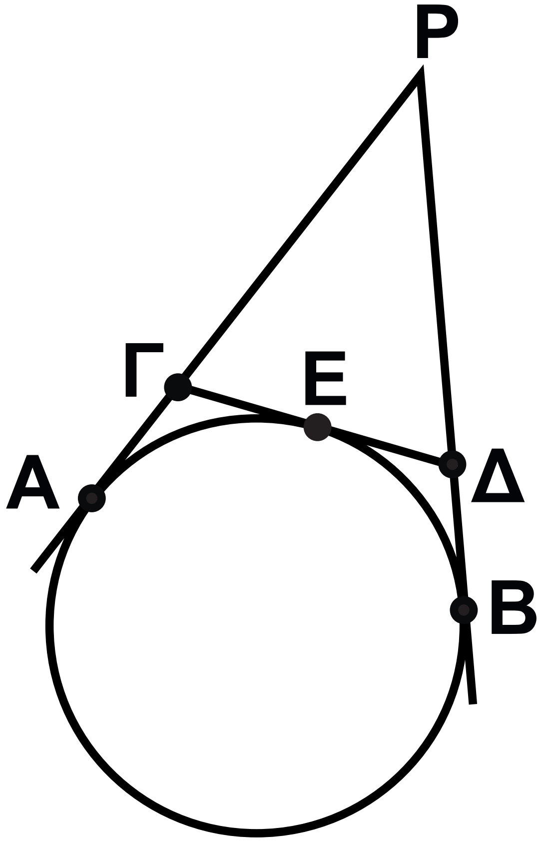
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Οι χορδές είναι ίσες γιατί έχουν ίσα αποστήματα, αφού το απόστημα κάθε χορδής ισούται με την ακτίνα ρ του μικρού κύκλου.

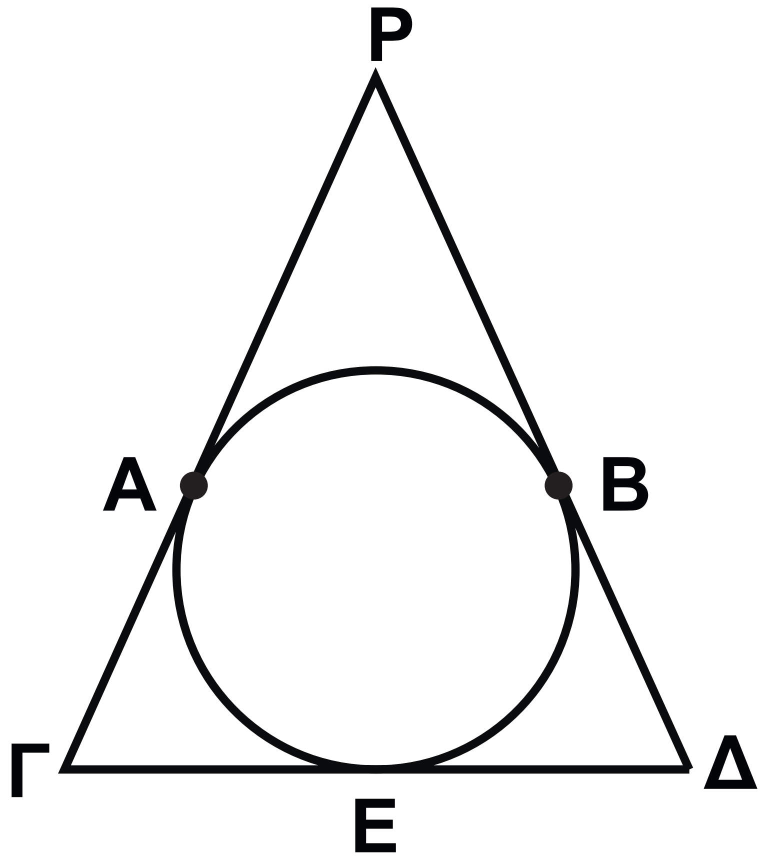
2. Έστω Μ το σημείο επαφής της ε με τον κύκλο. Η ΟΓ είναι διχοτόμος της $\hat{ΑΟΜ}$ και η ΟΔ διχοτόμος της $\hat{ΜΟΒ}$, οπότε $ΟΓ \perp ΟΔ \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \hat{ΓΟΔ} = 90^\circ$ (διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών).



3. Υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις:
Για το Σχ. 1 έχουμε ότι:
ΡΓ + ΓΔ + ΔΡ = ΡΑ – ΑΓ + ΓΕ + + ΕΔ + ΡΒ – ΡΔ = 2ΡΑ.
Για το Σχ. 2 έχουμε ότι:
ΡΓ + ΓΔ + ΔΡ = ΡΑ + ΑΓ + ΓΕ + + ΕΔ + ΒΡ = 2(ΡΑ + ΓΔ).



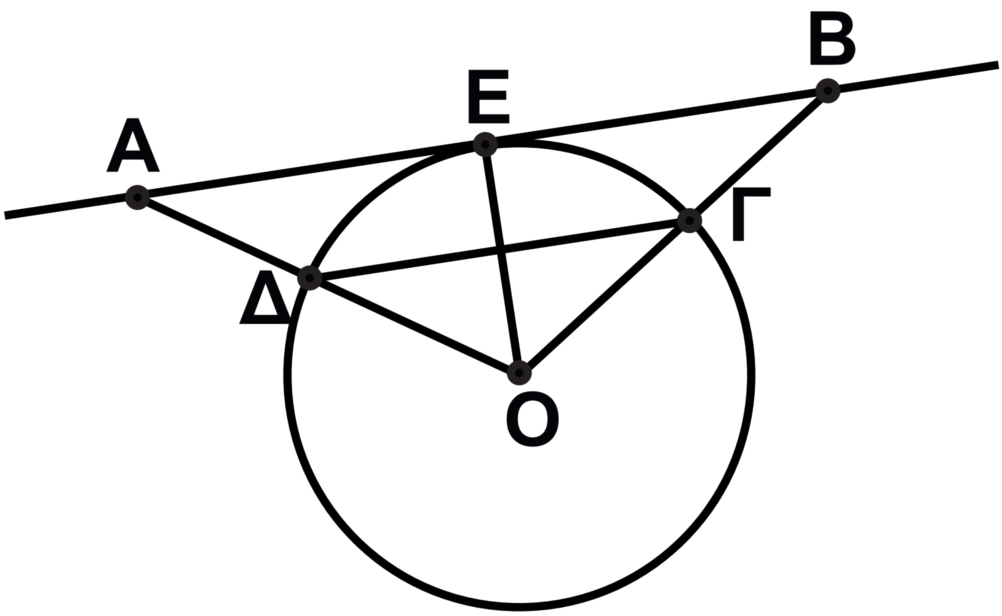
Σχήμα 1



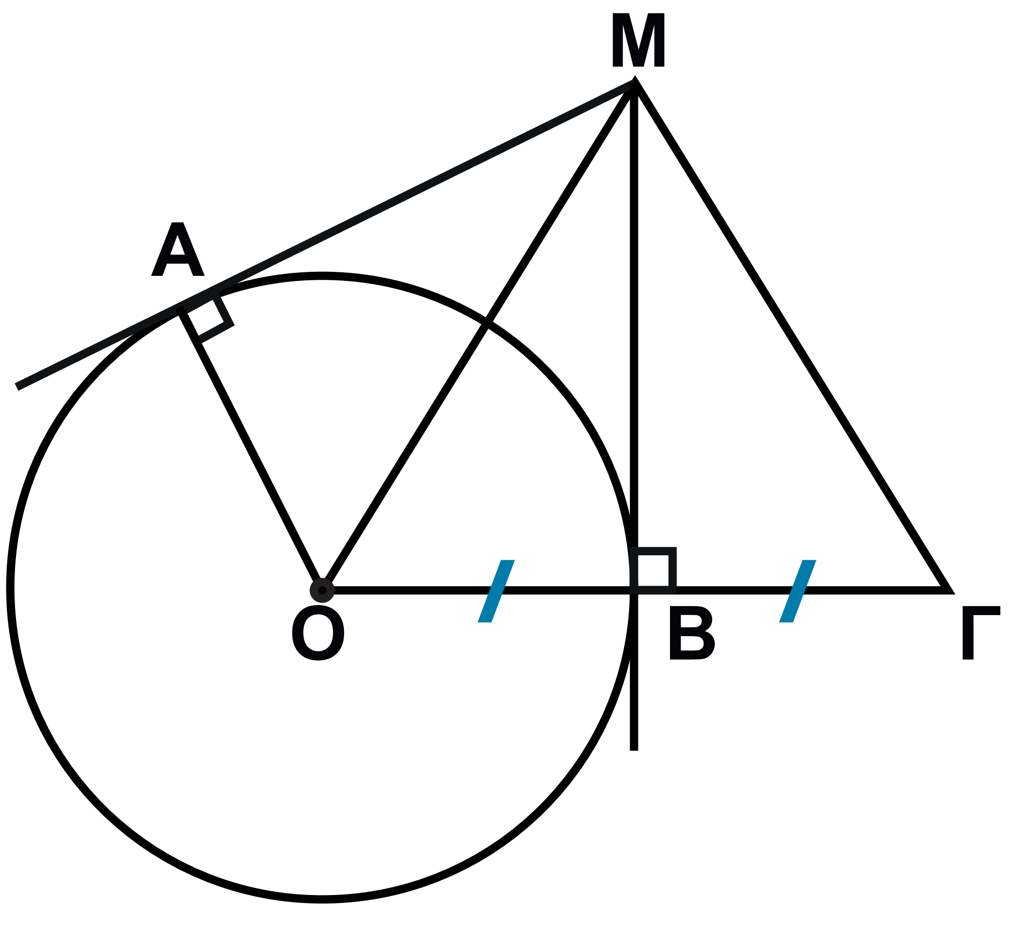
Σχήμα 2

Αποδεικτικές Ασκήσεις

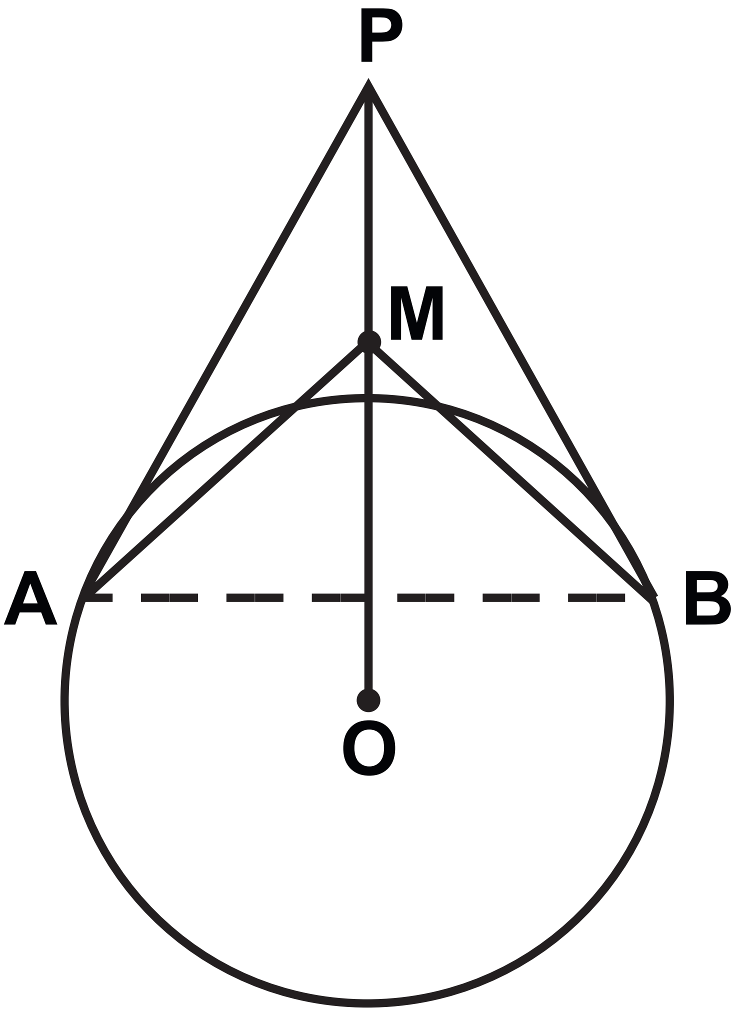
1. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAB}$ η ΟΕ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, δηλαδή ΟΑ = ΟΒ (1).
   Όμως και ΟΔ = ΟΓ (2) (ως ακτίνες). Με αφαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ΑΔ = ΒΓ.



2. **Φέρουμε τη ΜΟ, οπότε οι γωνίες $\hat{AMO}$ και $\hat{OMB}$ είναι ίσες. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OM\Gamma}$ είναι ισοσκελές, οπότε η ΜΒ είναι και διχοτόμος, άρα $\hat{OMB} = \hat{BM\Gamma}$. Άρα $\hat{AM\Gamma} = 3\hat{BM\Gamma}$.**



3. Τα ευθύγραμμα τμήματα PA και PB είναι ίσα, ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από ένα σημείο προς τον κύκλο. Επομένως το τρίγωνο $\overset{\triangle}{PAB}$ είναι ισοσκελές, οπότε $P\hat{A}B = P\hat{B}A$.
Επίσης, η PO είναι μεσοκάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB, οπότε MA = MB και επομένως $M\hat{A}B = M\hat{B}A$.
Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει $M\hat{A}P = M\hat{B}P$.



§ 3.16

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. i) Ο ένας κύκλος εσωτερικός του άλλου.

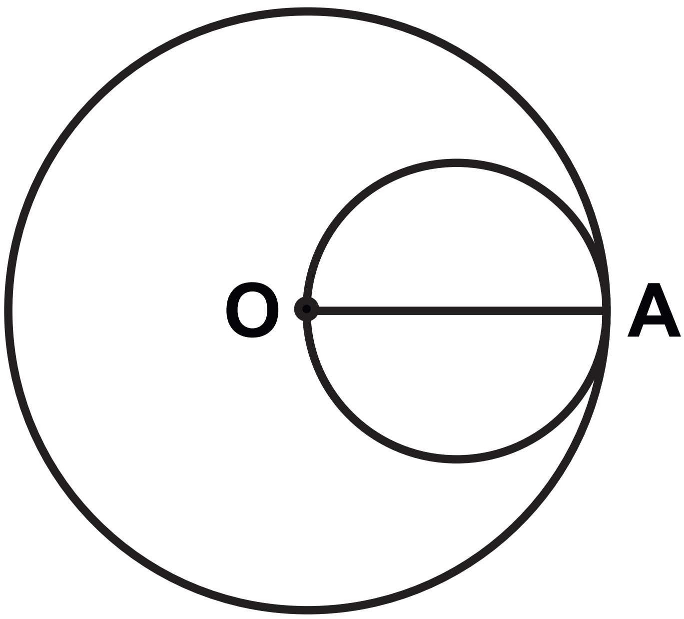
ii) Εφάπτονται εσωτερικά.

iii) Τέμνονται.

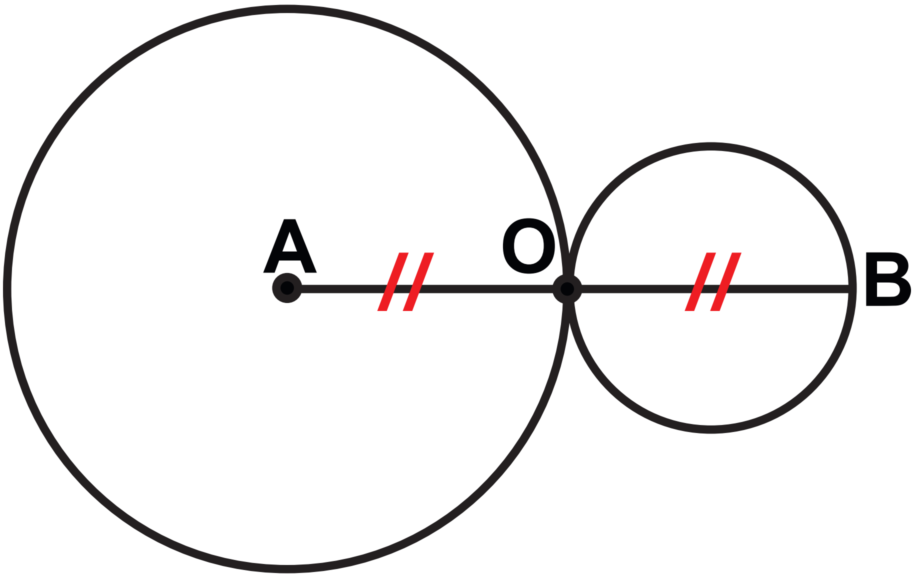
iv) Εφάπτονται εξωτερικά.

v) Ο ένας κύκλος εξωτερικός του άλλου.

2. Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

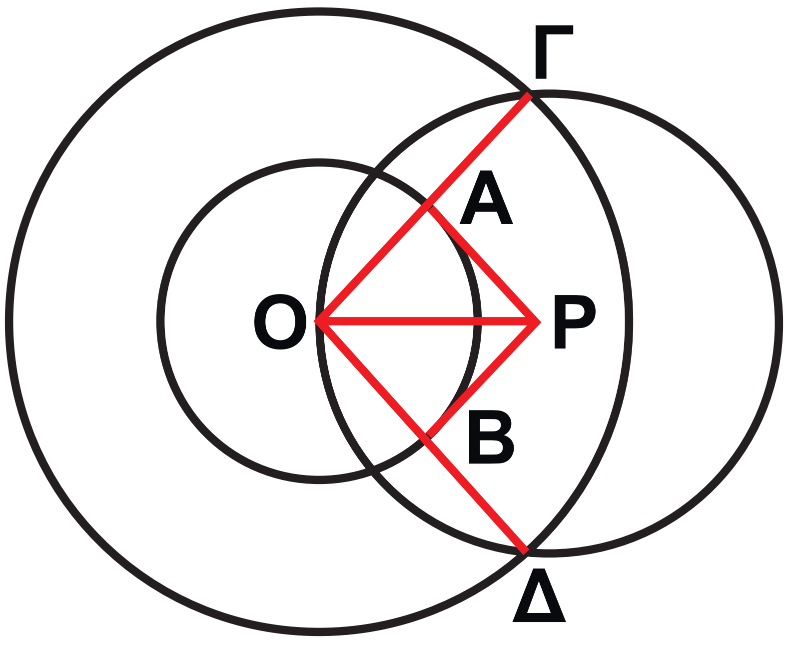


3. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

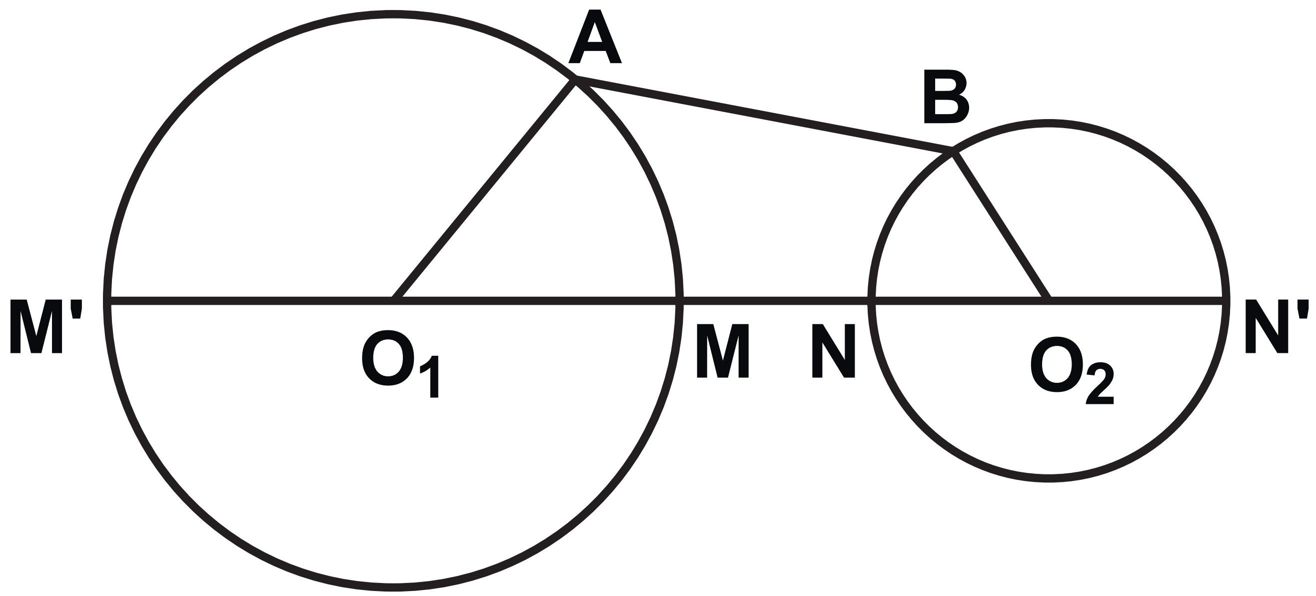
1. i) Για να τέμνονται οι κύκλοι $(O, 2R)$ και (P, PO) πρέπει να ισχύει:
$2R - PO < PO < PO + 2R$, γιατί $PO < 2R$.
Η δεξιά ανισότητα προφανώς ισχύει. Για την αριστερή έχουμε:
$2R - PO < PO \Leftrightarrow 2R < 2PO \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow PO > R$ που ισχύει αφού P εξωτερικό σημείο του (O, R).



ii) Επειδή (ΟΓ) = 2R > R το Γ είναι εξωτερικό σημείο του (Ο, R) , άρα η ΟΓ τέμνει τον (Ο, R) στο Α. Όμοια η ΟΔ τέμνει τον (Ο, R) στο Β.

iii) Επειδή (ΟΑ) = R και (ΟΓ) = 2R το Α είναι μέσο της χορδής ΟΓ του κύκλου (Ρ, ΡΟ), οπότε ΡΑ ⊥ ΟΓ, επομένως ΡΑ εφαπτόμενη του (Ο, R). Όμοια αποδεικνύεται ότι και η ΡΒ είναι εφαπτόμενη του (Ο, R).

2. i) Επειδή $O_1O_2 > R_1 + R_2$ ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου.

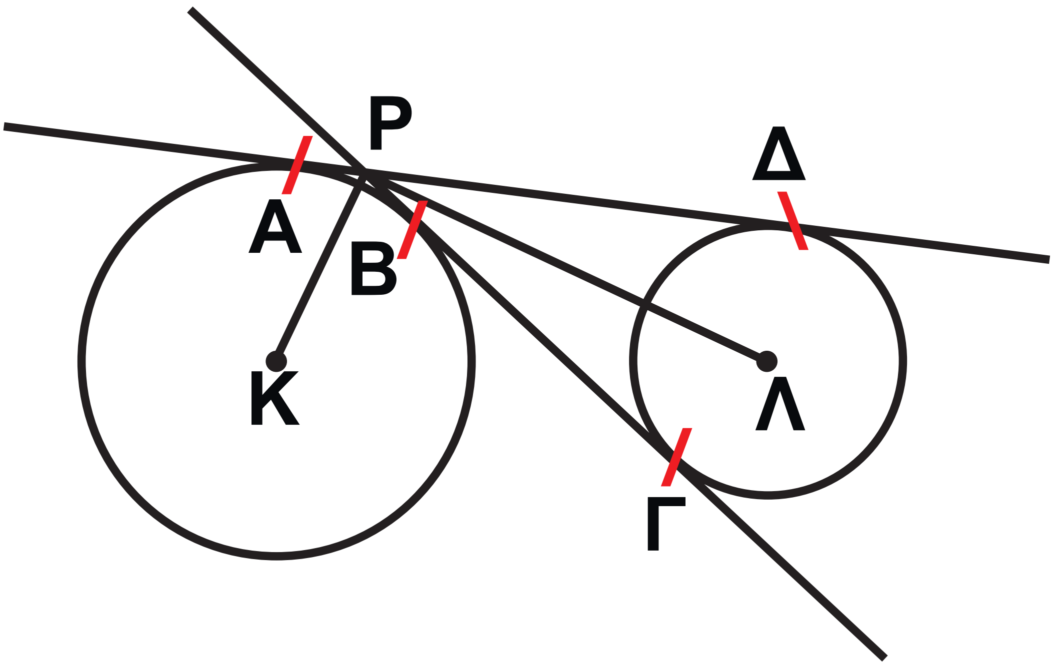


ii) • Έστω ότι το A δεν συμπίπτει με το M ή το B δεν συμπίπτει με το N. Τότε σύμφωνα με το σχόλιο της § 3.11 έχουμε: $O_1O_2 < O_1A + AB + BO_2$ ή $R_1 + MN + R_2 < R_1 + AB + R_2$ ή $MN < AB$.
Όταν $A \equiv M$ και $B \equiv N$ τότε $MN = AB$.
Άρα γενικά $MN \leq AB$.

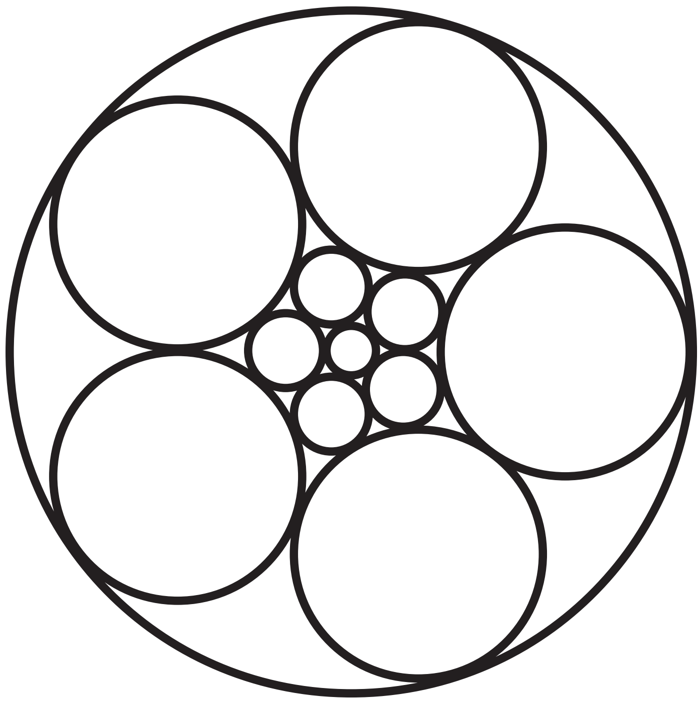
• Έστω πάλι ότι το A δεν συμπίπτει με το M′ ή το B με το N′ τότε: $AB < AO_1 + O_1O_2 + O_2B$ ή

$AB < M'O_1 + O_1O_2 + O_2N'$ ή
$AB < M'N'$.
Όταν $A \equiv M'$ και $B \equiv N'$ τότε
$AB = M'N'$, γενικά λοιπόν θα
ισχύει $AB \leq M'N'$.

3. Η ΚΡ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{P}B$ και η ΡΛ διχοτόμος της $\Gamma\hat{P}\Delta$.
Όμως οι γωνίες $A\hat{P}B$ και $B\hat{P}\Delta$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές, επομένως $K\hat{P}\Lambda = 90^\circ$.



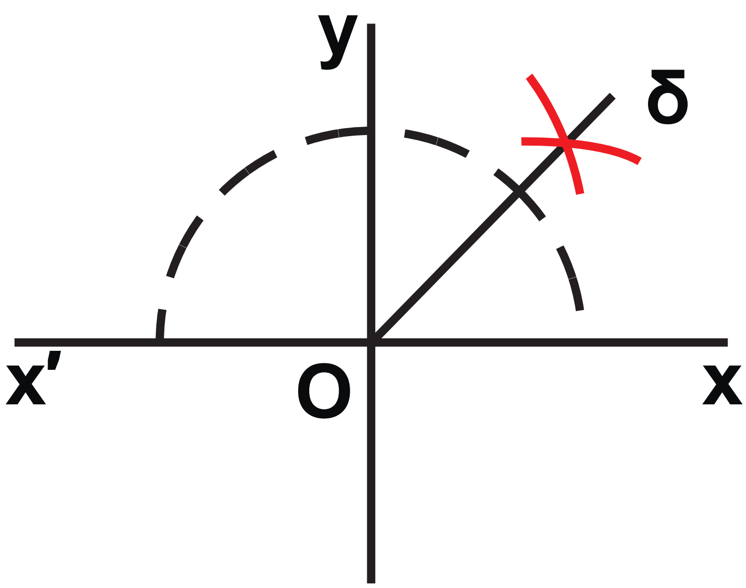
4. Η απάντηση είναι καταφατική και οι κύκλοι φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



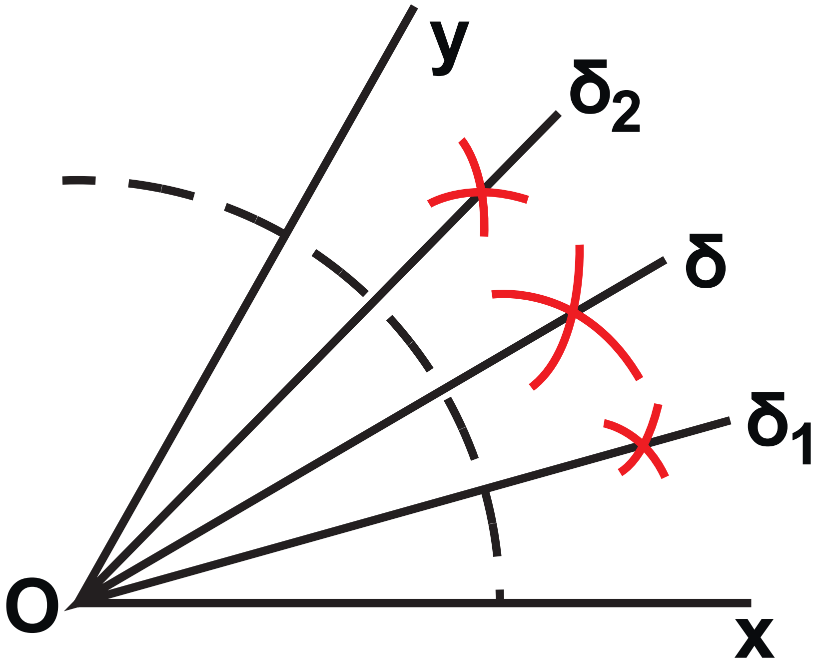
§ 3.17-3.18

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Κατασκευάζουμε γεωμετρικά μια ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και στη συνέχεια κατασκευάζουμε τη διχοτόμο Οδ αυτής. Τότε $(x\hat{O}\delta) = 45^\circ$.



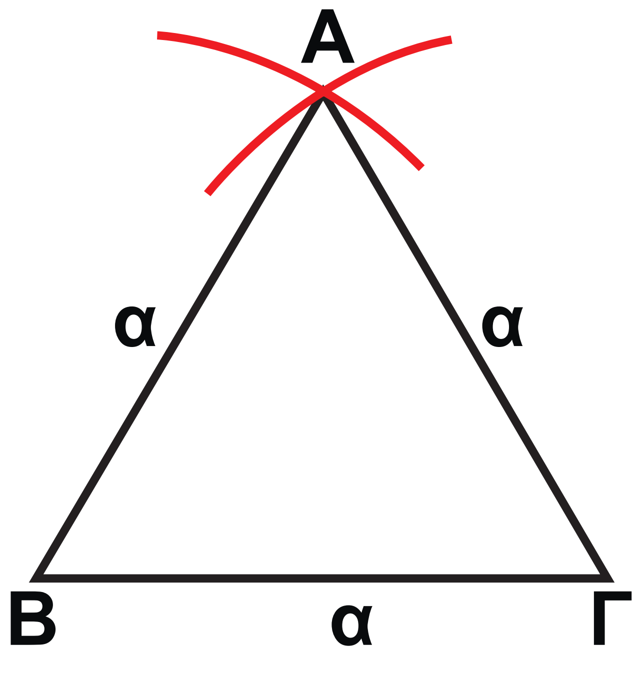
2. Έστω γωνία $x\hat{O}y$. Κατασκευάζουμε τη διχοτόμο Οδ αυτής και στη συνέχεια τις διχοτόμους $O\delta_1$ και $O\delta_2$ των $x\hat{O}\delta$ και $\delta\hat{O}y$ αντίστοιχα.



3. Θεωρούμε τμήμα ΒΓ = α και γράφουμε τους κύκλους (Β, α) και (Γ, α). Αν Α είναι ένα κοινό σημείο των κύκλων αυτών το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι το ζητούμενο.

- Πράγματι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισόπλευρο με ΒΓ = α, από υπόθεση, ΑΒ = ΑΓ = α, ως ακτίνες των κύκλων (Β, α) και (Γ, α).

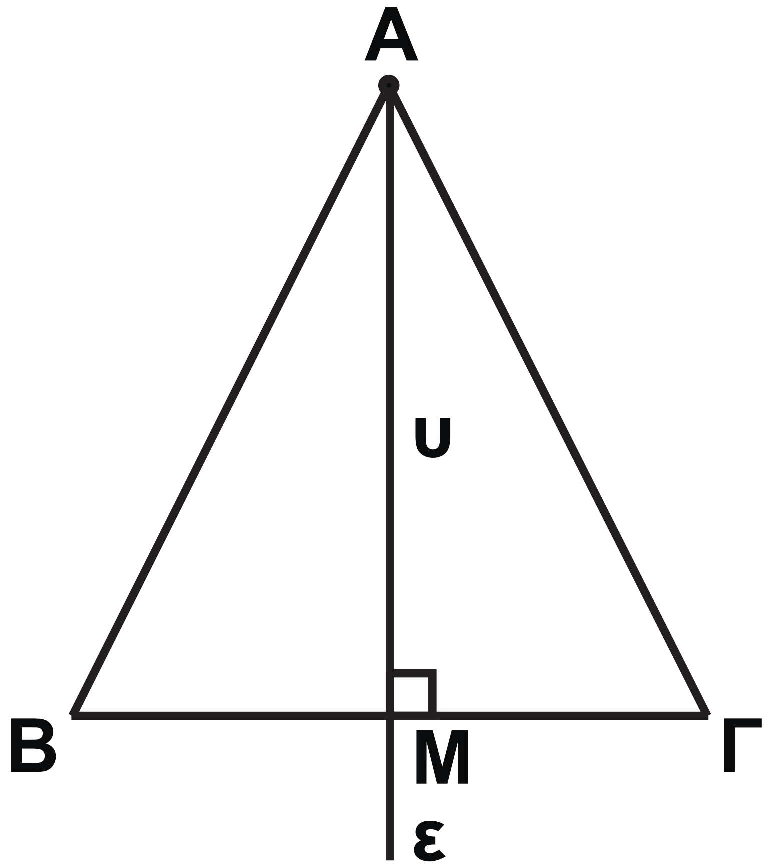
- **Επειδή α − α < α < α + α, οι κύκλοι τέμνονται και το πρόβλημα έχει πάντα λύση. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{Α'ΒΓ}}$ με Α' το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (Β, α) και (Γ, α) είναι ίσο με το $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$, επομένως η λύση είναι μοναδική.**



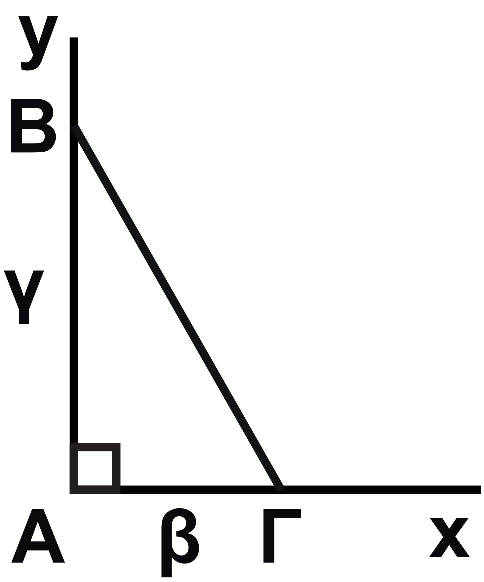
4. Θεωρούμε τμήμα ΒΓ = α και κατασκευάζουμε την μεσοκάθετο ε αυτού. Αν η ε τέμνει τη ΒΓ στο Μ και πάνω σ' αυτήν πάρουμε σημείο

Α ώστε ΑΜ = υ, τότε το ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

- Πράγματι, ΑΒ = ΑΓ και προφανώς ΒΓ = α και ΑΜ = υ.
- Το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση.

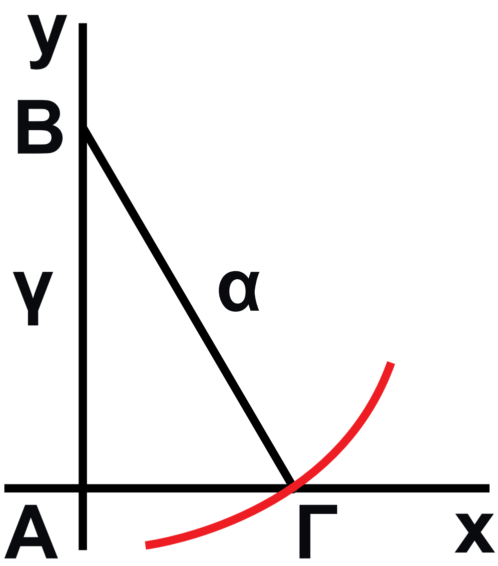


5. α) Κατασκευάζουμε ορθή γωνία $x\hat{A}y$ και πάνω στις πλευρές της Αx, Αy παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Γ, Β ώστε ΑΓ = β και ΑΒ = γ. Το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση.



β) Κατασκευάζουμε ορθή γωνία $x\hat{A}y$ και πάνω στην Αy παίρνουμε σημείο Β ώστε ΑΒ = γ. Στη συνέχεια γράφουμε τον κύκλο (Β, α) που τέμνει την Αx στο Γ. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι

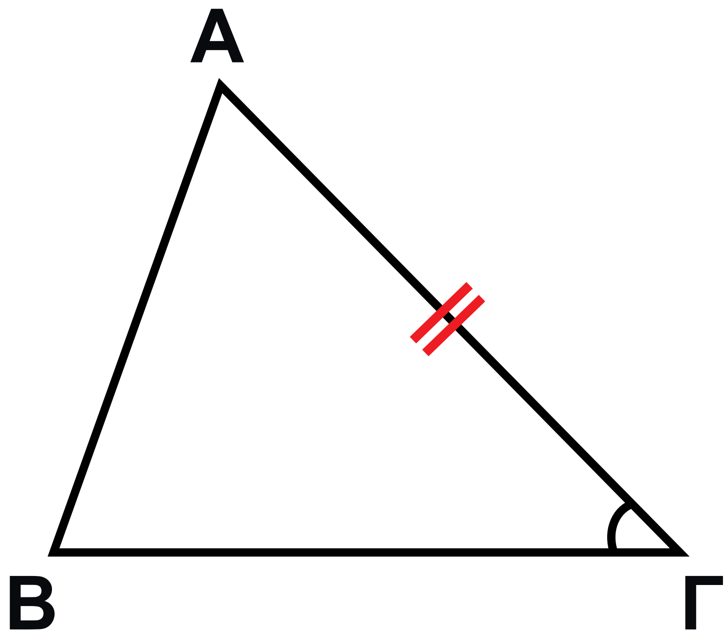
προφανώς το ζητούμενο
και υπάρχει λύση όταν $α > γ$.

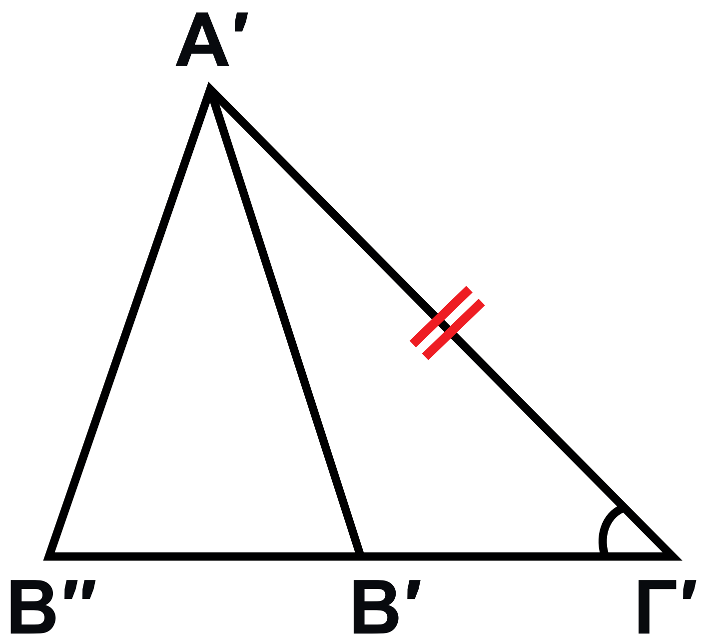


Γενικές Ασκήσεις

1. i) Στην προέκταση της $Γ'B'$ θεωρούμε σημείο B'' ώστε $Γ'B'' = ΓB$. Τότε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABΓ}$ και $A'\overset{\triangle}{B''}Γ'$ είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{B}''$ (1) και $A'B'' = AB$ (2). Όμως από υπόθεση $\hat{B} + \hat{B}' = 180°$ η οποία, λόγω της (1), γίνεται

$\hat{B}'' + \hat{B}' = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}'' = 180^\circ - \hat{B}' =$
$= \hat{B}'_{\varepsilon\xi}$ δηλαδή $\hat{B}'' = \hat{B}'_{\varepsilon\xi}$ και επομένως Α′Β″ = Α′Β′ η οποία με τη βοήθεια της (2) δίνει Α′Β′ = ΑΒ.





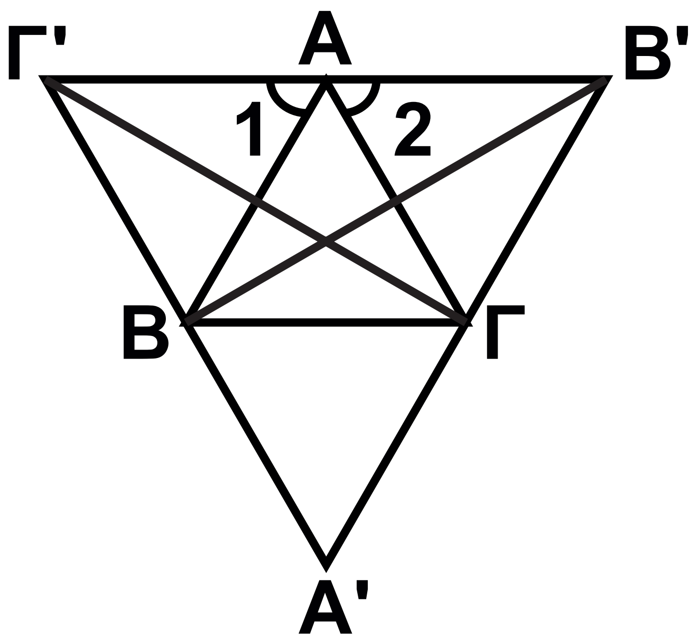
ii) Αν δύο τρίγωνα είναι τέτοια ώστε:

- μια πλευρά και μια προσκείμενη σ’ αυτή γωνία του ενός να είναι ίση με μια πλευρά και μια προσκείμενη γωνία του άλλου, αντίστοιχα και
- οι μη προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες των τριγώνων είναι παραπληρωματικές.

Τότε, οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες προσκείμενες γωνίες είναι ίσες.

2. Επειδή το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι ισόπλευρο τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AB'\Gamma}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma'}}$ είναι ισόπλευρα και ίσα μεταξύ τους, οπότε θα είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \phi$ (1).

Τα τρίγωνα $B\overset{\triangle}{A}B'$ και $\Gamma'\overset{\triangle}{A}\Gamma$ έχουνε $A\Gamma' = AB$, $A\Gamma = AB'$ και $B\hat{A}B' = \Gamma'\hat{A}\Gamma = \hat{A} + \hat{\phi}$, άρα είναι ίσα και επομένως $BB' = \Gamma\Gamma'$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $BB' = AA'$.



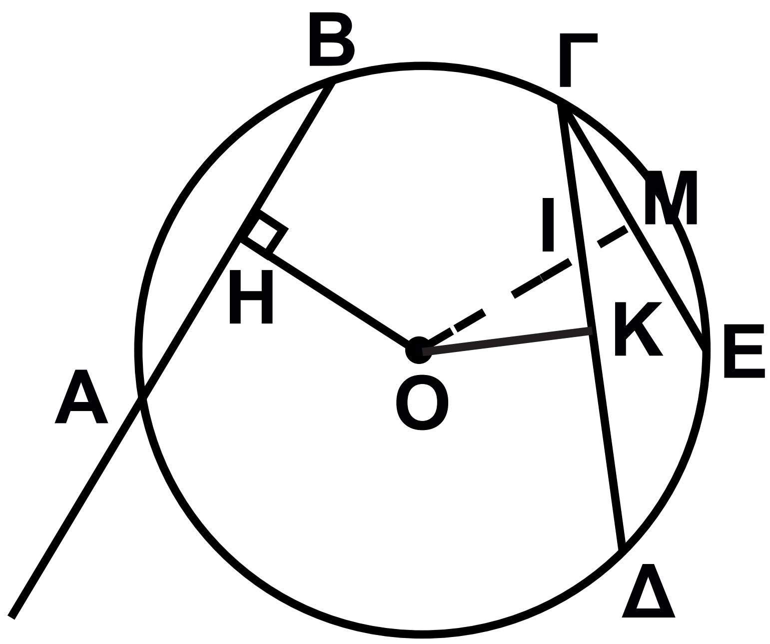
3. Έστω ότι η χορδή ΓΔ είναι μεγαλύτερη της ΑΒ. Μεταφέρουμε την ΑΒ σε ίση χορδή ΓΕ, οπότε το απόστημα ΟΗ της ΑΒ ισούται με το απόστημα ΟΜ της ΓΕ. Αφού τα σημεία Ο και Ε βρίσκονται

εκατέρωθεν της ΓΔ, η ΟΜ τέμνει τη ΓΔ σε σημείο Ι που είναι εσωτερικό του τμήματος ΟΜ. Τότε έχουμε ότι ΟΚ < ΟΙ < ΟΜ = ΟΗ.

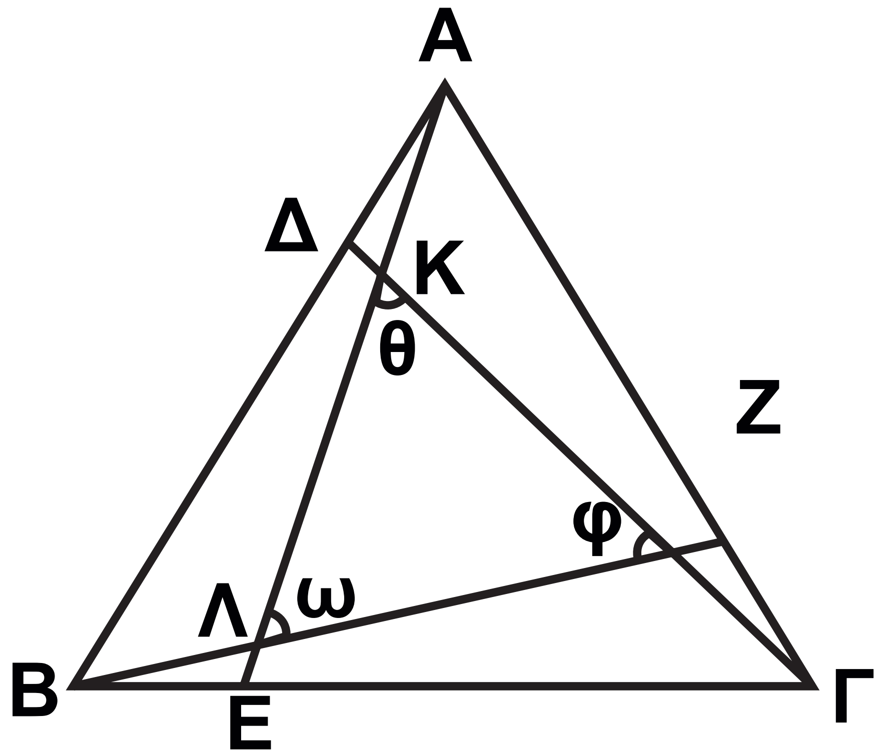
Αντίστροφα: Έστω ότι ΟΚ < ΟΗ. Τότε:

- αν ΑΒ = ΓΔ θα ήταν ΟΚ = ΟΗ (άτοπο).
- αν ΑΒ > ΓΔ θα ήταν ΟΚ > ΟΗ (άτοπο).

Άρα ΑΒ < ΓΔ.



4. Έχουμε $\overset{\triangle}{AB E} = \overset{\triangle}{B\Gamma Z}$ ($AB = B\Gamma$, $BE = \Gamma Z$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$). Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (1).
Επίσης $\overset{\triangle}{ABZ} = \overset{\triangle}{B\Gamma\Delta}$ ($AB = B\Gamma$, $\hat{A} = \hat{B}$, $AZ = B\Delta$). Άρα $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$.
Από (1), (2), αφού $AB = B\Gamma$ προκύπτει ότι $\overset{\triangle}{AB\Lambda} = \overset{\triangle}{B\Gamma M}$.
Επομένως $\hat{\Lambda} = \hat{M}$, οπότε $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$.
Όμοια $\hat{\omega} = \hat{\theta}$. Άρα $\hat{\omega} = \hat{\varphi} = \hat{\theta}$.

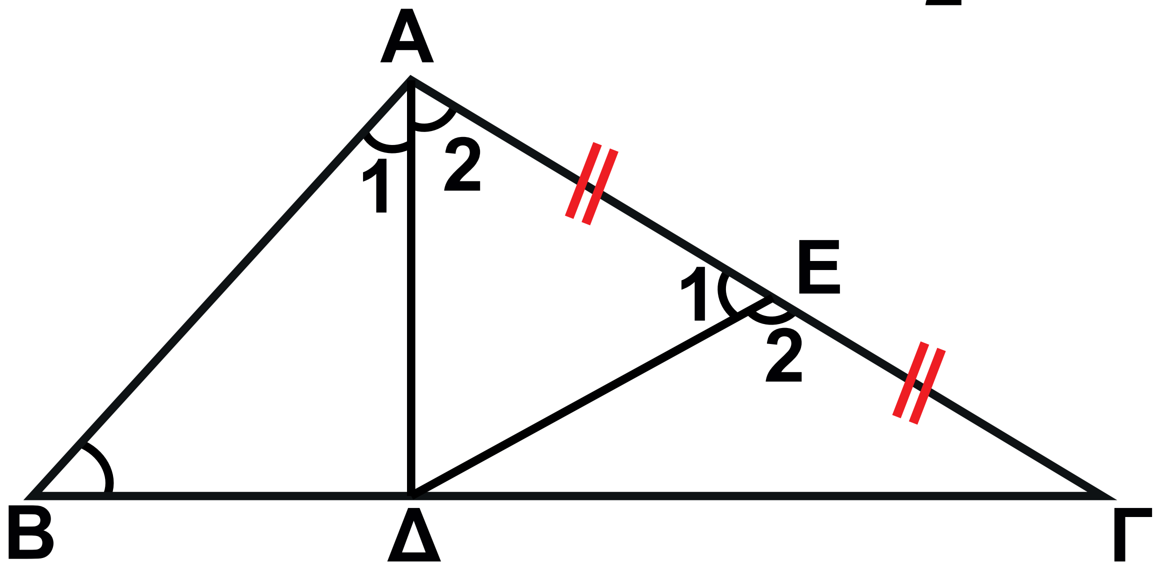


5. Φέρουμε ΑΔ διχοτόμο. Έστω Ε το μέσο της ΑΓ. Τότε $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{A\Delta E}$ $\left(A\Delta \text{ κοινή}, \hat{A}_1 = \hat{A}_2, AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}\right)$.

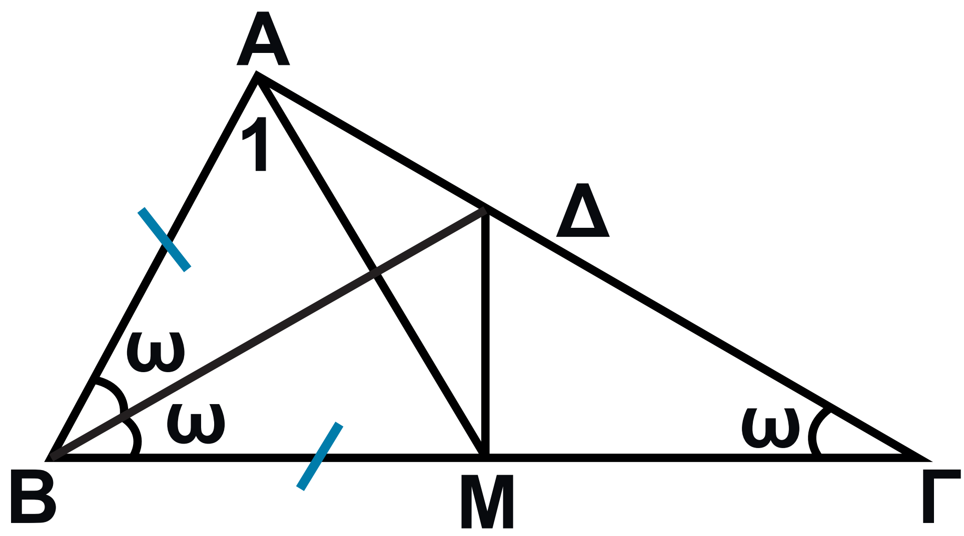
Άρα $\hat{B} = \hat{E}_1 < 90^\circ$, οπότε $\hat{E}_2 > 90^\circ$.

Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AE\Delta}$ και $\overset{\triangle}{\Delta E\Gamma}$ έχουν: ΔΕ κοινή, ΑΕ = ΕΓ, $\hat{E}_2 > \hat{E}_1$.

Άρα ΔΓ > ΑΔ. Επομένως στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ είναι $\hat{A}_2 > \hat{\Gamma}$ ή $\frac{\hat{A}}{2} > \hat{\Gamma}$.



6. Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Το τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}M$ είναι ισοσκελές. Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ της γωνίας Β. Τότε το τρίγωνο $\Delta\overset{\triangle}{B}\Gamma$ είναι ισοσκελές και η ΔΜ ύψος και διχοτόμος, οπότε $\Delta\hat{M}B = 1L$. Τα τρίγωνα $B\overset{\triangle}{\Delta}A$ και $B\overset{\triangle}{M}\Delta$ είναι ίσα (Π-Γ-Π), οπότε $B\hat{M}\Delta = B\hat{A}\Delta = 1L$.



7. Θεωρούμε τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και $A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$ με $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$ και

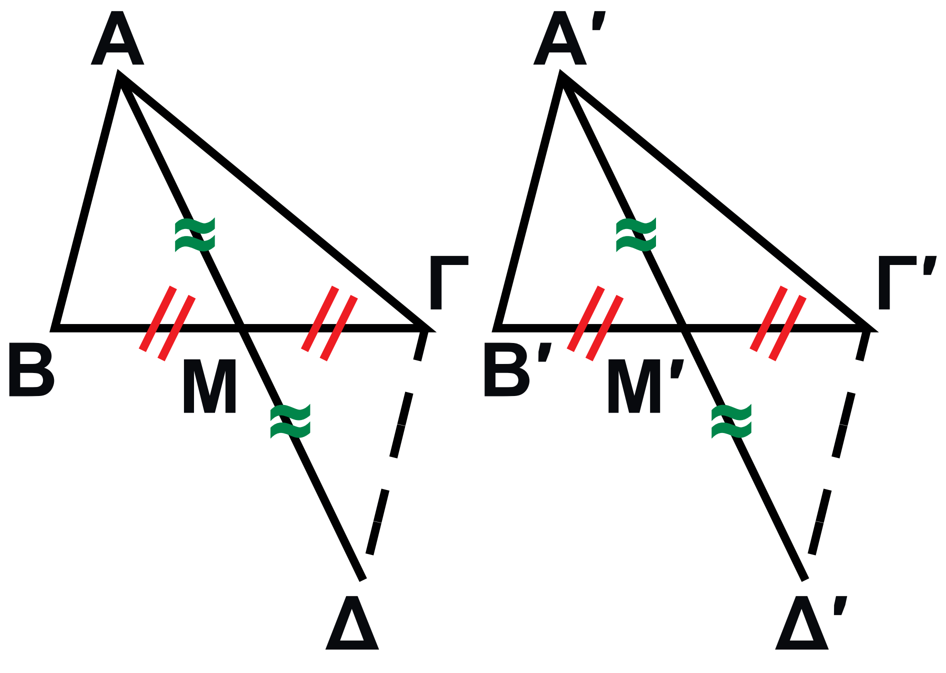
ΑΜ = Α′Μ′. Προεκτείνουμε τις ΑΜ, Α′Μ′ κατά τμήματα ΑΜ = ΜΔ και Α′Μ′ = Μ′Δ′.

Τότε $A\overset{\triangle}{B}M = M\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$ και $A'\overset{\triangle}{B'}M' = M'\overset{\triangle}{\Gamma'}\Delta'$, οπότε ΓΔ = ΑΒ και Γ′Δ′ = Α′Β′.

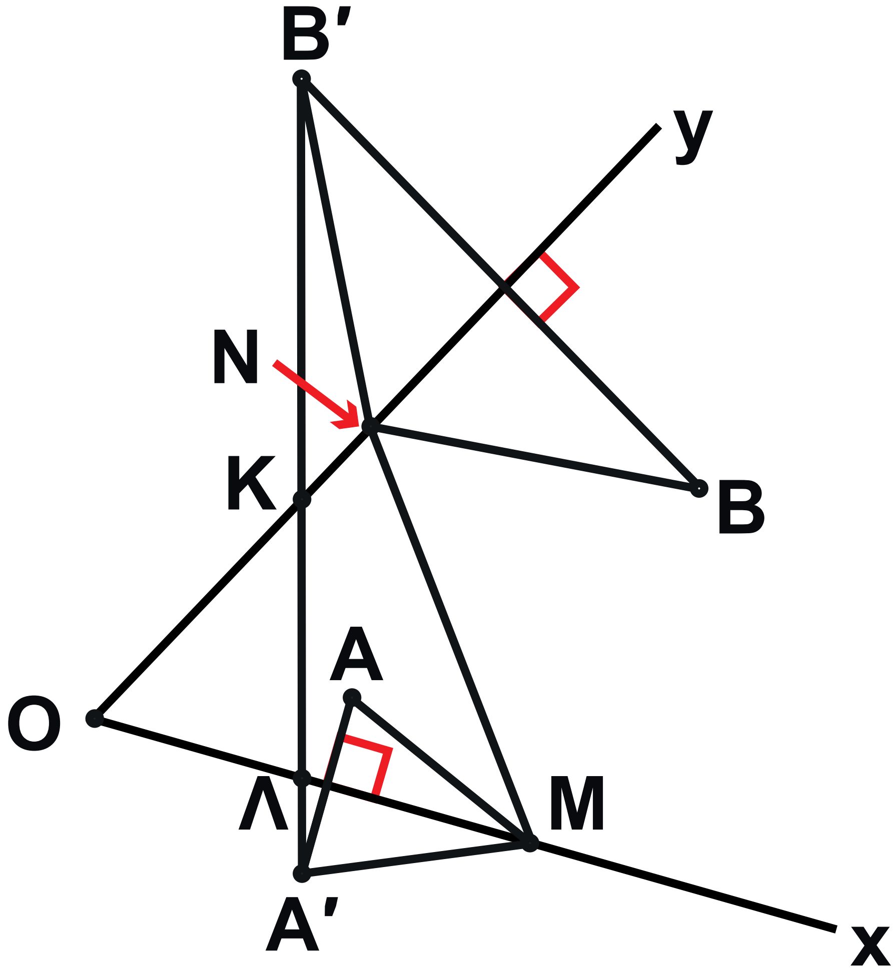
Επομένως τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$ και $A'\overset{\triangle}{\Gamma'}\Delta'$ είναι ίσα (Π-Π-Π).

Άρα ΓΜ = Γ′Μ′, οπότε ΒΓ = Β′Γ′.

Άρα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma = A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$ (Π-Π-Π).



8. Από συμμετρία έχουμε ότι:
ΑΜ = Α΄Μ και ΒΝ = Β΄Ν, οπότε
ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ = Α΄Μ + ΜΝ + ΝΒ΄, δηλαδή το ζητούμενο. Φέρνουμε το Α΄Β΄.
Σύμφωνα με το σχόλιο της § 3.11 έχουμε Α΄Β΄ ≤ Α΄Μ + ΜΝ + ΝΒ΄, δηλαδή η μικρότερη τιμή του αθροίσματος Α΄Μ + ΜΝ + ΝΒ΄ είναι το Α΄Β΄. Αυτό θα συμβεί όταν τα Μ, Ν βρεθούν πάνω στο Α΄Β΄ και επειδή ανήκουν και στις Οx, Oy αντίστοιχα, πρέπει τα Μ, Ν να ταυτιστούν με τα Κ, Λ αντίστοιχα.


B′
y
N
K
B
A
O
Λ
M
A′
x

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Αν φέρουμε παράλληλη από σημείο της διχοτόμου γωνίας προς μια πλευρά της σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο.
  (**Ασκήσεις:** § 4.1-4.5 Εμπέδωσης 2, Αποδεικτικές 4, 5 και Σύνθετα 3)
  Αντίστοιχα αν φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο γωνίας.

(**Ασκήσεις:** § 4.1-4.5 Εμπέδωσης 3, Αποδεικτικές 2, 3 και Σύνθετα 4)

- Δύο ευθείες είναι παράλληλες αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:
  - α) Είναι κάθετες στην ίδια ευθεία.
    (**Ασκήσεις:** § 4.1-4.5 Εμπέδωσης 6, Αποδεικτικές 1)
  - β) Είναι παράλληλες προς τρίτη ευθεία.
    (**Ασκήσεις:** § 4.1-4.5 Σύνθετα 1)
  - γ) Τεμνόμενες από τρίτη ευθεία σχηματίζουν:
    - i) Δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες ή
    - ii) Δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή
    - iii) Δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές

  (**Ασκήσεις:** § 4.1-4.5 Εμπέδωσης 4, 5 και § 4.6-4.8 Σύνθετα 7)

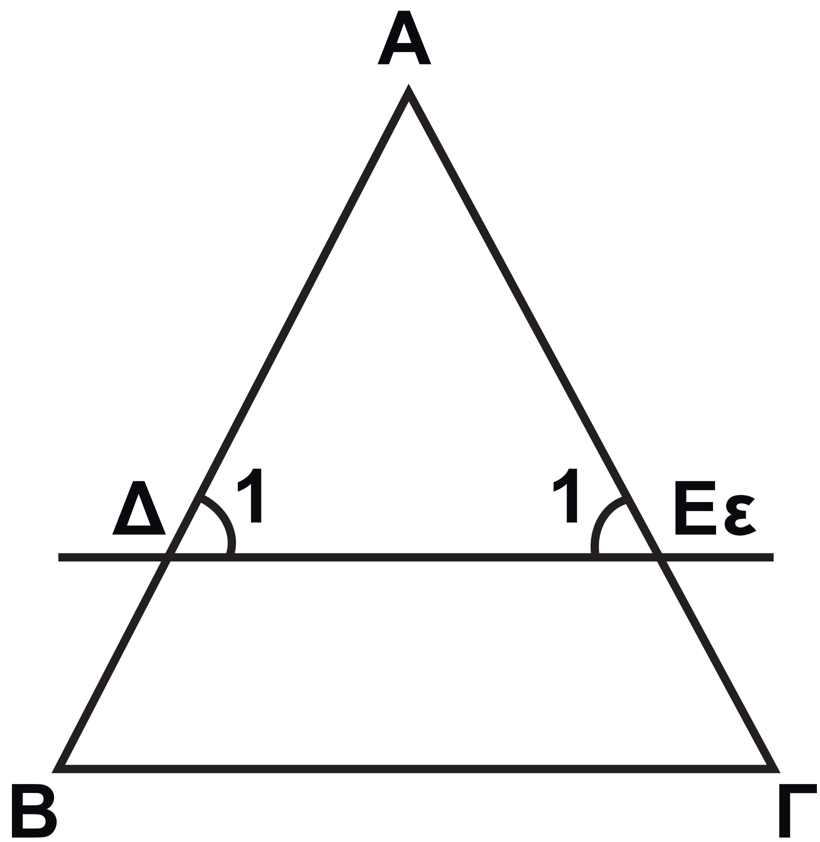
- **Τρία σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά αν**
  i) Η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι 0° ή 180°
  ii) Οι ευθείες π.χ. ΑΒ, ΑΓ είναι παράλληλες ή κάθετες σε ευθεία ε.
  Την (i) περίπτωση συναντήσαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο.
  (Ασκήσεις: § 4.6-4.8 Σύνθετα 3). Άλλες ασκήσεις θα δούμε στο 5ο Κεφάλαιο.**

  Σχόλιο: Ισοδύναμες εκφράσεις είναι: ''η ευθεία ΑΒ διέρχεται από το Γ'', ''το Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ''.
- **Μια γωνία τριγώνου είναι ορθή αν οι άλλες δυο γωνίες είναι συμπληρωματικές.**
  (Ασκήσεις: § 4.6-4.8 Σύνθετα 1)

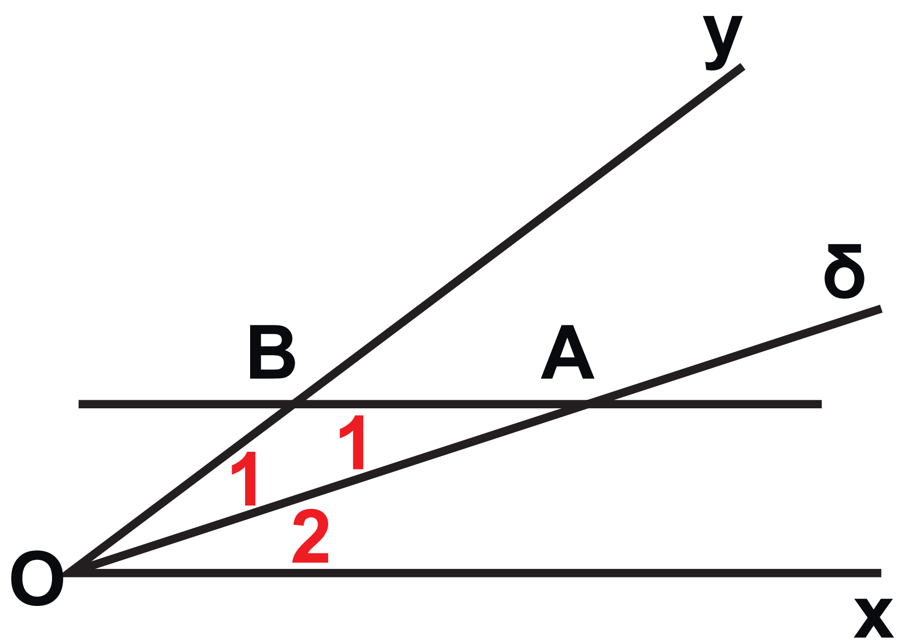
§ 4.1-4.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

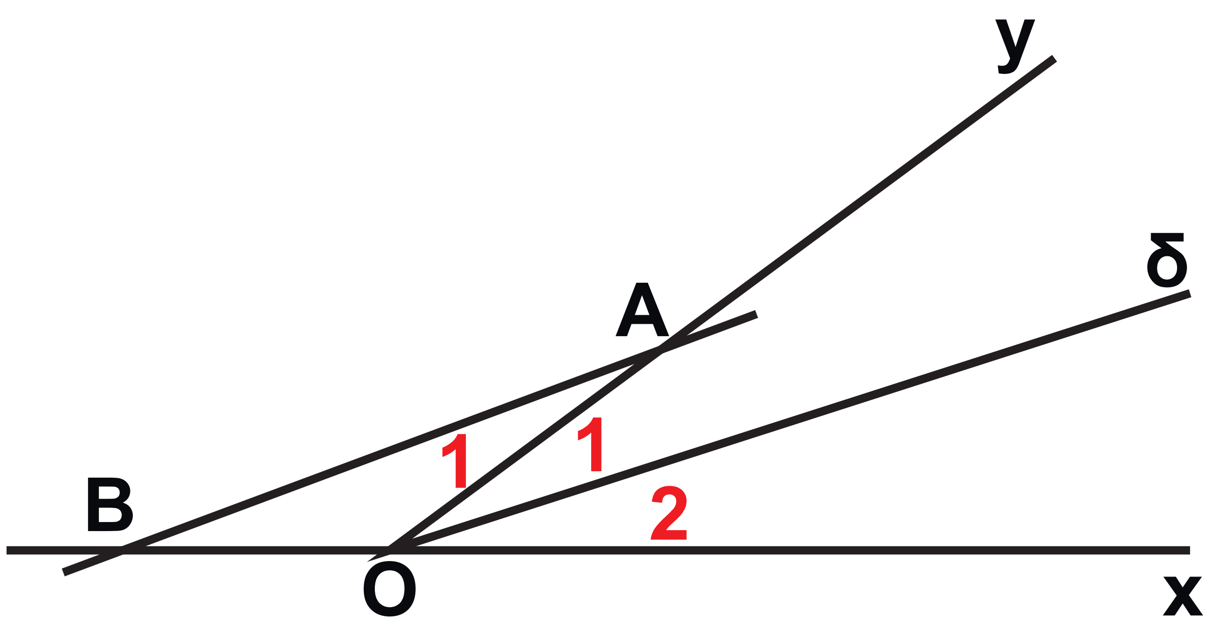
1. Έχουμε $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ (ΑΒ = ΑΓ) $\hat{B}=\hat{\Delta}_1$, $\hat{\Gamma}=\hat{E}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη). Άρα $\hat{\Delta}_1=\hat{E}_1$, οπότε ΑΔ = ΑΕ.



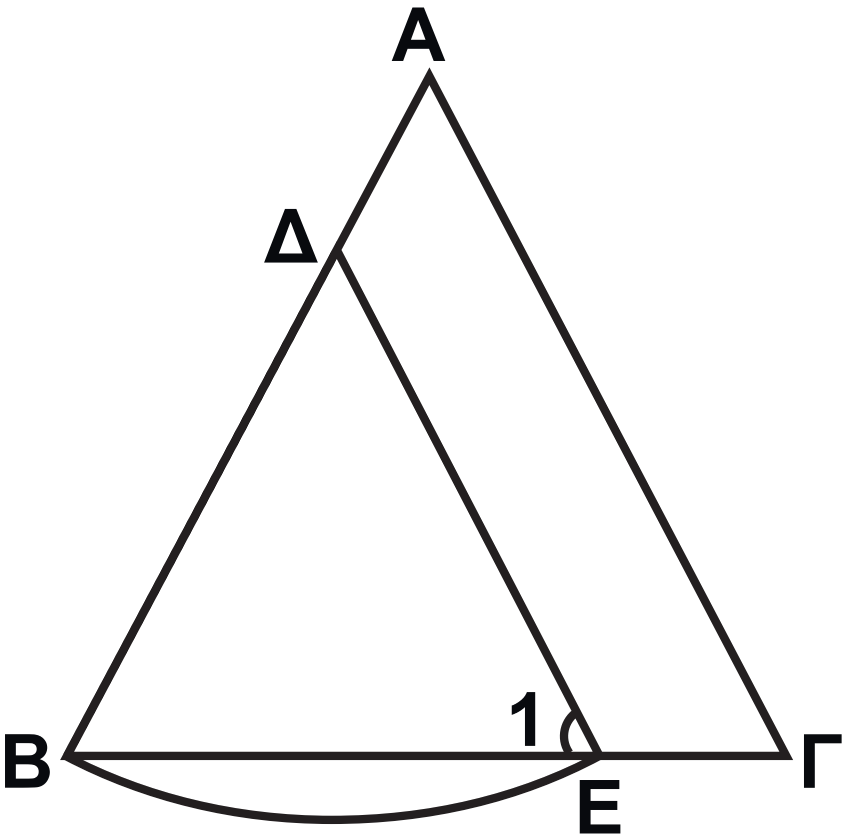
2. Έχουμε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (διχοτόμος)
$\hat{A}_1 = \hat{O}_2$ (εντός εναλλάξ).
Άρα $\hat{O}_1 = \hat{A}_1$, οπότε $OB = AB$.



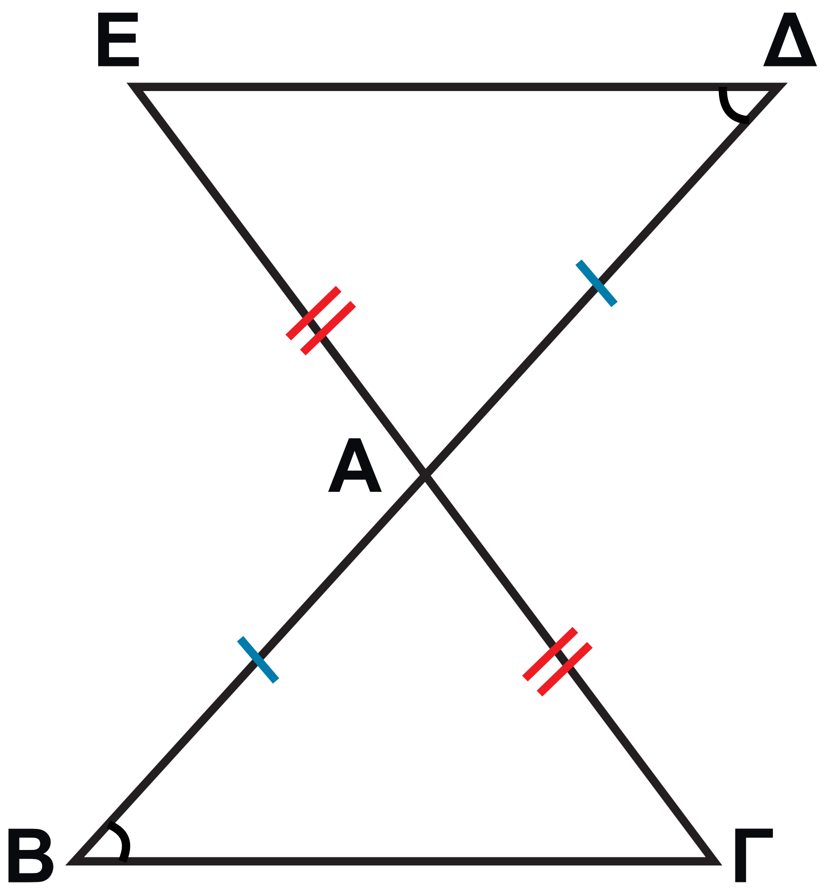
3. Έχουμε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (διχοτόμος) $\hat{O}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ) $\hat{O}_2 = \hat{B}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη). Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, οπότε ΟΑ = ΟΒ.



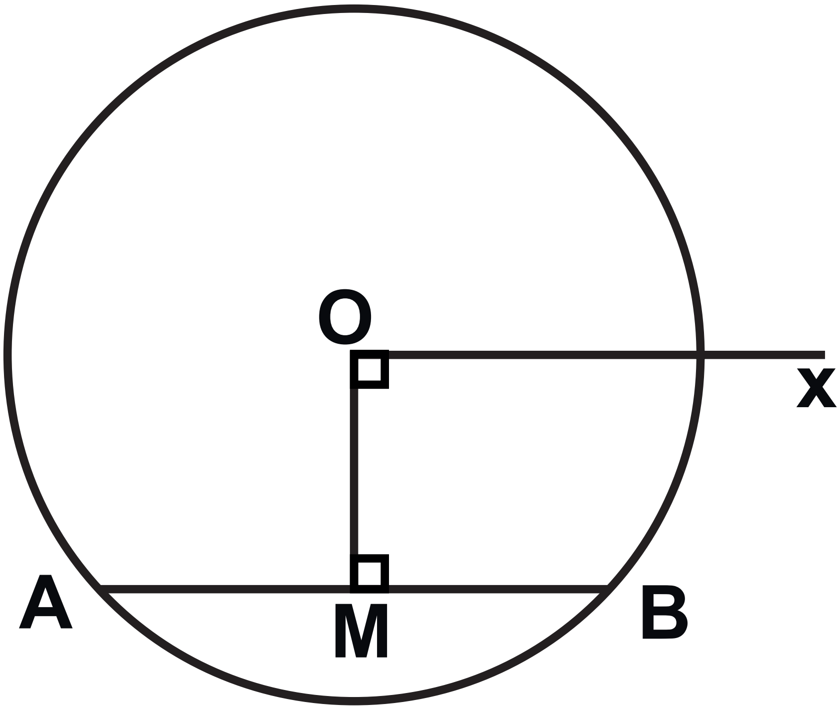
4. Έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ΑΒ = ΑΓ) ΔΒ = ΔΕ, οπότε $\hat{B} = \hat{E}_1$. Άρα $\hat{\Gamma} = \hat{E}_1$, οπότε ΔΕ//ΑΓ (αφού σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες).


Α
Δ
1
Β
Ε
Γ

5. Έχουμε $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}} = \overset{\triangle}{\text{ΑΔΕ}}$ (Π-Γ-Π), άρα $\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Δ}}$, οπότε ΔΕ//ΒΓ (αφού σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες).



6. Έχουμε ΟΜ ⊥ ΑΒ (ΟΜ απόστημα) ΟΜ ⊥ Οx. Άρα Οx//ΒΑ.



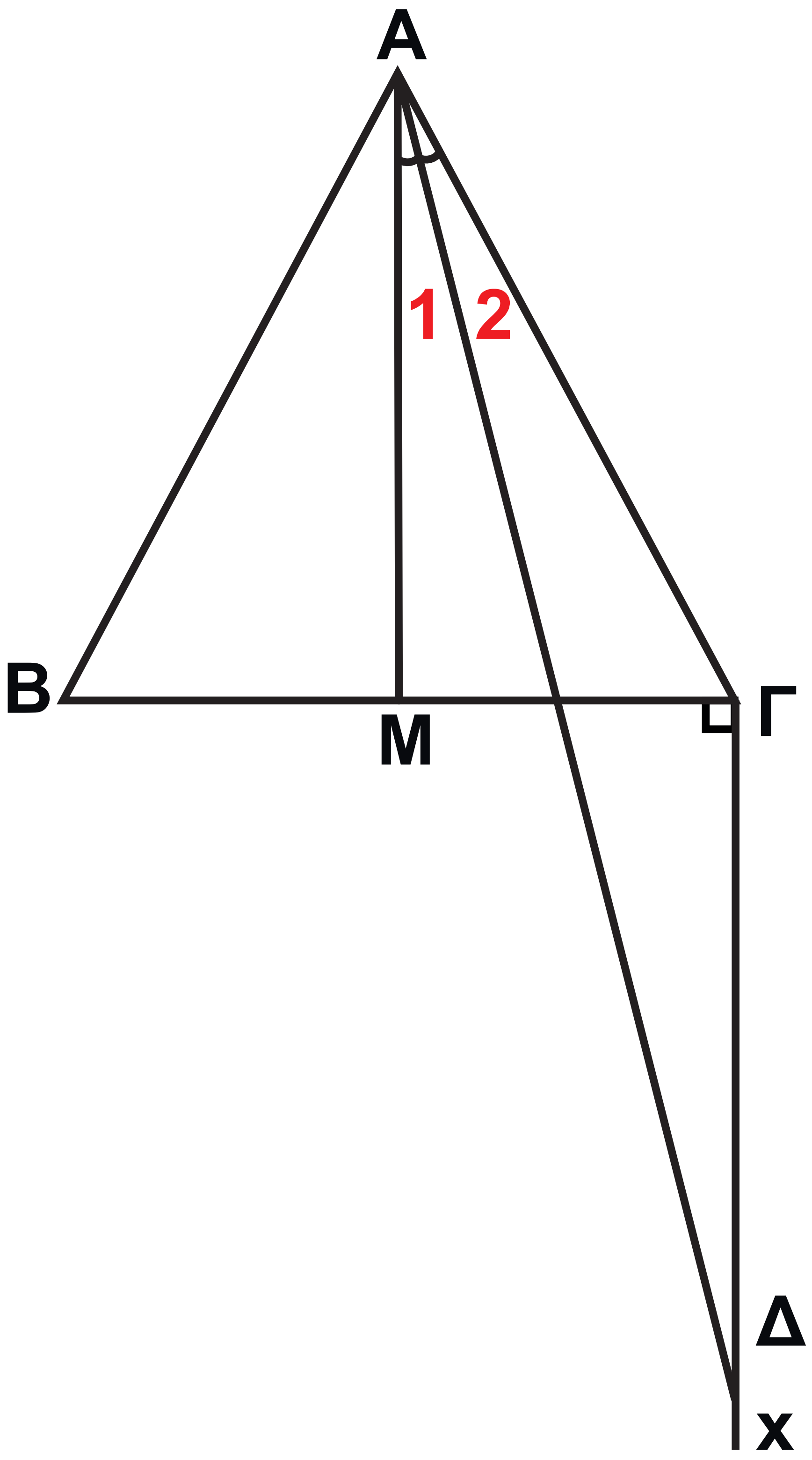
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έχουμε ΑΒ = ΑΓ = ΓΔ, άρα $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}$ (1)

$$\left.\begin{array}{l}\text{ΑΜ} \perp \text{ΒΓ (διάμεσος και ύψος)}\\ \text{ΓΔ} \perp \text{ΒΓ}\end{array}\right\}$$

$$\left\}\begin{array}{l}\text{ΑΜ//ΓΔ, οπότε}\\ \hat{A}_1 = \hat{\Delta} \qquad\qquad (2)\end{array}\right.$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$.



149 / 41

2. Έχουμε ΕΓ = ΑΕ + ΑΓ (1)

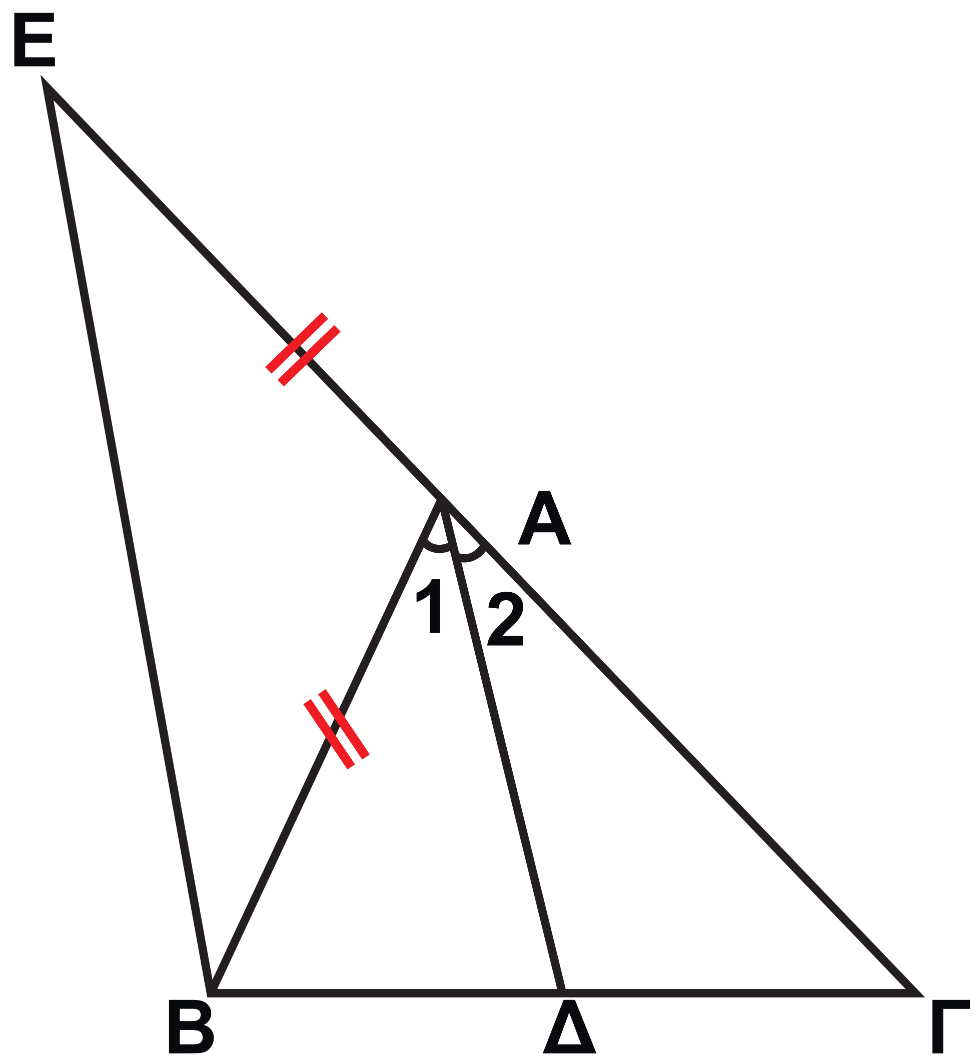
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (διχοτόμος)

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ)

$\hat{A}_2 = \hat{E}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη).

Άρα $\hat{B}_1 = \hat{E}$, οπότε ΑΕ = ΑΒ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΕΓ = ΑΒ + ΑΓ.



3. Έχουμε ΔΓ = ΑΓ − ΑΔ (1)

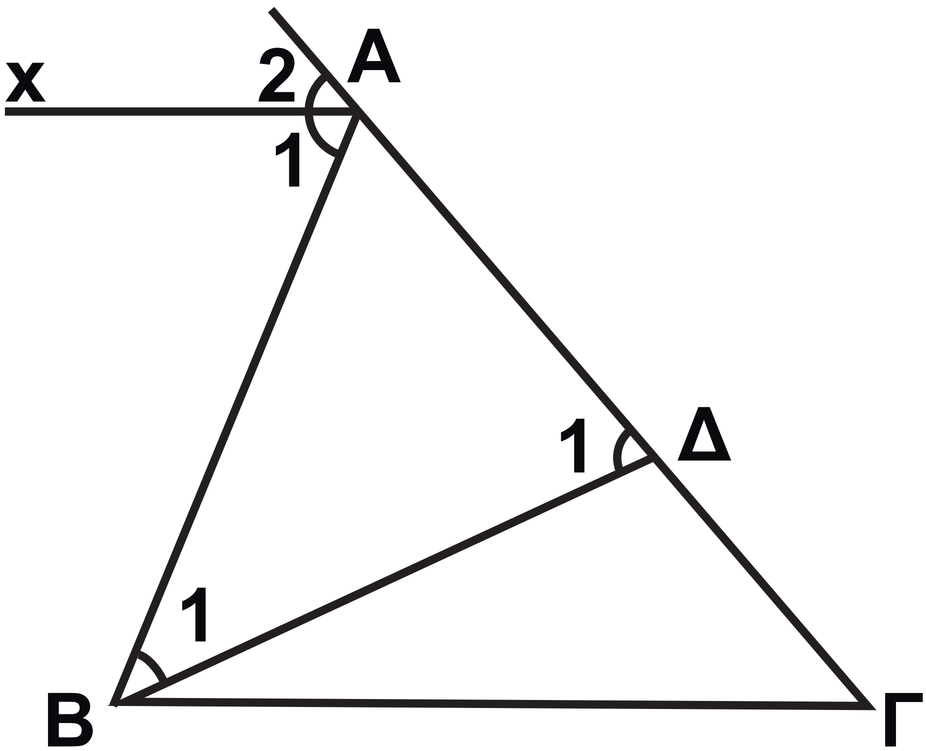
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (διχοτόμος)

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ)

$\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη)

Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$, οπότε ΑΔ = ΑΒ (2)

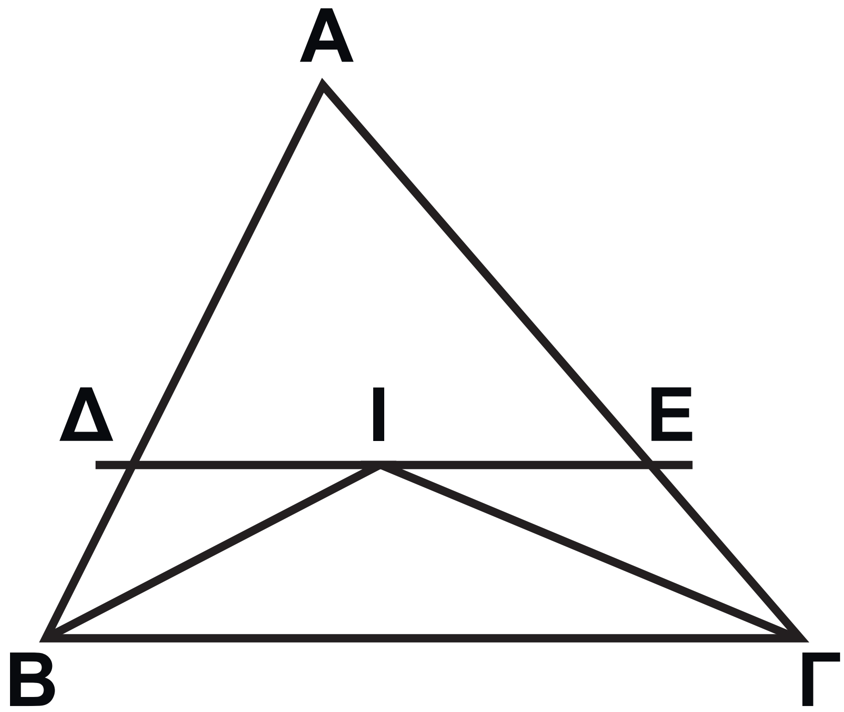
Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΔΓ = ΑΓ − ΑΒ.



4. **Έχουμε ΔΕ = ΔΙ + ΙΕ (1)**

Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{ΒΔΙ}}$, $\overset{\triangle}{\text{ΓΕΙ}}$ είναι ισοσκελή (Άσκ. 2). Οπότε ΔΙ = ΒΔ και ΙΕ = ΓΕ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΔΕ = ΒΔ + ΓΕ.

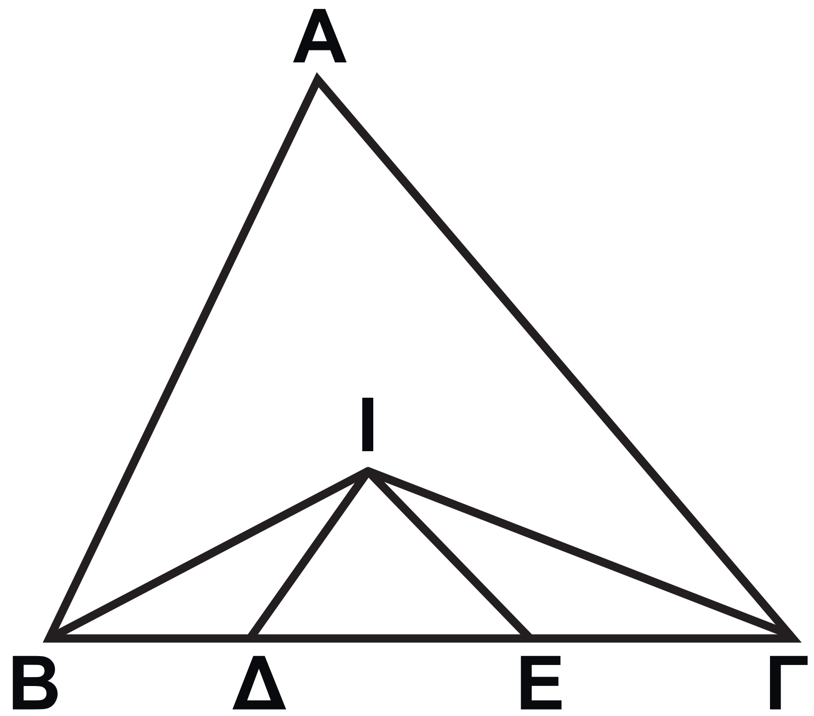


5. Έχουμε ΒΓ = ΒΔ + ΔΕ + ΕΓ (1)

Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{ΒΔΙ}}$, $\overset{\triangle}{\text{ΓΕΙ}}$ είναι ισοσκελή, οπότε ΔΙ = ΒΔ και ΙΕ = ΓΕ (2)

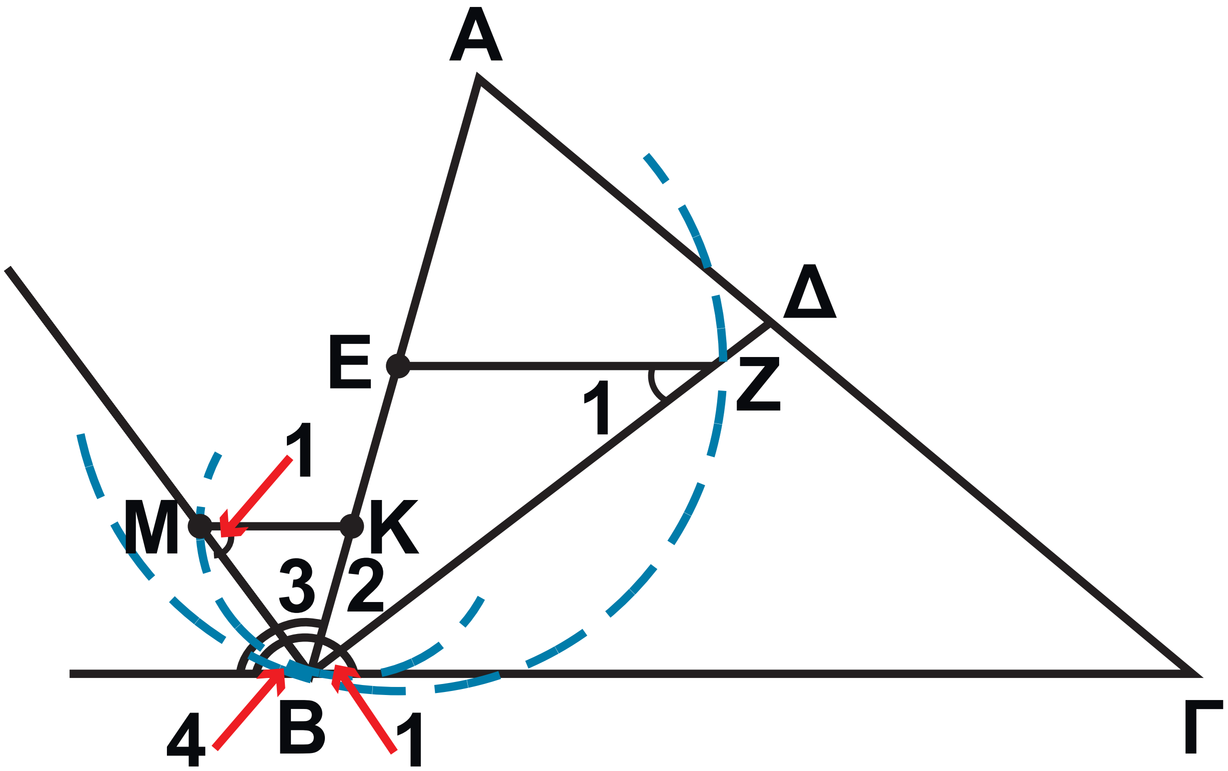
Από (1) και (2) προκύπτει ότι

ΒΓ = ΙΔ + ΔΕ + ΙΕ.



Σύνθετα Θέματα

1. Έχουμε ΕΒ = ΕΖ, οπότε $\hat{B}_2 = \hat{Z}_1$.
Αλλά $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$. Άρα $\hat{Z}_1 = \hat{B}_1$, οπότε ΕΖ//ΒΓ (1) (αφού σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες).
Όμοια ΚΒ = ΚΜ, οπότε
$\hat{M}_1 = \hat{B}_3 = \hat{B}_4$.
Άρα ΜΚ//ΒΓ (2).
Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΕΖ//ΜΚ.



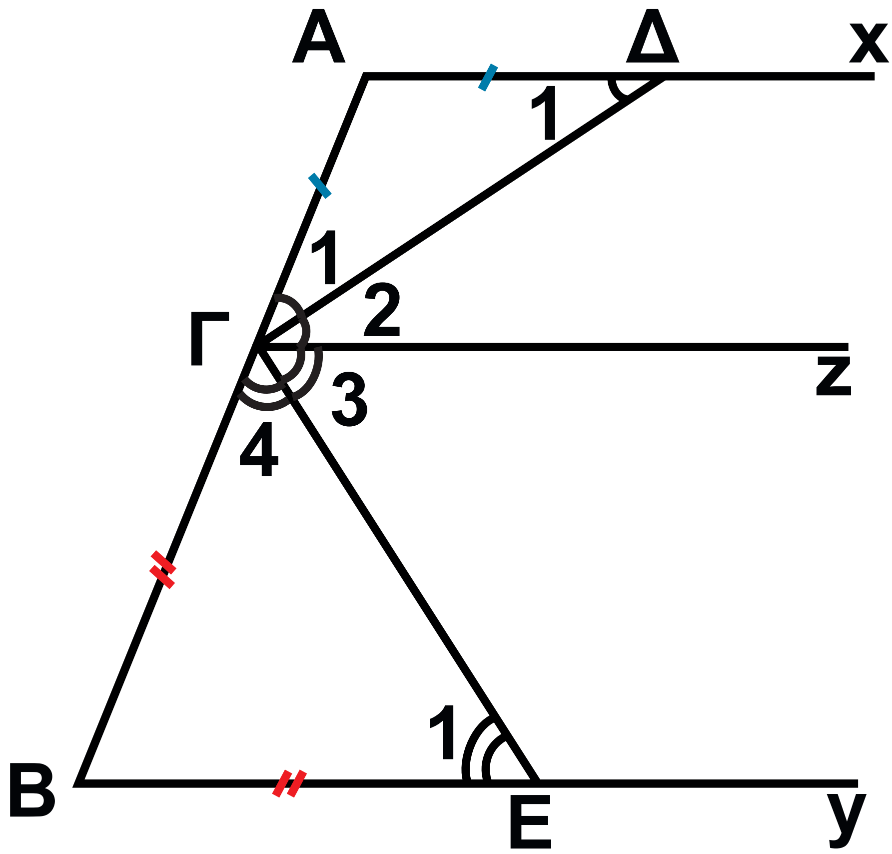
2. Φέρουμε ΓΖ//Αx//Βy. Τότε:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2 \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ (\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Άρα} \\ \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 \quad (1)\end{array}$$

Όμοια

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\Gamma}_3 = \hat{E}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ \hat{\Gamma}_4 = \hat{E}_1 \text{ (ΒΕ = ΒΓ)}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Άρα} \\ \hat{\Gamma}_3 = \hat{\Gamma}_4 \quad (2)\end{array}$$

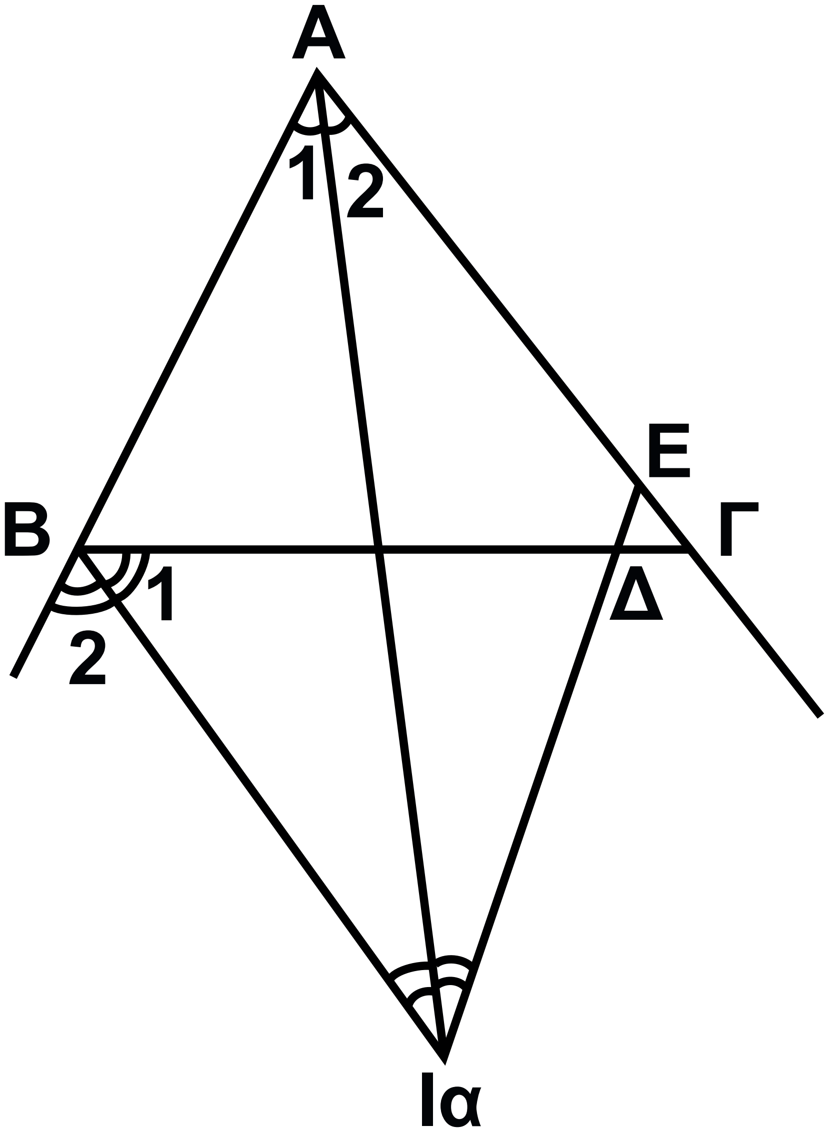
Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΓΔ $\perp$ ΓΕ (διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών). Επομένως $\Delta\hat{\Gamma}E$ = 1L.



3. Έχουμε $ΔΕ = I_αΕ - I_αΔ$ (1)

Επίσης $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = A\hat{I}_αE$, οπότε $AE = I_αE$ (2) και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = B\hat{I}_αΔ$, οπότε $BΔ = I_αΔ$ (3)

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $ΔΕ = ΑΕ - ΒΔ$.


A
1
2
B
1
2
E
Γ
Δ
Iα

4. α) Επειδή ΑΔ//ΕΜ έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$, $\hat{A}_2 = \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$, οπότε $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$. Άρα $AE = AZ$.

β) Έχουμε

$$BE + \Gamma Z = BA + AE + \Gamma Z \overset{(\alpha)}{=} BA + AZ + \Gamma Z = BA + A\Gamma = \text{σταθ.}$$

γ) Προεκτείνουμε την ΕΜ κατά τμήμα $MH = EM$.

Τότε $\overset{\triangle}{BEM} = \overset{\triangle}{MH\Gamma}$ ($BM = M\Gamma$, $MH = EM$, $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$), οπότε $\Gamma H = BE$ (1) και $\hat{E}_1 = \hat{H}$.

Αλλά $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$, άρα $\hat{H} = \hat{Z}_2$, δηλαδή $\Gamma Z = \Gamma H$ (2)

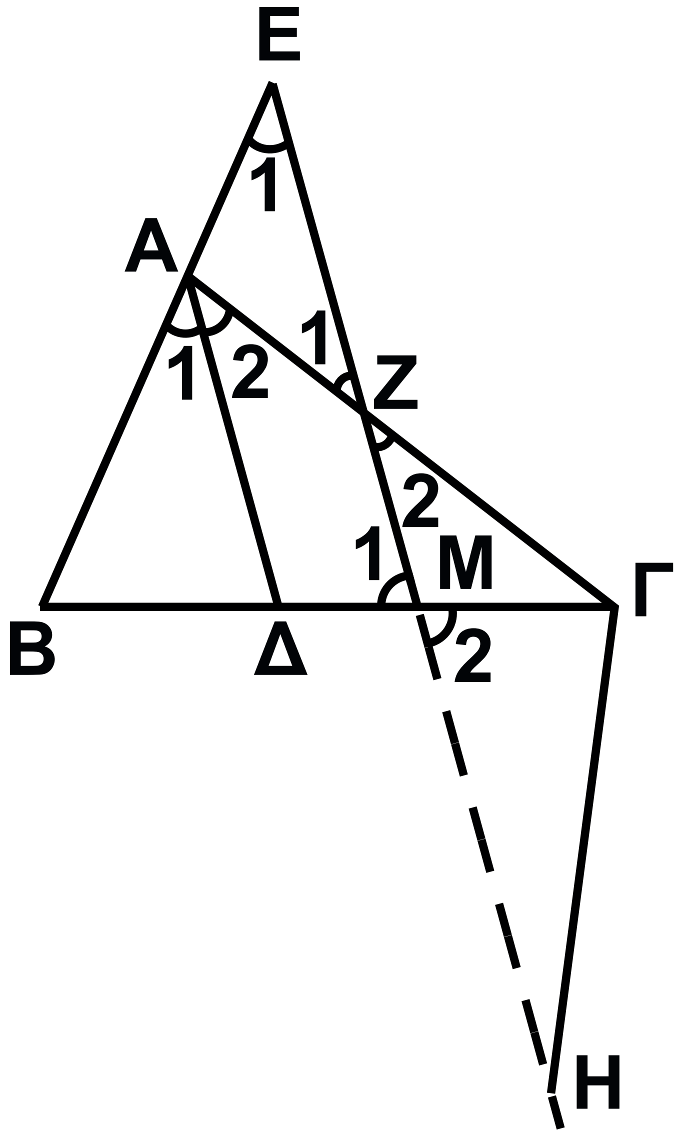
Από (1) και (2) προκύπτει ότι $BE = \Gamma Z$.

Από το (β) είναι φανερό ότι

$$BE = \Gamma Z = \frac{AB + A\Gamma}{2}.$$

Επίσης

$$AE = AZ = BE - AB = \frac{AB + A\Gamma}{2} - AB = \frac{A\Gamma - AB}{2}.$$



§ 4.6-4.8

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. α) $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = \frac{2}{3}\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

β) $\left.\begin{array}{l} \hat{A} = 90^\circ,\ \hat{B} = \frac{2}{3}\hat{\Gamma} \\ \text{Αλλά } \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \hat{B} = 36^\circ \\ \hat{\Gamma} = 54^\circ \end{array}$

2. Έχουμε $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 2\hat{A}$.

Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 36^\circ$, οπότε

$B\hat{I}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} = 108^\circ$.

3. Έχουμε $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 144^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 36^\circ$,

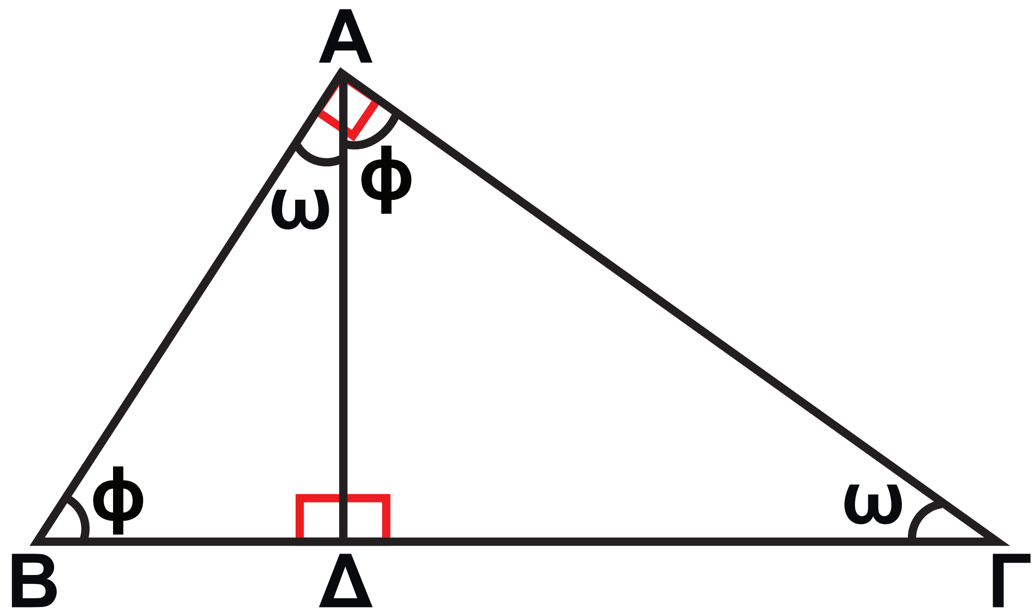
$\hat{A} = 3\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 4\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = 36^\circ$.

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 36^\circ$, οπότε ΑΒ = ΑΓ.

4. $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\varphi}$

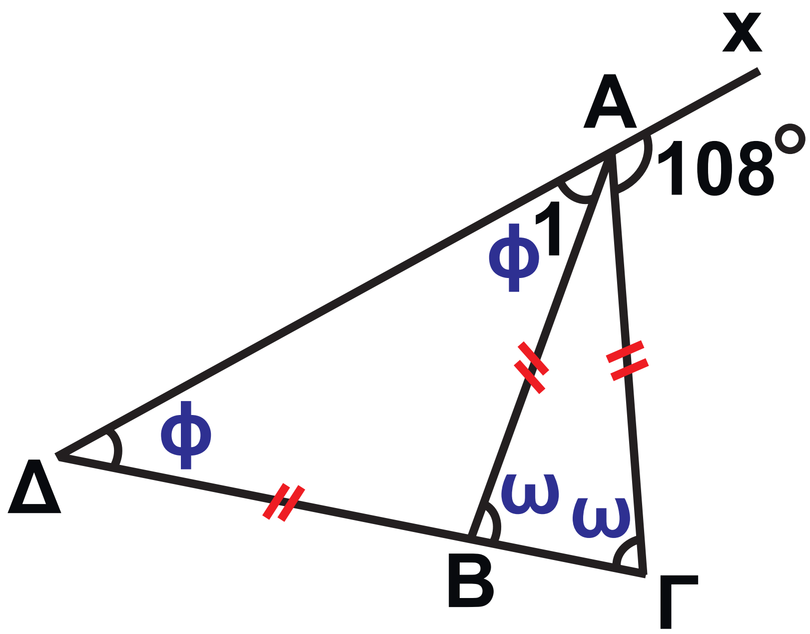
$\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B = \hat{\omega}$ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές)



5. Έχουμε ΑΒ = ΔΒ, οπότε $\hat{\Delta} = \hat{A}_1 = \hat{\phi}$

ΑΒ = ΑΓ, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\omega}$

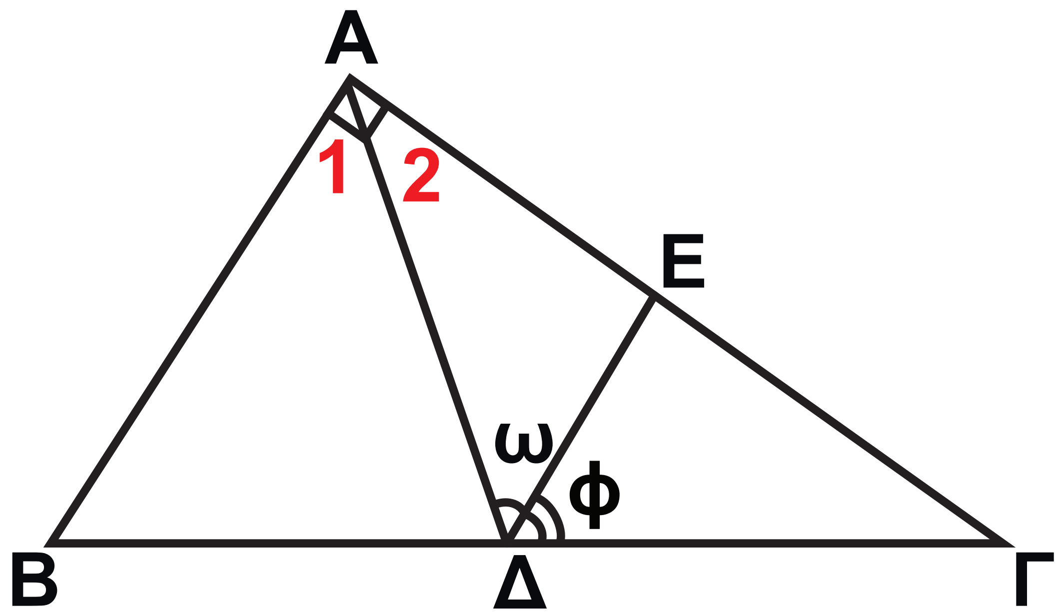
$$\left.\begin{array}{l} \text{Στο τρίγωνο : } \overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}\text{: } \hat{A}_{\varepsilon\xi} = \hat{\phi} + \hat{\omega} = 108^\circ \\ \text{Στο τρίγωνο : } \overset{\triangle}{A\Delta B}\text{: } \hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Delta} + \hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{\omega} = 2\hat{\phi} \end{array}\right\} \text{οπότε } \hat{\phi} = 36^\circ$$



6. Έχουμε $\hat{\omega} = \hat{A}_1 = 45^\circ$ (εντός εναλλάξ)

$\hat{\phi} = \hat{B}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^\circ \\ \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ\end{array}\right\} \hat{B} = \hat{\phi} = 55^\circ$$



7. Έχουμε $\Sigma_\nu = 2\nu - 4$ ορθές, οπότε
$900^\circ = (2\nu - 4)90^\circ \Leftrightarrow 2\nu - 4 = 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\nu = 14 \Leftrightarrow \nu = 7.$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 90^\circ + \dfrac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow 2\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 180^\circ + \hat{A} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(\hat{A} + \hat{B}) = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma}) + \hat{A} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα $AB = A\Gamma$.

2. i) $$\left.\begin{array}{l} A\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} + \hat{A}_1 \\ A\hat{\Delta}B = \hat{\Gamma} + \hat{A}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{array}\right\} A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$$

ii) Έχουμε $A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ (από (i))

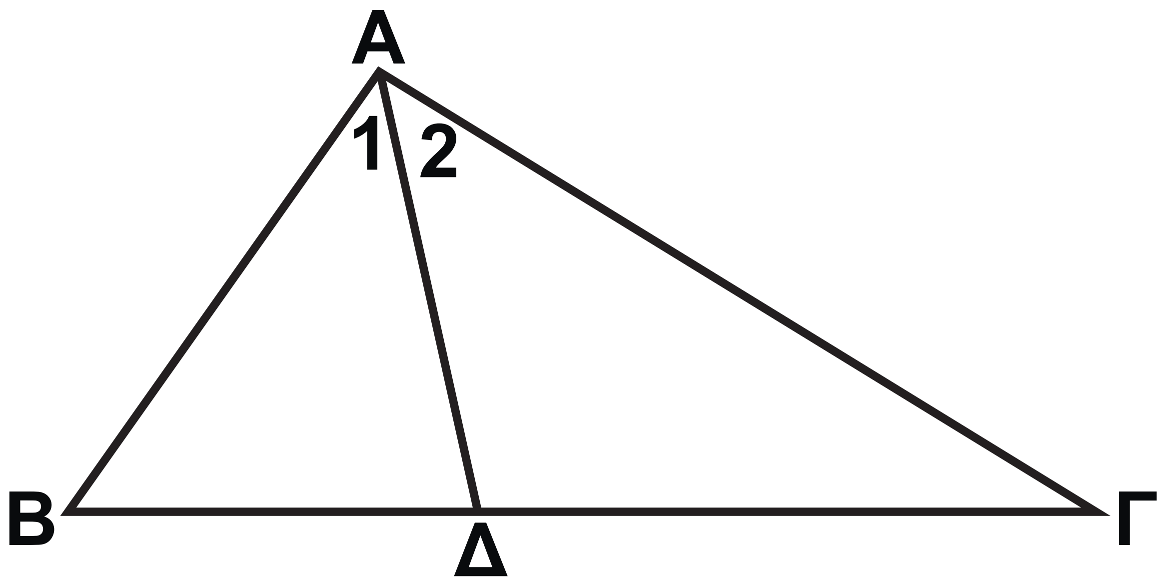
Αλλά $A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Delta}B = 180^\circ$.

Άρα

$$2A\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ + \hat{B} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{B - \Gamma}{2},$$

οπότε $A\hat{\Delta}B = 90^\circ - \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.



3. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta E}}$ ($\hat{\Delta}=90^\circ$):

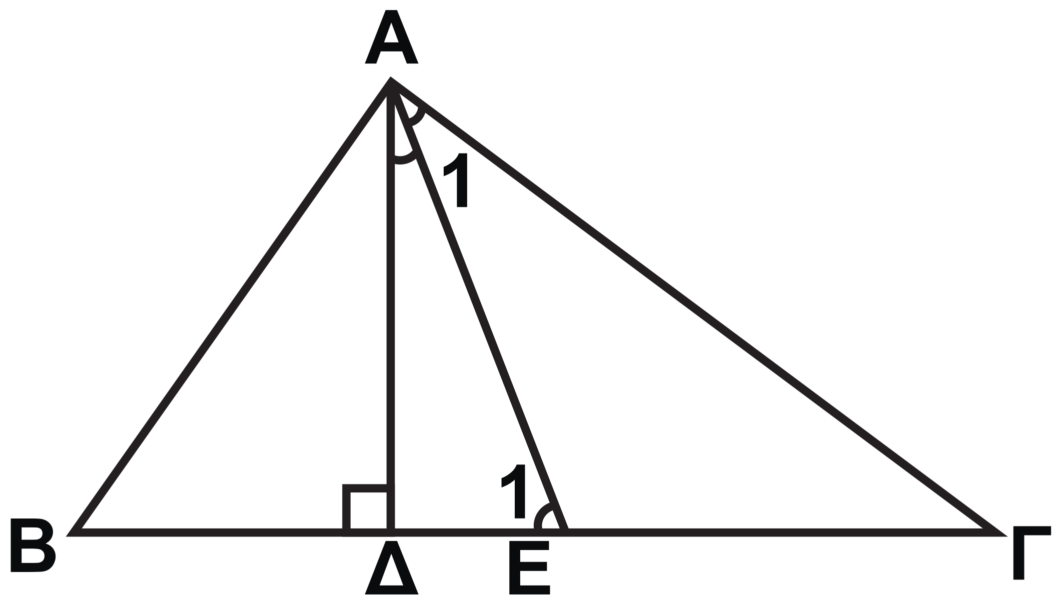
$\Delta\hat{A}E+\hat{E}_1=90^\circ$.

Αλλά $\hat{E}_1=\hat{A}_1+\hat{\Gamma}\Leftrightarrow\hat{E}_1=\dfrac{\hat{A}_1}{2}+\hat{\Gamma}$ (εξωτερική) και

$90^\circ=\dfrac{\hat{A}}{2}+\dfrac{\hat{B}}{2}+\dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$, οπότε

$$\Delta\hat{A}E+\frac{\hat{A}}{2}+\hat{\Gamma}=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\Delta\hat{A}E=\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}.$$



4. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AEB}$:

$$A\hat{E}B + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow$$

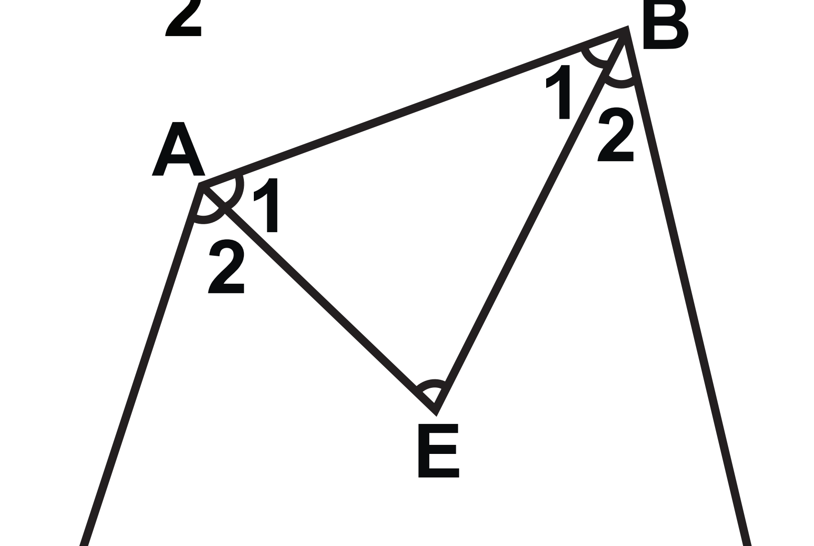
$$\Leftrightarrow A\hat{E}B + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 180^\circ \quad (1)$$

Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\Delta}}{2} = 180^\circ \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει ότι

$$A\hat{E}B = \frac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}.$$

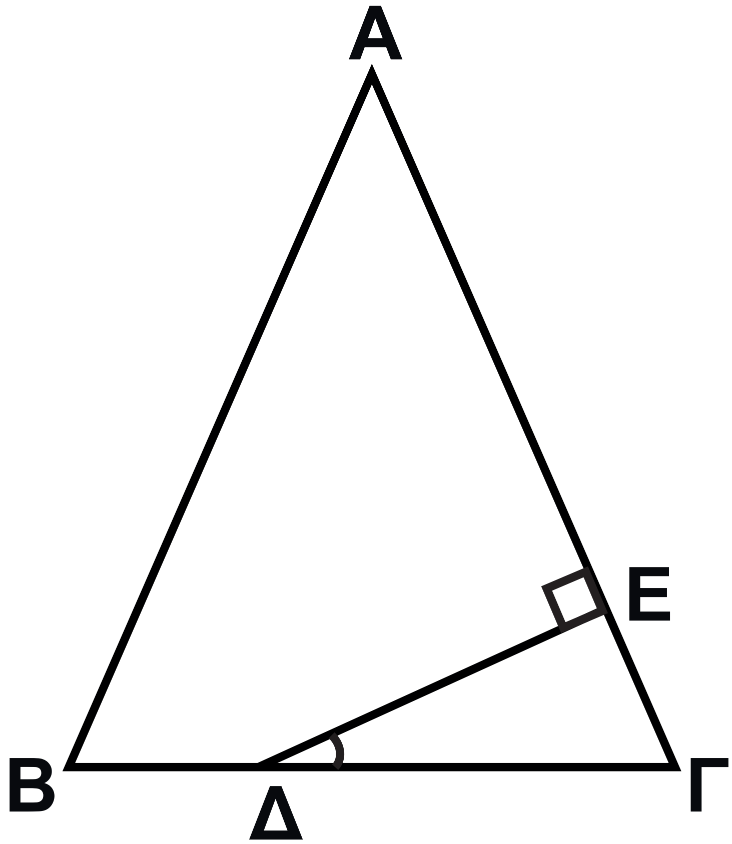


5. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ\\ \hat{B}=\hat{\Gamma}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\hat{A}+2\hat{\Gamma}=180^\circ\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\hat{A}=180^\circ-2\hat{\Gamma}\Leftrightarrow\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\hat{A}=2(90^\circ-\hat{\Gamma})\Leftrightarrow\hat{A}=2E\hat{\Delta}\Gamma$$

αφού $E\hat{\Delta}\Gamma+\hat{\Gamma}=90^\circ$, οπότε $E\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ-\hat{\Gamma}$.



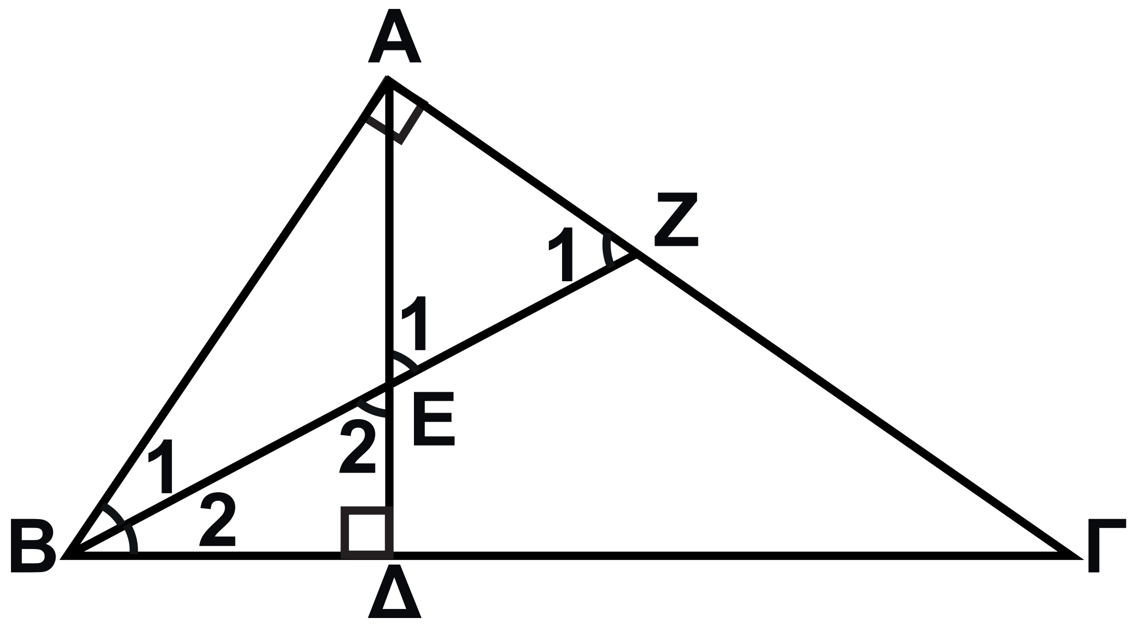
6. Στο τρίγωνο : $\overset{\triangle}{AB}Z$: $\hat{Z}_1 + \hat{B}_1 = 90^\circ$

Στο τρίγωνο : $\overset{\triangle}{BE}\Delta$: $\hat{E}_2 + \hat{B}_2 = 90^\circ$

Αλλά $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ και $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$,

$\hat{Z}_1 = \hat{E}_2$

οπότε ΑΕ = ΑΖ.



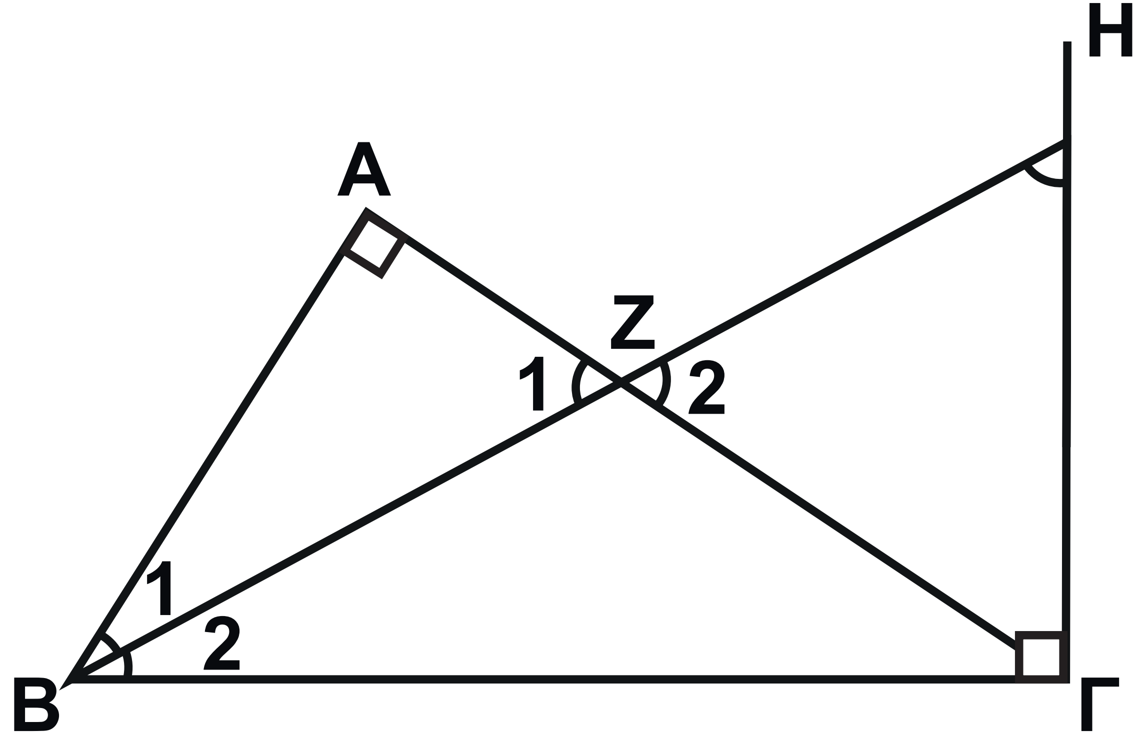
7. Στο τρίγωνο : $\overset{\triangle}{\mathrm{BH\Gamma}}$: $\hat{H} + \hat{B}_2 = 90^\circ$

Στο τρίγωνο : $\overset{\triangle}{\mathrm{ABZ}}$: $\hat{Z}_2 + \hat{B}_1 = 90^\circ$

Αλλά $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ και $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$,

$\hat{Z}_1 = \hat{H}$

οπότε ΖΓ = ΓΗ.

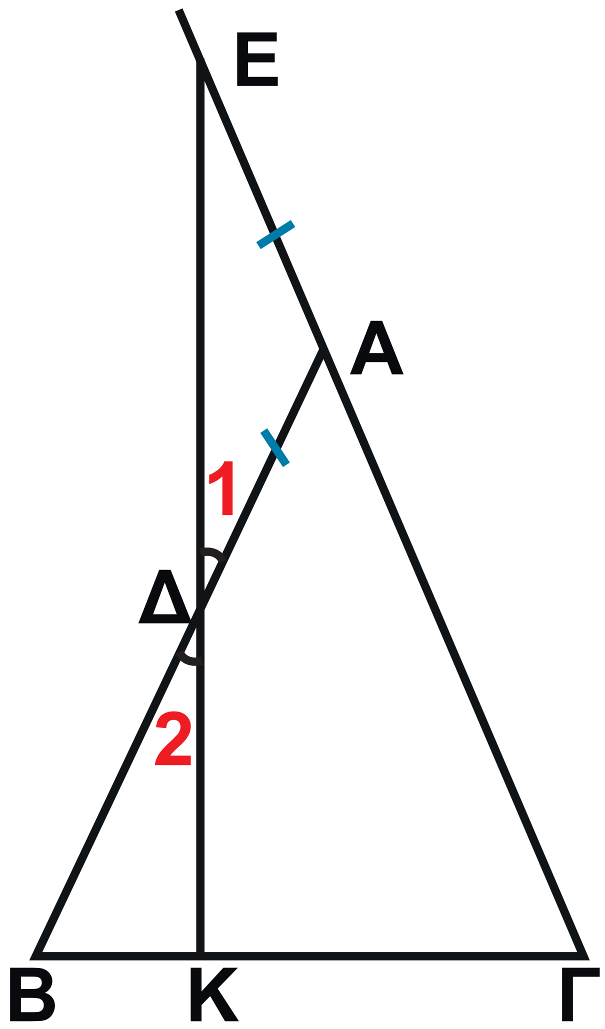


Σύνθετα Θέματα

1. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AE\Delta}$:

$$AE = A\Delta \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{E},\ \hat{A} = \hat{\Delta}_1 + \hat{E}$$

(ως εξωτερική), οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{E} = \dfrac{\hat{A}}{2}$ (1)



Αλλά $\left.\begin{aligned}\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ\\ \hat{B}=\hat{\Gamma}\end{aligned}\right\}$

$$\left.\right\}\hat{A}+2\hat{B}=180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\hat{B}=90^\circ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{\Delta}_1+\hat{B}=90^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Delta}_2+\hat{B}=90^\circ,$$

άρα $\hat{K}=90^\circ$, οπότε $\Delta E \perp B\Gamma$.

2. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABE}$ το ΑΖ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABE}$ είναι ισοσκελές.

Άρα $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$ (1).

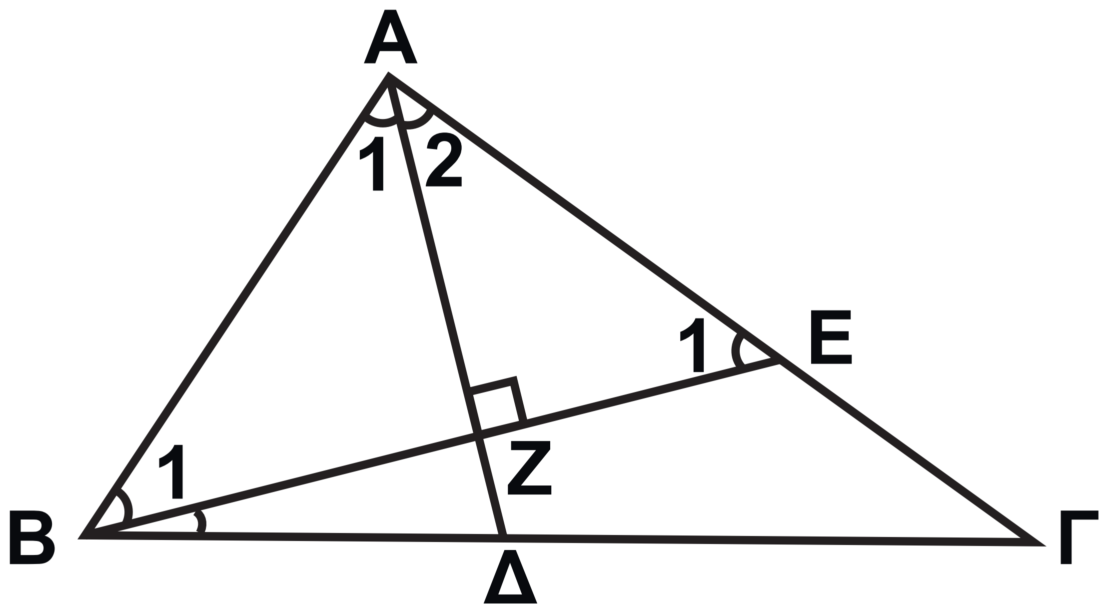
Επίσης $\hat{B}_1 + E\hat{B}\Gamma = \hat{B}$ (2).

$\hat{E}_1 = E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma}$ (εξωτερική)

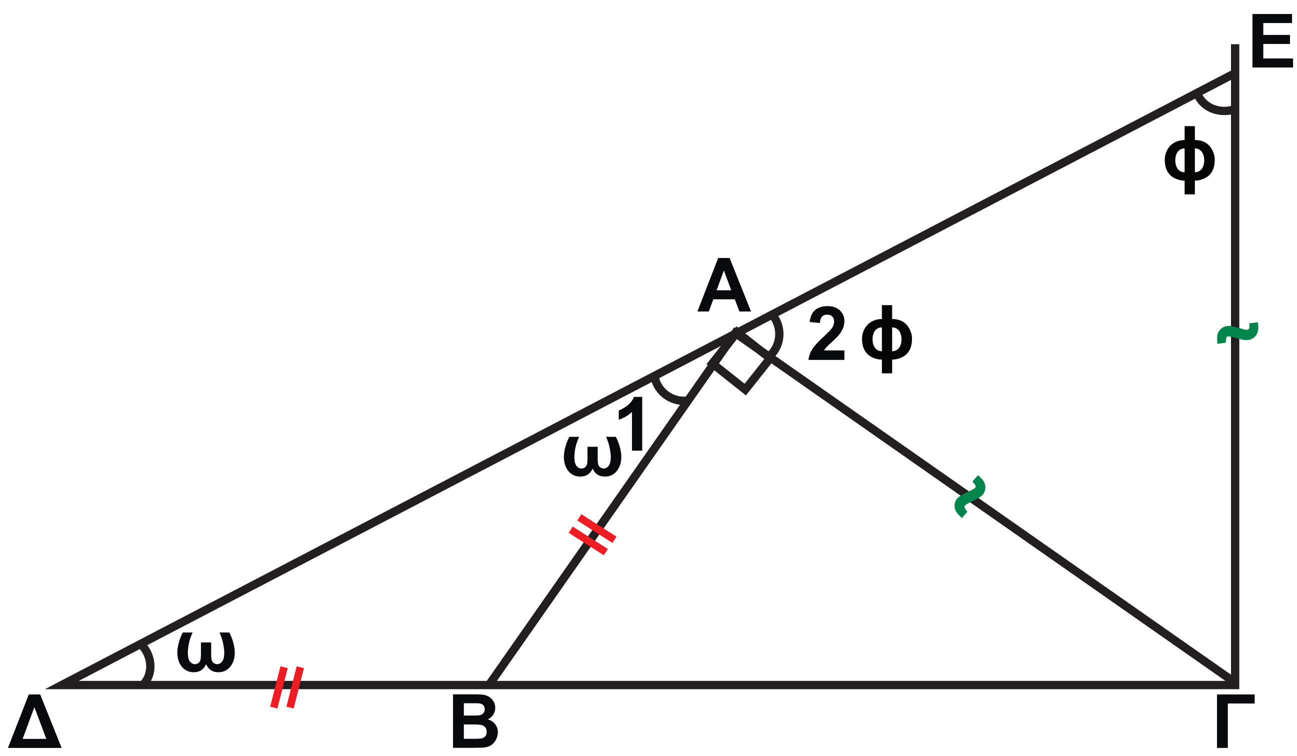
$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{B}_1 = E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma}$ (3).

Από (2), (3) προκύπτει

ότι $2E\hat{B}\Gamma = \hat{B} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma = \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.



3. Έχουμε: ΑΒ = ΒΔ, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Delta} = \hat{\omega}$ και ΓΕ = ΑΓ, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{E} = \hat{\phi}$. Αλλά $\hat{E} + \hat{\Delta} = 90^\circ$ (από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΕΓΔ}}$), οπότε $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$. Άρα $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A} = 180^\circ$ και επομένως τα Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

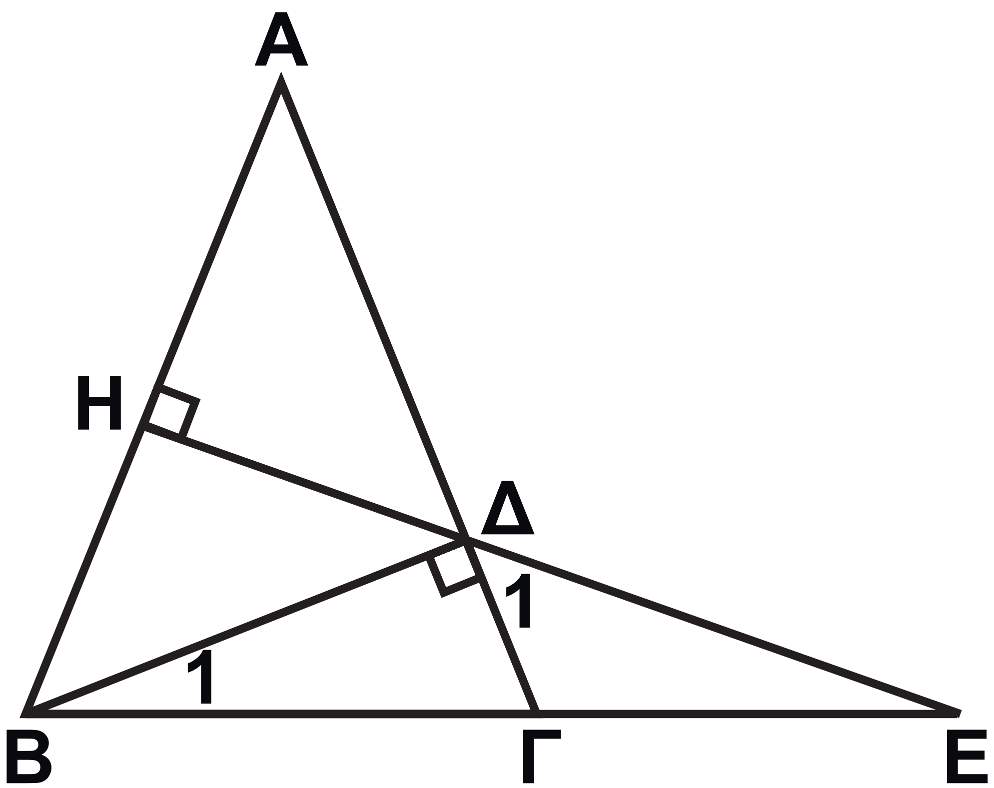


4. i) Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}_1 + \hat{\Gamma} = 90^\circ \text{ (από τρίγωνο } \overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}) \\ \hat{E} + \hat{B} = 90^\circ \text{ (από τρίγωνο } \overset{\triangle}{BHE}) \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ } (AB = A\Gamma) \end{array}\right\}$$

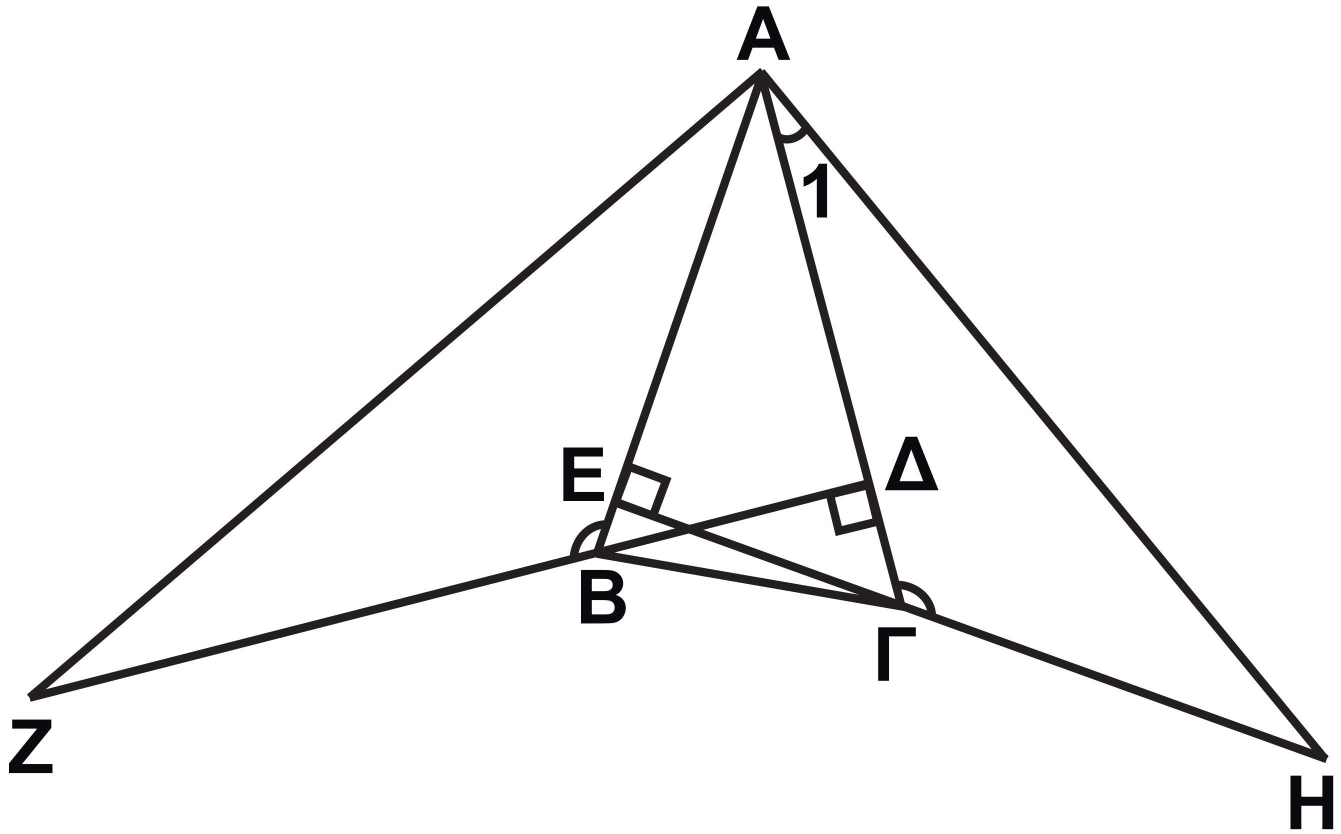
$$\left.\right\} \hat{B}_1 = \hat{E}$$

οπότε $B\Delta = \Delta E$.



ii) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{B\Delta\Gamma}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{\Delta\Gamma E}}$ έχουν: ΔΓ κοινή, ΒΔ = ΔΕ και $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ > \hat{\Delta}_1$. Άρα ΒΓ > ΓΕ.

5. i) Έχουμε $\overset{\triangle}{\mathrm{AZB}} = \overset{\triangle}{\mathrm{A\Gamma H}}$ (ΒΗ = ΑΓ, ΓΗ = ΑΒ, $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{H} = 90^\circ + \hat{\mathrm{A}}$). Άρα ΑΖ = ΑΗ.



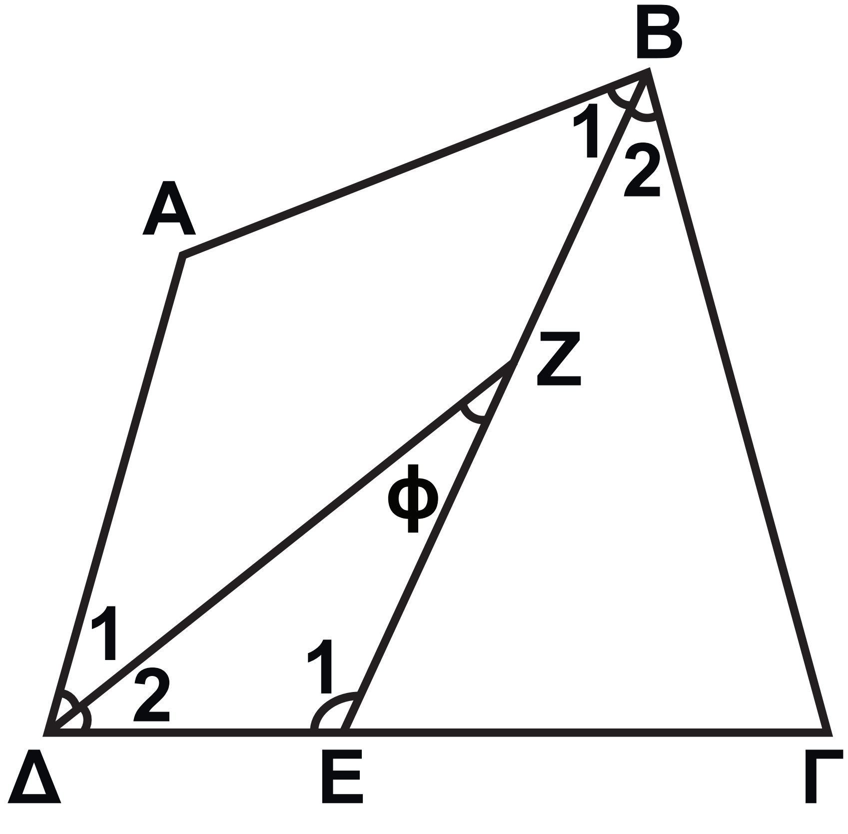
ii) $\left.\begin{array}{l} Z\hat{A}H = Z\hat{A}\Delta + \Gamma\hat{A}H \\ \Gamma\hat{A}H = \hat{Z} \ \ (\text{από (i)}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} Z\hat{A}H = \\ = Z\hat{A}\Delta + \hat{Z} = 90^\circ \end{array}$

οπότε $AZ \perp AH$.

6. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta Z E}$ είναι:

$$\hat{\phi} + \hat{\Delta}_2 + \hat{E}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\phi} + \frac{\hat{\Delta}}{2} + \hat{E}_1 = 180^\circ \ (1)$$



Αλλά $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma} = \hat{B}_2 = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2}$ (2)
(εξωτερική στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{BE\Gamma}$)
και $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ$, οπότε
$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\Delta}}{2} = 180^\circ$(3).
Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

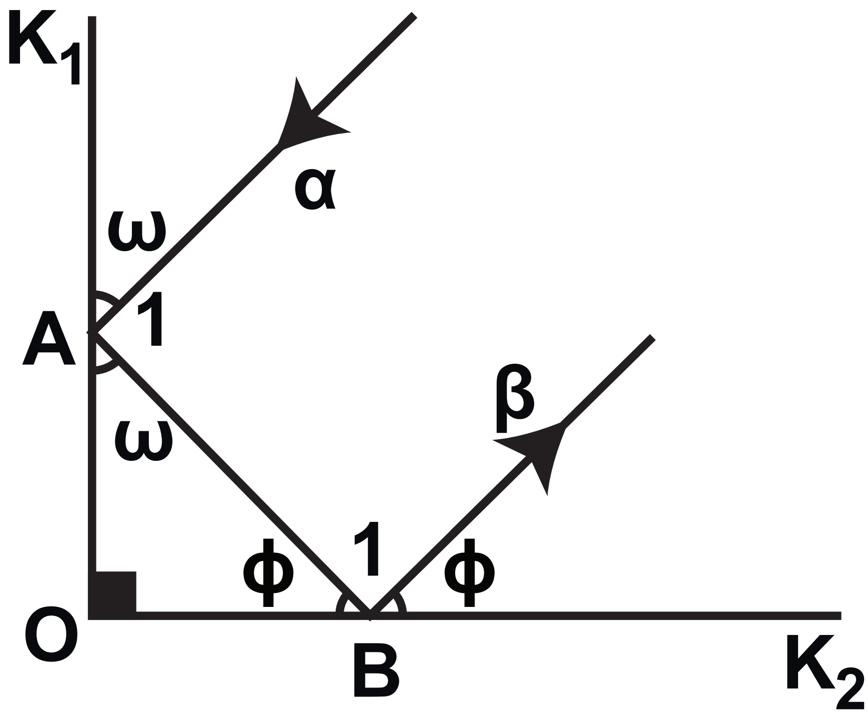
$$\hat{\varphi} + \hat{\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \hat{\varphi} = \frac{\hat{A} - \hat{\Gamma}}{2}.$$

7. Επειδή $A\hat{O}B = 90^\circ$, θα είναι
$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90^\circ$ (1).
Επομένως

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ - 2\hat{\omega} + 180^\circ - 2\hat{\varphi} =$$

$$= 360^\circ - 2(\hat{\omega} + \hat{\varphi}) \overset{(1)}{=} 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ =$$

$= 180^\circ$. Άρα α//β.



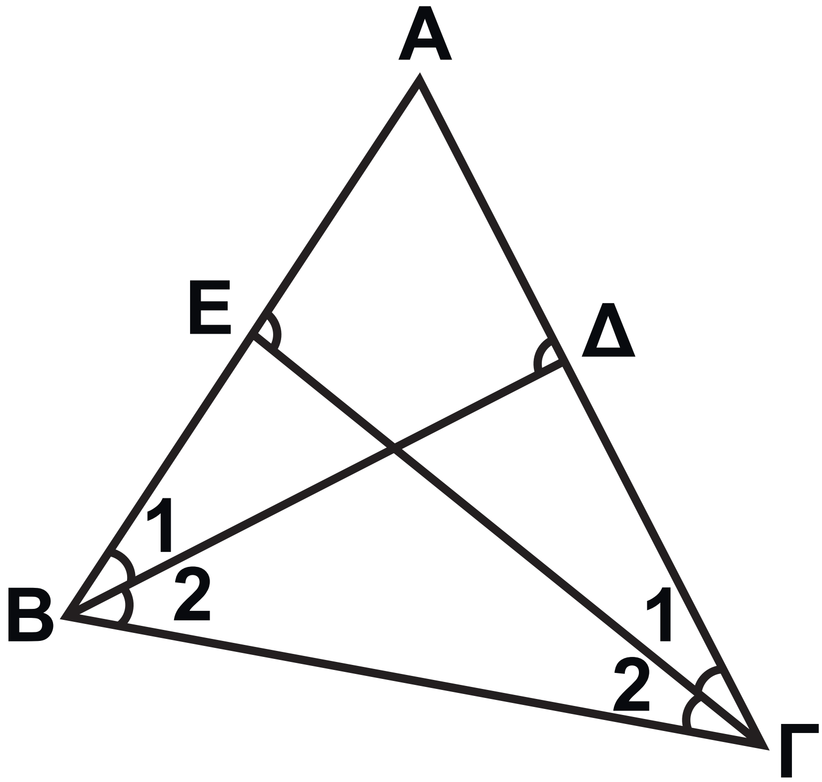
Γενικές Ασκήσεις

1. Έχουμε $B\hat{A}\Gamma = \hat{A} + \hat{B}_1 = \hat{A} + \frac{\hat{B}}{2}$ (εξωτερική του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Delta}$) και $\Gamma\hat{E}A = \hat{B} + \hat{\Gamma}_2 = \hat{B} + \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ (εξωτερική στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{BE\Gamma}$).

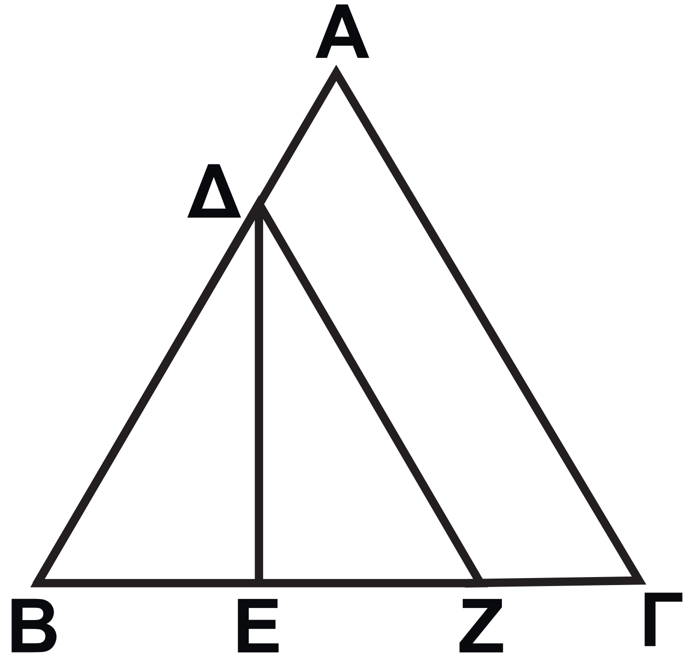
Αρκεί

$$\hat{A} + \frac{\hat{B}}{2} = \hat{A} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow 2\hat{A} + \hat{B} = 2\hat{B} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow$$

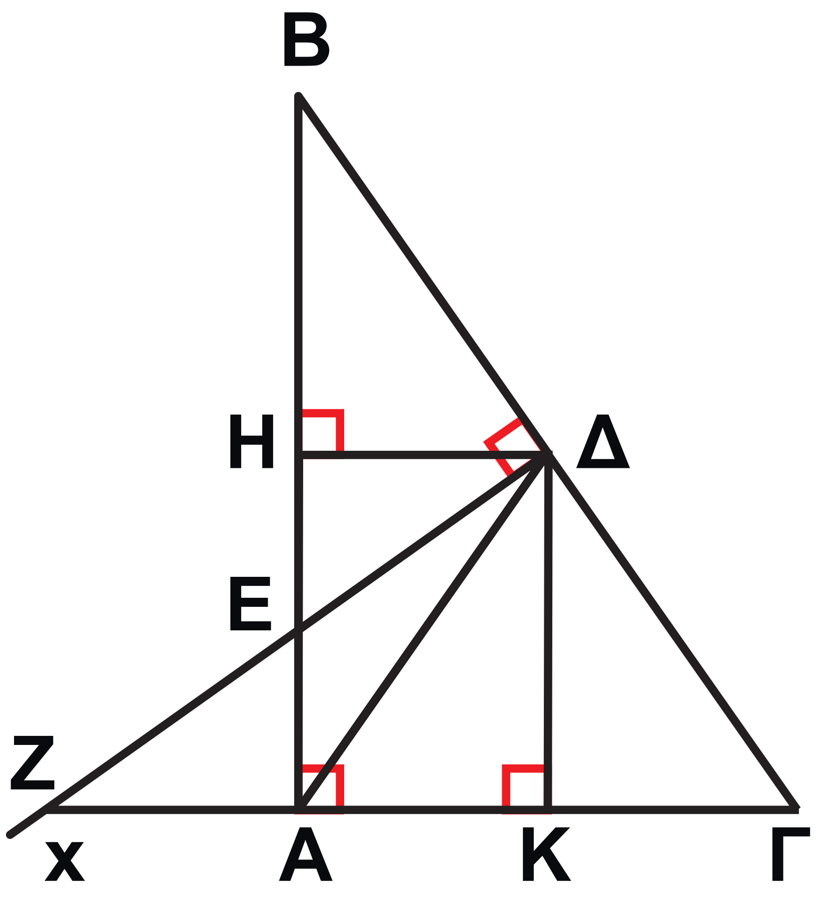
$\Leftrightarrow 2\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ που ισχύει (αφού $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$).



2. Έστω Ζ μέσο του ΕΓ. Τότε το τρίγωνο $B\overset{\triangle}{\Delta}Z$ είναι ισόπλευρο $\left(B\Delta = BZ = \frac{2}{3}\alpha,\ \hat{B} = 60^\circ\right)$ και η ΔΕ είναι διάμεσος. Άρα ΔΕ ύψος, οπότε $\Delta E \perp B\Gamma$.



3. Φέρουμε $ΔΗ \perp ΑΒ$, $ΔΚ \perp ΑΓ$. Είναι $ΔΗ = ΔΗ$ (ΑΣ διχοτόμος). Επίσης είναι $\overset{\triangle}{ΒΗΔ} = \overset{\triangle}{ΖΔΚ}$ ($\hat{Η} = \hat{Κ} = 90^\circ$, $ΔΗ = ΗΚ$, $\hat{Β} = \hat{Ζ}$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές).
Άρα $ΒΔ = ΖΔ$. Επομένως
$\overset{\triangle}{ΒΕΔ} = \overset{\triangle}{ΖΔΓ}$ (ορθογώνια, $ΒΔ = ΖΔ$, $\hat{Β} = \hat{Ζ}$), άρα $ΒΕ = ΓΖ$.

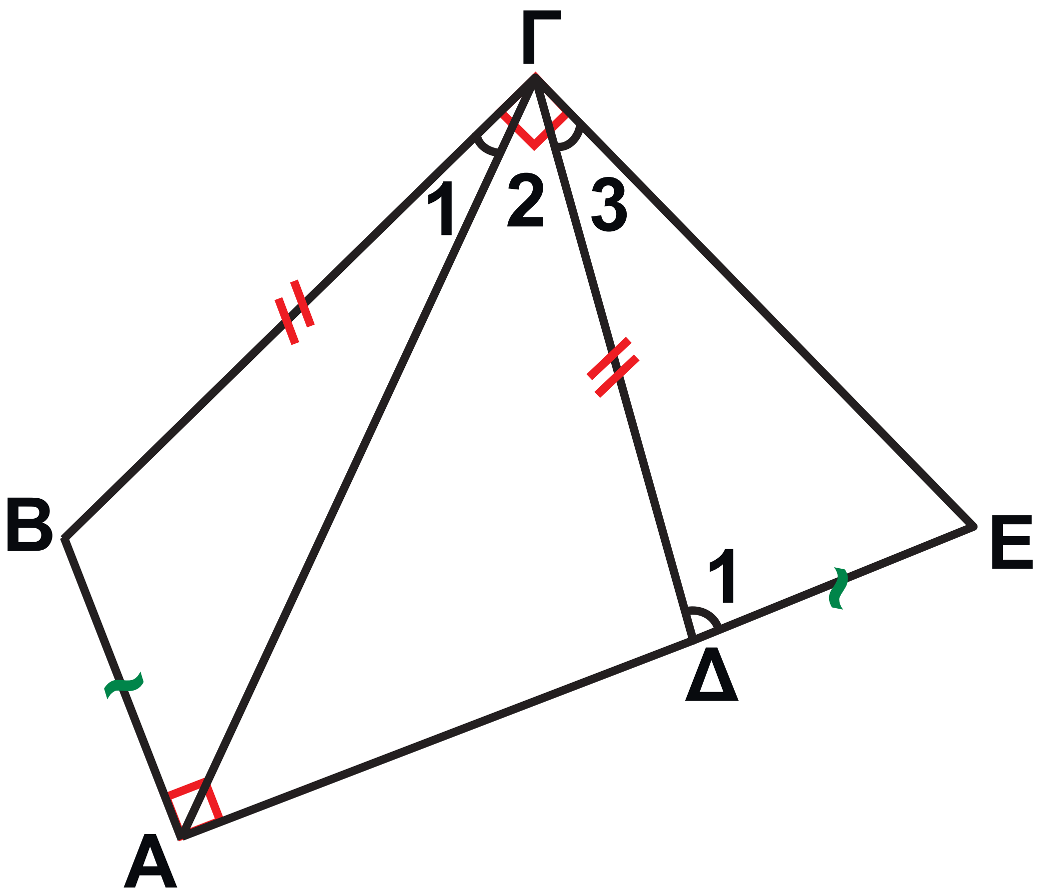


4. Επειδή $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^\circ$, και $\hat{A}=\hat{\Gamma}=90^\circ$ είναι $\hat{B}+\hat{\Delta}=180^\circ$.

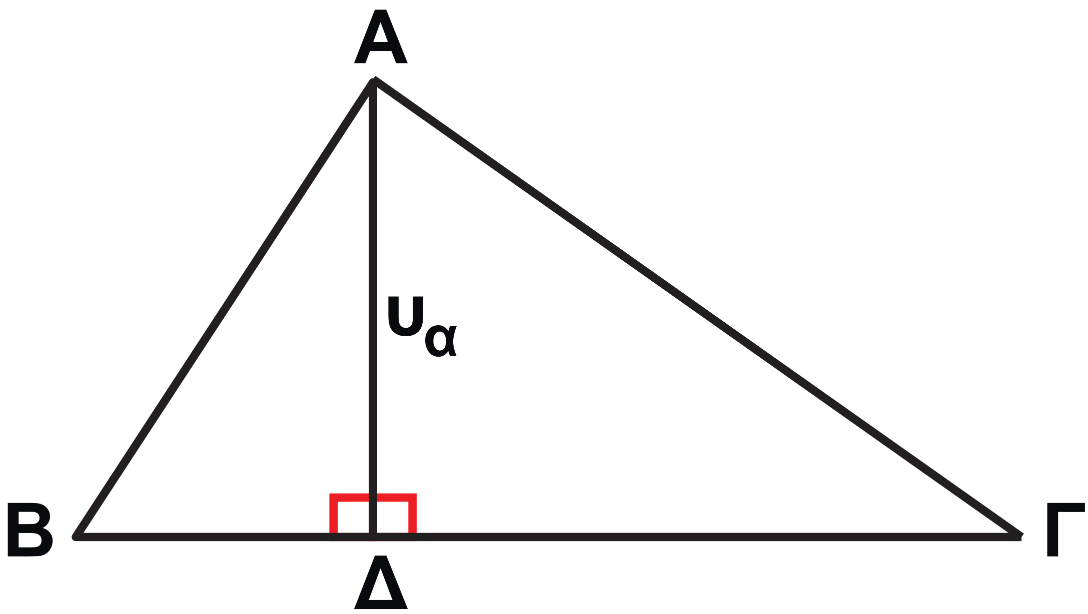
Άρα $\hat{B}=\hat{\Delta}_1$. Επομένως $\overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{\Gamma\Delta E}$ ($B\Gamma=\Gamma\Delta$, $AB=\Delta E$, $\hat{B}=\hat{\Delta}_1$).

Οπότε $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_3$ (1).

Αλλά $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_2=90^\circ \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ $\hat{\Gamma}_2+\hat{\Gamma}_3=90^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}E=90^\circ$, δηλαδή $A\Gamma \perp \Gamma E$.

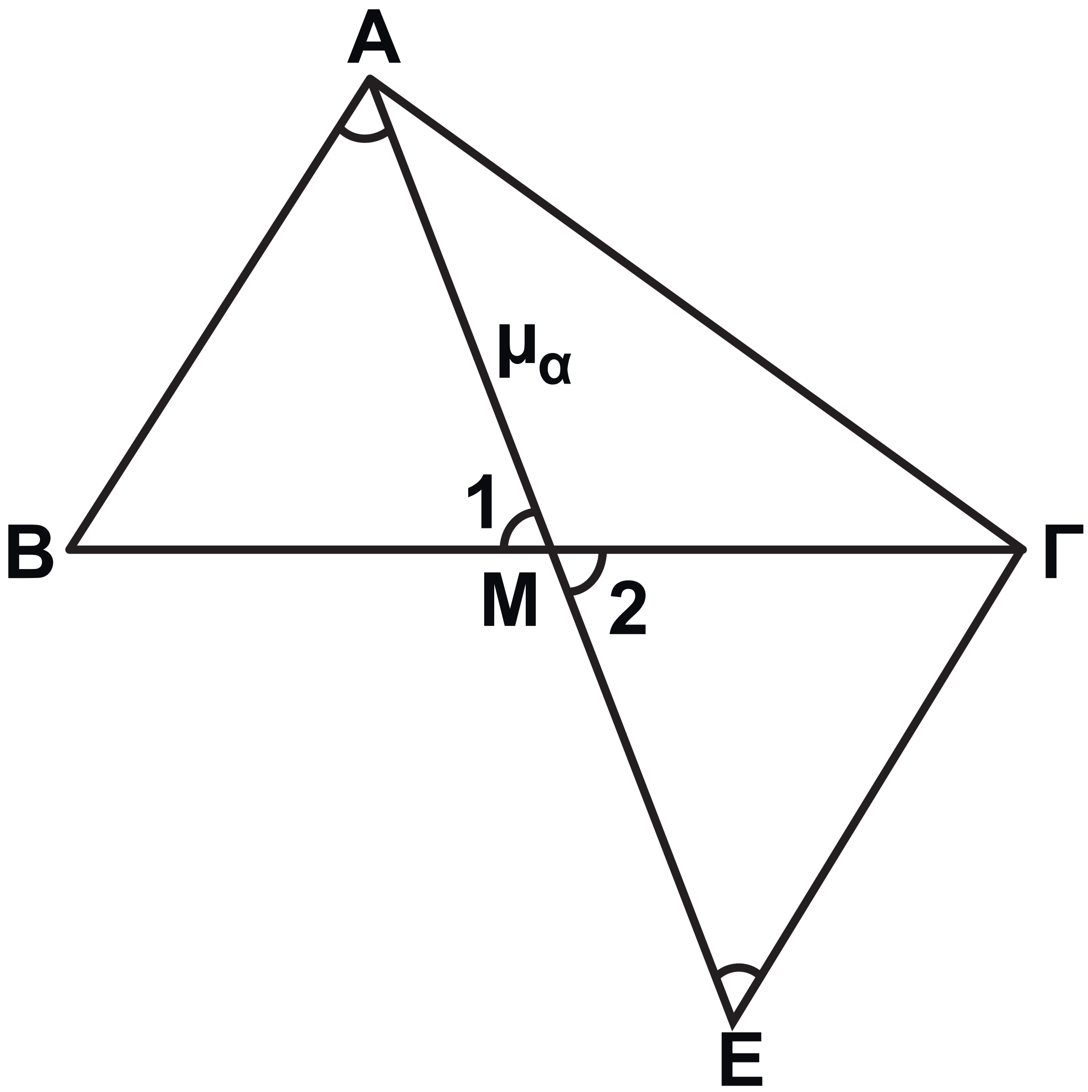


5. **i)** Επειδή ΑΒ < ΑΓ θα είναι
$\hat{B} < \hat{\Gamma}$ (1).
Αλλά $\hat{B} = 90^\circ - B\hat{A}\Delta$,
$\hat{\Gamma} = 90^\circ - \Gamma\hat{A}\Delta$ (2).
Από (1), (2) προκύπτει ότι:
$90^\circ - B\hat{A}\Delta > 90^\circ - \Gamma\hat{A}\Delta$ ή
$-B\hat{A}\Delta > -\Gamma\hat{A}\Delta$ ή $B\hat{A}\Delta < \Gamma\hat{A}\Delta$.



ii) Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά
ΜΕ = ΑΜ. Τότε $\overset{\triangle}{ABM} = \overset{\triangle}{ME\Gamma}$
($AM = ME$, $BM = M\Gamma$, $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$).
Άρα ΑΒ = ΓΕ και $B\hat{A}M = \hat{E}$.

Επομένως στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΑΓΕ}}$ έχουμε ΓΕ = ΑΒ < ΑΓ, οπότε $\text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Γ} < \hat{\text{Ε}}$ ή $\text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Γ} < \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Μ}$.

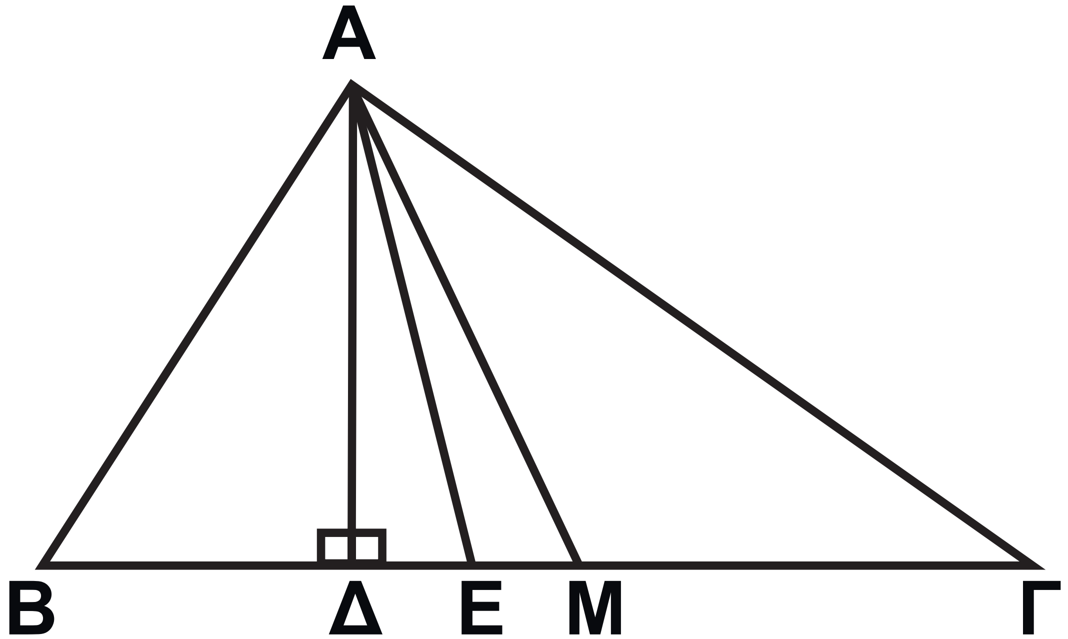


iii) Επειδή ΑΕ διχοτόμος θα είναι

$$\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Ε} = \text{Ε}\hat{\text{Α}}\text{Γ} = \frac{\hat{\text{Α}}}{2}.$$

Από το i) έχουμε $B\hat{A}\Delta < \Gamma\hat{A}\Delta$, άρα $B\hat{A}\Delta < \frac{\hat{A}}{2}$, ενώ από το ii) έχουμε $B\hat{A}M > M\hat{A}\Gamma$, άρα $B\hat{A}M > \frac{\hat{A}}{2}$.

Επομένως το ύψος και η διάμεσος βρίσκονται εκατέρωθεν της διχοτόμου.



6. Αφού τα τρίγωνα $K_1\overset{\triangle}{B}\Gamma$, $K_2\overset{\triangle}{A}\Gamma$, $K_3\overset{\triangle}{A}B$ είναι ισοσκελή, οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου $K_1\overset{\triangle}{K_2}K_3$ είναι μεσοκάθετες των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Άρα το έγκεντρο του τριγώνου $K_1\overset{\triangle}{K_2}K_3$ ταυτίζεται με το περίκεντρο Ο του τριγώνου $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$, οπότε

ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ.

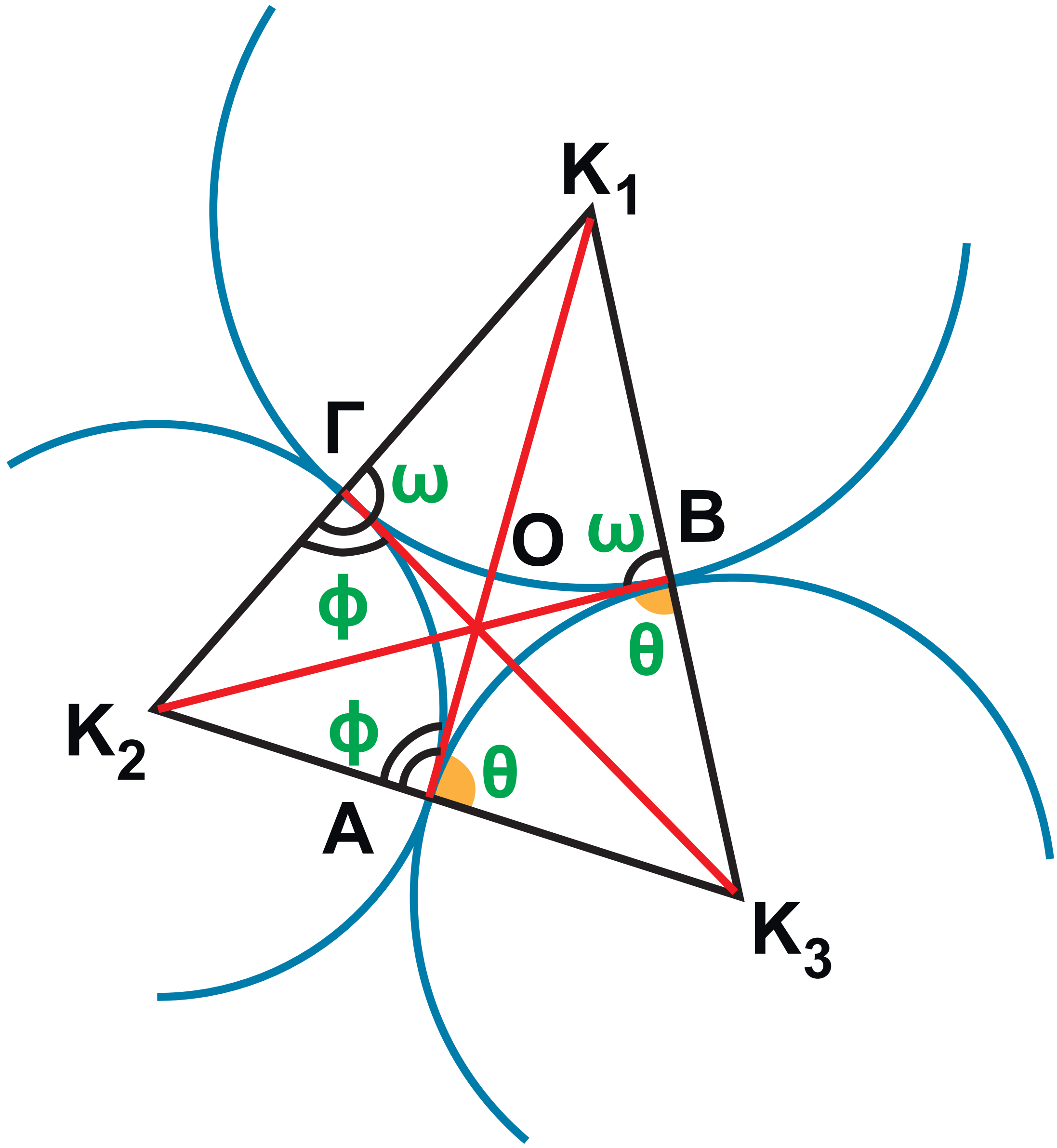
Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$OA \perp K_2K_3$, $OB \perp K_1K_3$, $O\Gamma \perp K_1K_2$.

Πράγματι έχουμε

$O\hat{B}K_1 = O\hat{\Gamma}K_1 = \hat{\omega}$, $O\hat{\Gamma}K_2 = O\hat{A}K_2 = \hat{\phi}$ και $O\hat{A}K_3 = O\hat{B}K_3 = \hat{\theta}$ (από την ισότητα των αντίστοιχων τριγώνων).

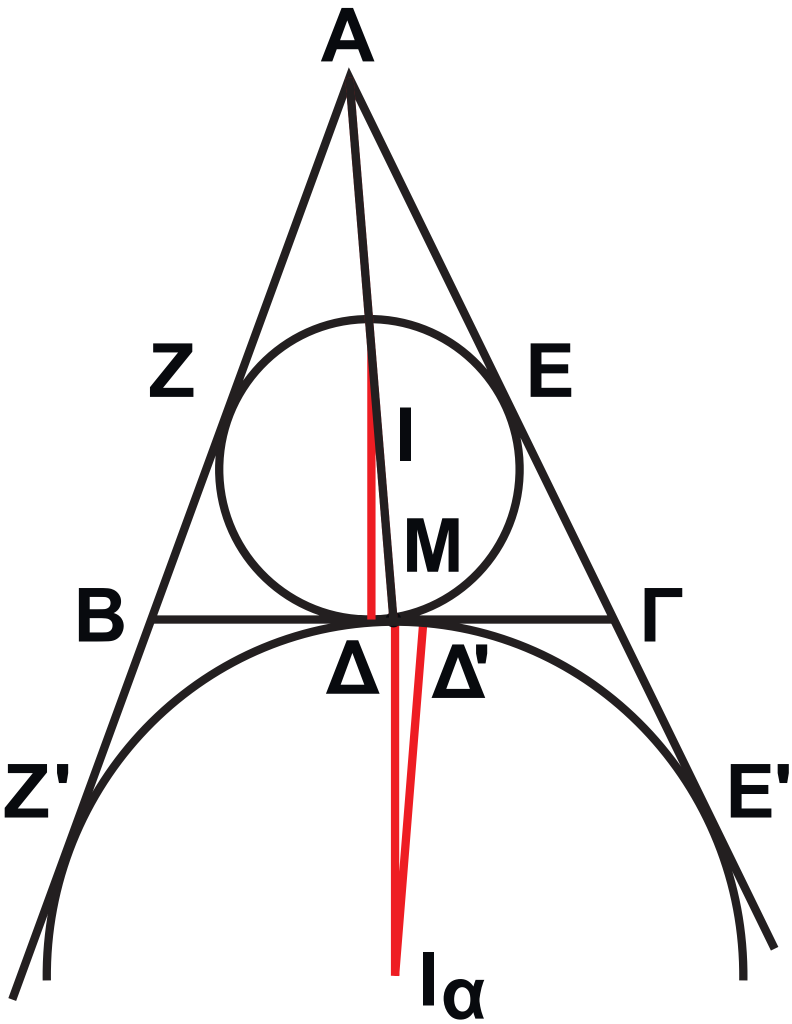
Επειδή $\hat{\omega} + \hat{\phi} = \hat{\omega} + \hat{\theta} = \hat{\phi} + \hat{\theta} = 180^\circ$ προκύπτει ότι $\hat{\omega} = \hat{\phi} = \hat{\theta} = 90^\circ$.



7. i) Έχουμε ΑΖ = ΑΕ = x,
ΒΔ = ΒΖ = y και ΓΔ = ΓΕ = ω.
Τότε y + ω = α, x + ω = β,
x + y = γ (1).
Οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$2x + 2y + 2\omega = \alpha + \beta + \gamma = 2\tau \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + y + \omega = \tau$ (2)
Από (1), (2) προκύπτει ότι
$x = \tau - \alpha$, $y = \tau - \beta$ και $\omega = \tau - \gamma$.

ii) $AZ' + AE' = AB + BZ' + A\Gamma + \Gamma E' =$
$= AB + B\Delta' + A\Gamma + \Gamma\Delta' = AB +$
$+ A\Gamma + B\Gamma = \alpha + \beta + \gamma = 2\tau$.
Επειδή όμως $AZ' = AE'$, προκύπτει ότι $AZ' = AE' = \tau$.



iii) Έστω Μ το μέσο του ΒΓ. Τότε ΜΒ = ΜΓ (3). Αλλά ΒΔ = τ − β και ΓΔ′ = ΓΕ′ = ΑΕ′ − ΑΓ = τ − β. Άρα ΒΔ = ΓΔ′ (4)
Από (3), (4) προκύπτει ότι ΜΔ = ΜΔ′, άρα τα τμήματα ΒΓ και ΔΔ′ έχουν κοινό μέσο.

iv) ΖΖ′ = ΑΖ′ – ΑΖ = τ – (τ – α) = α, ΕΕ′ = ΑΕ′ – ΑΕ = τ – (τ – α) = α και ΔΔ′ = ΒΓ – ΒΔ – ΓΔ′ =
= α – (τ – β) – ΓΕ′ = α – τ + β −
− (ΑΕ′ – ΑΓ) = α – τ + β − (τ – β) =
= α + 2β – 2τ = α + 2β − (α + β +
+ γ) = β − γ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ