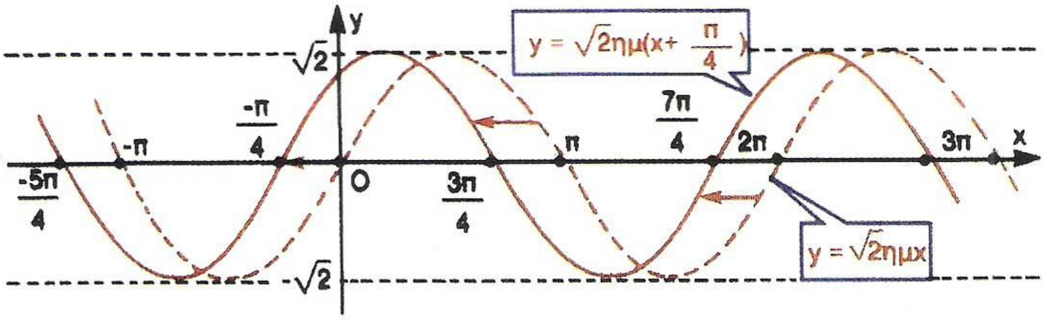
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΑΛΓΕΒΡΑ



Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

Άλγεβρα

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 2ος

Συγγραφική ομάδα:

Ανδρεαδάκης Στυλιανός • Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος • Καθηγητής μαθηματικών Βαρβακείου Πειραμ. Λυκείου

Παπασταυρίδης Στάυρος • Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας

Πολύζος Γεώργιος • Καθηγητής μαθηματικών Β' Λυκείου Αμαρουσίου

Σβέρκος Ανδρέας • Καθηγητής μαθηματικών Β' Λυκείου Αγ. Παρασκευής

Α' ΕΚΔΟΣΗ: 1991

ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ: 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 2012

Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

Ομάδα Εργασίας του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

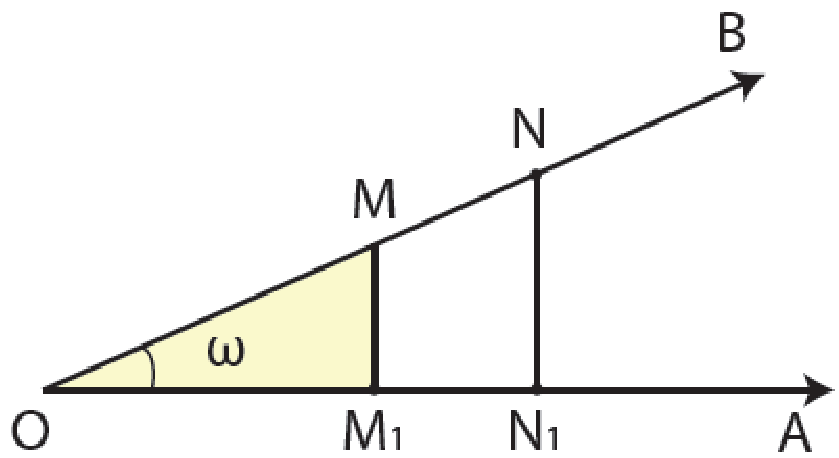
ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ-ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Γραμμένος Νικόλαος, Εκπαιδευτικός

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Έστω οξεία γωνία ω. Αν πάνω στη μία από τις δύο πλευρές της γωνίας πάρουμε τυχαία σημεία Μ και Ν και φέρουμε τις κάθετες ΜΜ1 και ΝΝ1 προς την άλλη πλευρά της γωνίας, τότε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{OMM_1}$ και $\overset{\triangle}{ONN_1}$ θα είναι όμοια, οπότε θα ισχύει:



$$\frac{(MM_1)}{(OM)} = \frac{(NN_1)}{(ON)}, \quad \frac{(OM_1)}{(OM)} = \frac{(ON_1)}{(ON)} \text{ και}$$
$$\frac{(MM_1)}{(OM_1)} = \frac{(NN_1)}{(ON_1)}$$

Επομένως, για τη γωνία ω τα πηλίκα

$$\frac{(MM_1)}{(OM)}, \frac{(OM_1)}{(OM)} \text{ και } \frac{(MM_1)}{(OM_1)}$$

είναι σταθερά, δηλαδή ανεξάρτητα της θέσης του σημείου Μ πάνω στην πλευρά της γωνίας. Τα πηλίκα αυτά, όπως γνωρίζουμε από Γυμνάσιο, ονομάζονται ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη της γωνίας ω και συμβολίζονται με ημω , συνω και εφω , αντιστοίχως.

Δηλαδή, στο ορθογώνιο τρίγωνο $M_1\hat{O}M$, ισχύει:

$$\text{ημω} = \frac{(MM_1)}{(OM)}\left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

$$\text{συνω} = \frac{(OM_1)}{(OM)}\left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

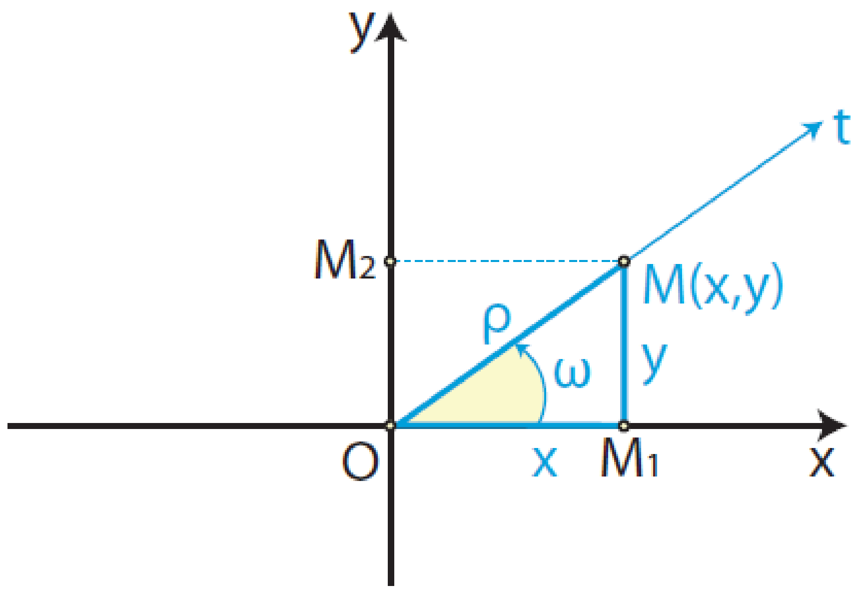
$$\text{εφω} = \frac{(MM_1)}{(OM_1)}\left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}\right)$$

Ορίζουμε ακόμα ως συνεφαπτομένη της οξείας γωνίας ω, την οποία συμβολίζουμε με σφω, το σταθερό πηλίκο

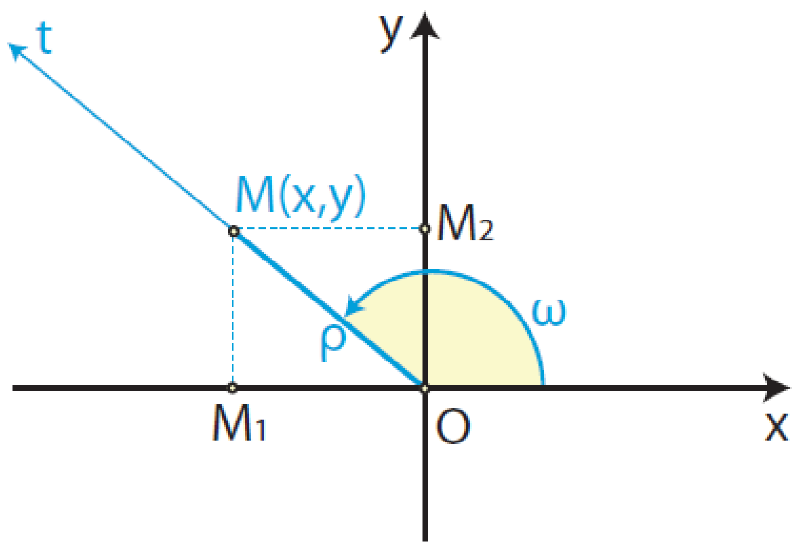
$$\text{σφω} = \frac{(OM_1)}{(MM_1)}\left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}}\right)$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω, με $0^0 \le \omega \le 360^0$

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, Ot μία ημιευθεία αυτού και ω η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox αν περιστραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το Ο μέχρι να συμπέσει για πρώτη φορά με την ημιευθεία Ot (Σχ. α΄, β΄). Ο θετικός ημιάξονας Ox λέγεται αρχική πλευρά της γωνίας ω, ενώ η ημιευθεία Ot λέγεται τελική πλευρά της ω.



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

Πάνω στην τελική πλευρά της γωνίας ω παίρνουμε τυχαίο σημείο M(x, y) και φέρνουμε την κάθετη MM1 στον άξονα x ' x (Σχ. α΄ και β΄).

Αν η γωνία ω είναι οξεία (Σχ. α΄), τότε, όπως είδαμε παραπάνω, ισχύουν οι ισότητες:

$$\text{ημω} = \frac{(MM_1)}{(OM)}, \ \text{συνω} = \frac{(OM_1)}{(OM)},$$

$$\text{εφω} = \frac{(MM_1)}{(OM_1)} \ \text{και} \ \text{σφω} = \frac{(OM_1)}{(MM_1)}$$

Όμως $(OM_1) = x$, $(M_1M) = y$ **και** $(OM) = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho > 0$.

Επομένως, οι παραπάνω ισότητες γράφονται:

$$\text{ημω} = \frac{y}{\rho}, \ \text{συνω} = \frac{x}{\rho},$$

$$\text{εφω} = \frac{y}{x} \ \text{και} \ \text{σφω} = \frac{x}{y},$$

όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$.

Γενικεύοντας τα παραπάνω, ορίζουμε με τον ίδιο τρόπο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας ω (Σχήμα β΄).

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση έχουμε:

$$\etaμω = \frac{y}{ρ},$$

$$εφω = \frac{y}{x} \ (\text{εφόσον } x \neq 0)$$

, όπου $ρ = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$

$$συνω = \frac{x}{ρ},$$

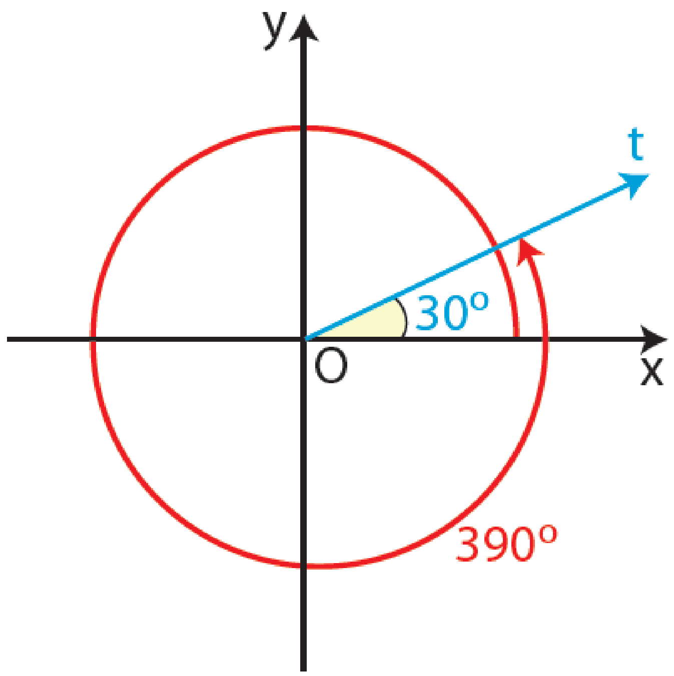
$$σφω = \frac{x}{y} \ (\text{εφόσον } y \neq 0)$$

όπου (x, y) οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου Μ (διαφορετικού του Ο) της τελικής πλευράς της γωνίας ω και $ρ = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ η απόσταση του Μ από το Ο.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων των 360^o και αρνητικών γωνιών

Ας υποθέσουμε ότι ο ημιάξονας Ox ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy περιστρέφεται γύρω από το Ο κατά τη θετική φορά. Αν πραγματοποιήσει μια πλήρη περιστροφή και περιστραφεί επιπλέον και κατά γωνία μέτρου 30^o, τότε λέμε ότι ο Ox έχει διαγράψει γωνία

$$ω = 360^o + 30^o = 390^o \,.$$



Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι γωνίες που είναι μεγαλύτερες των 360°, δηλαδή οι γωνίες της μορφής:

$$\omega = \nu \cdot 360^0 + \mu^0, \text{ όπου } \nu \in \mathbb{N}^* \text{ και}$$

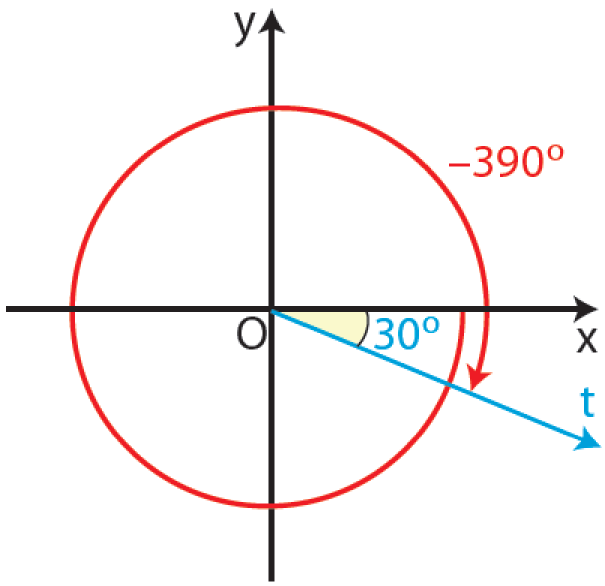
$$0^\circ \leq \mu < 360^\circ$$

Αν τώρα ο ημιάξονας Ox, στρεφόμενος γύρω από το O κατά την αρνητική φορά, πραγματοποιήσει μια πλήρη περιστροφή και στη συνέχεια διαγράψει γωνία μέτρου 30°, τότε λέμε ότι ο ημιάξονας Ox έχει διαγράψει αρνητική γωνία

360° + 30° = 390°

ή αλλιώς γωνία:

$$\omega = -(360^0 + 30^0) = -390^0.$$



Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι αρνητικές γωνίες δηλαδή οι γωνίες της μορφής:
$\omega = -(\nu \cdot 360^0 + \mu^0)$, **όπου** $\nu \in \mathbb{N}^*$ **και** $0 \leq \mu < 360^0$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που είναι μεγαλύτερες από 3600 , καθώς και των αρνητικών γωνιών, ορίζονται όπως και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών από 00 μέχρι 3600 .

Δηλαδή, για κάθε γωνία ω, θετική ή αρνητική, ορίζουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho},$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \text{ (εφόσον } x \neq 0\text{)},$$

$$\text{όπου } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho},$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} \text{ (εφόσον } y \neq 0\text{)}$$

όπου (x, y) οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου Μ της τελικής πλευράς της γωνίας ω (διαφορετικού του Ο) και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ η απόσταση του Μ από το Ο.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια γωνία ω (θετική ή αρνητική) με αρχική πλευρά τον ημιάξονα Οx .

Αν ο ημιάξονας Οx , στρεφόμενος γύρω από το Ο κατά τη θετική φορά, συμπληρώσει ν πλήρεις στροφές και στη συνέχεια διαγράψει τη γωνία ω, τότε θα έχει διαγράψει γωνία $\nu \cdot 360^0 + \omega$, που έχει την ίδια τελική πλευρά με την ω.

Αν όμως ο ημιάξονας Οx , στρεφόμενος γύρω από το Ο κατά την αρνητική φορά, συμπληρώσει ν πλήρεις στροφές και στη συνέχεια διαγράψει τη γωνία ω, τότε θα έχει διαγράψει γωνία $-\nu \cdot 360^0 + \omega$, που έχει και αυτή την ίδια τελική πλευρά με την ω.

Οι παραπάνω γωνίες, που είναι της μορφής $k \cdot 360^\circ + \omega$, $k \in \mathbb{Z}$, επειδή έχουν την ίδια τελική πλευρά θα έχουν και τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Επομένως, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, θα ισχύει:

$$\eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega,$$

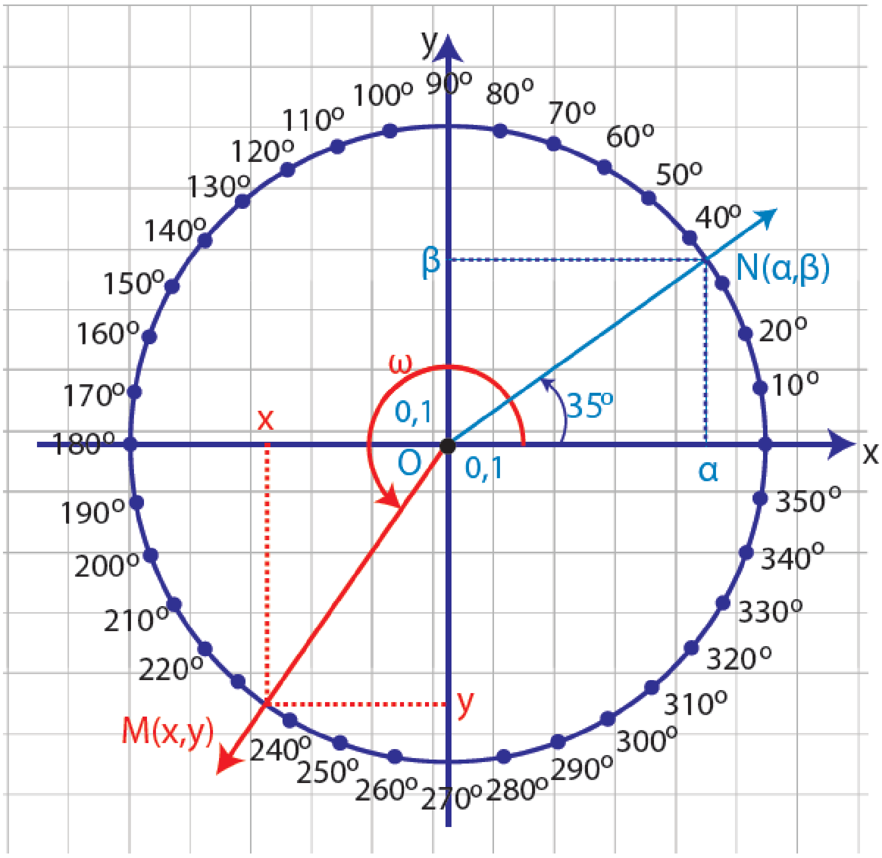
$$\varepsilon\varphi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega,$$

$$\sigma\varphi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Για έναν κατά προσέγγιση, αλλά σύντομο, υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών, χρησιμοποιούμε τον λεγόμενο τριγωνομετρικό κύκλο. Ο τριγωνομετρικός κύκλος θα μας εξυπηρετήσει και σε άλλους σκοπούς, όπως θα φανεί στις επόμενες παραγράφους.



Με κέντρο την αρχή Ο(0,0) ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτίνα ρ =1 γράψουμε έναν κύκλο. Ο κύκλος αυτός λέγεται τριγωνομετρικός κύκλος.

Έστω τώρα ότι η τελική πλευρά μιας γωνίας, π.χ. της γωνίας $\omega = 35^\circ$, τέμνει τον κύκλο αυτό στο σημείο Ν(α, β) .

Επειδή $ημ35^\circ = \frac{β}{ρ}$ και ρ =1 θα

Ισχύει $ημ35^\circ = β \simeq 0,57$. Ομοίως, επειδή $συν35^\circ = \dfrac{α}{ρ}$ και ρ =1, θα ισχύει $συν35^\circ = α \simeq 0,82$.

Γενικότερα, αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ(x, y) , τότε ισχύει:

$συνω = x =$ τετμημένη του σημείου Μ,
$ημω = y =$ τεταγμένη του σημείου Μ

Για το λόγο αυτό ο άξονας x 'x λέγεται και άξονας των συνημίτονων, ενώ ο άξονας y ' y λέγεται και άξονας των ημίτονων.

Άμεσες συνέπειες του παραπάνω συμπεράσματος είναι οι εξής:

1. Οι τιμές του συνω και του ημω μιας γωνίας ω δεν μπορούν να υπερβούν κατ' απόλυτη τιμή την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου, που είναι ίση με 1. Δηλαδή ισχύει:

$-1 \leq συνω \leq 1$ και $-1 \leq ημω \leq 1$

2. Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω, ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας αυτής, είναι όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας.

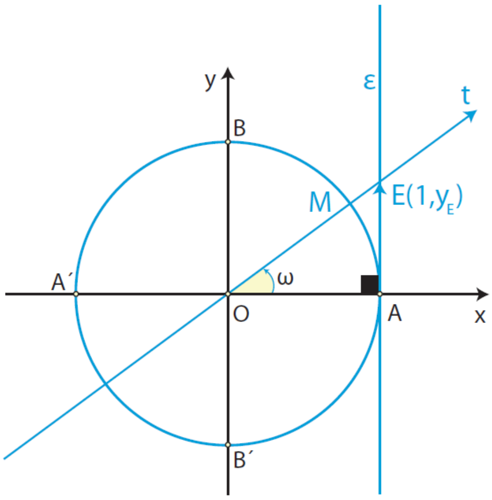
	1ο	2ο	3ο	4ο
ημω	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-
σφω	+	-	+	-

Ο άξονας των εφαπτομένων

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μια γωνία ω που η τελική της πλευρά τον τέμνει στο σημείο Μ(x, y) . Φέρνουμε την εφαπτομένη ε του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο Α.

Αν η τελική πλευρά της γωνίας βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο και η ευθεία ΟΜ τέμνει την ε στο Ε, τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{O}E$ θα έχουμε

$$εφω = \frac{(ΑΕ)}{(ΟΑ)} = \frac{(ΑΕ)}{1} = (ΑΕ)$$



Αν με y_E παραστήσουμε την τεταγμένη του Ε, τότε θα ισχύει (ΑΕ)= y_E ,οπότε θα είναι εφω= y_E .

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και όταν η τελική πλευρά της γωνίας ω βρίσκεται σε οποιοδήποτε άλλο τεταρτημόριο.

Επομένως σε κάθε περίπτωση ισχύει: εφω = y_E =τεταγμένη του σημείου Ε

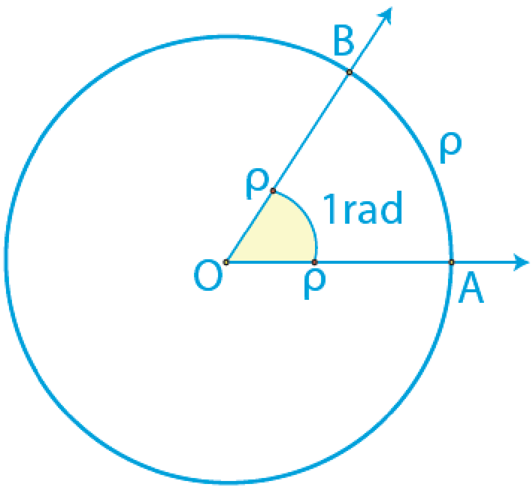
Για το λόγο αυτό η ευθεία ε, που έχει εξίσωση x =1 , λέγεται άξονας των εφαπτομένων.

Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Έχουμε γνωρίσει στο Γυμνάσιο το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης τόξων. Συγκεκριμένα, ένα τόξο ΑΒ ενός κύκλου (Ο, ρ) λέγεται τόξο ενός ακτινίου (ή 1rad), αν το τόξο αυτό έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου.

Επομένως, το τόξο α ακτινίων (ή α rad) έχει μήκος $S = \alpha \cdot \rho$.

Ορίζουμε τώρα το ακτίνιο και ως μονάδα μέτρησης των γωνιών ως εξής:



ΟΡΙΣΜΟΣ

Ακτίνιο (ή 1 rad) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad).

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει και η σχέση μοίρας και ακτινίου ως μονάδων μέτρησης γωνιών, ως εξής:

Έστω ότι μια γωνία ω είναι μ° και α rad . Επειδή το μήκος ενός κύκλου ακτίνας ρ είναι 2πρ, η γωνία 360° είναι ίση με 2π rad .

Οπότε, η γωνία 1 rad είναι ίση με $\frac{360}{2\pi}$ μοίρες,

Επομένως, η γωνία α rad είναι ίση με $\alpha \cdot \frac{180}{\pi}$ μοίρες.

Επειδή όμως η γωνία ω είναι μ°, θα ισχύει $\mu = \alpha \cdot \frac{180}{\pi}$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

Για παράδειγμα:

✓Για να εκφράσουμε τη γωνία 60° σε ακτίνια, θέτουμε στον τύπο

$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ όπου μ = 60° και έχουμε

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Άρα είναι $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad.

✓Για να εκφράσουμε τη γωνία $\frac{5\pi}{6}$ rad σε μοίρες, θέτουμε στον τύπο

$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ όπου $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ και έχουμε

$$\frac{\frac{5\pi}{6}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 150$$

Άρα $\frac{5\pi}{6}$ rad=150°.

Στον παρακάτω πίνακα επαναλαμβάνουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μερικών γωνιών που είχαμε υπολογίσει στο Γυμνάσιο και οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στις διάφορες εφαρμογές.

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Στη συνέχεια, επειδή στον τριγωνομετρικό κύκλο το τόξο x rad έχει μήκος x, αντί να γράφουμε ημ(x rad) , συν(x rad) , εφ(x rad) και σφ(x rad), θα γράφουμε απλά ημx , συν x , εφx και σφx .

Για παράδειγμα, αντί να γράφουμε π.χ. $ημ\left(\frac{π}{3}rad\right)$ θα γράφουμε απλά $ημ\frac{π}{3}$ και αντί ημ(100rad) θα γράφουμε απλά ημ100 .

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Οι μετρήσεις που έκανε ένας μηχανικός για να βρει το ύψος h ενός καμπαναριού ΓΚ, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

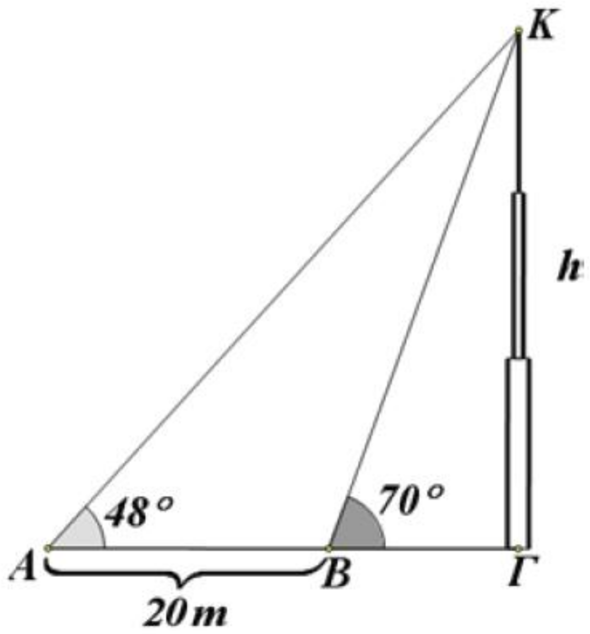
Να υπολογιστεί το ύψος του καμπαναριού σε μέτρα με προσέγγιση ακέραιας μονάδας.

ΛΥΣΗ

Από το σχήμα έχουμε:

$$εφ48^\circ = \frac{h}{ΑΓ}, \text{ οπότε } ΑΓ = \frac{h}{εφ48^\circ}$$

$$εφ70^\circ = \frac{h}{ΒΓ}, \text{ οπότε } ΒΓ = \frac{h}{εφ70^\circ}$$



$$ΑΓ - ΒΓ = ΑΒ = 20m$$

Επομένως $\dfrac{h}{εφ48^\circ} - \dfrac{h}{εφ70^\circ} = 20$, οπότε

$$h = \frac{20εφ70^\circ \cdot εφ48^\circ}{εφ70^\circ - εφ48^\circ}.$$

Με τους τριγωνομετρικούς πίνακες ή με ένα κομπιουτεράκι βρίσκουμε ότι
$εφ70^\circ \simeq 2{,}75$ και $εφ48^\circ \simeq 1{,}11$.

Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε:

$$h \simeq \frac{61{,}05}{1{,}64} \simeq 37$$

Άρα το ύψος του καμπαναριού είναι περίπου 37m .

2η Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 750°.

ΛΥΣΗ

Αν διαιρέσουμε το 750 με το 360 βρίσκουμε πηλίκο 2 και υπόλοιπο 30, έτσι έχουμε

$$750^\circ = 2\cdot 360^\circ + 30^\circ$$

Επομένως

$$\eta\mu 750^\circ = \eta\mu(2\cdot 360^\circ + 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 750^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 750^\circ = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi 750^\circ = \sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3}$$

3η Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $\frac{79\pi}{3}$ rad .

ΛΥΣΗ

Είναι $\frac{79\pi}{3} = \frac{79}{6}\cdot 2\pi$. Αν τώρα διαιρέσουμε τον 79 με τον 6 βρίσκουμε πηλίκο 13 και υπόλοιπο 1. Επομένως είναι

$$\frac{79\pi}{3} = \frac{79}{6}\cdot 2\pi = \left(13 + \frac{1}{6}\right)2\pi$$

$$= 13\cdot 2\pi + \frac{\pi}{3},$$

οπότε θα έχουμε:

$$ημ\frac{79π}{3} = ημ\left(13 \cdot 2π + \frac{π}{3}\right) =$$

$$ημ\frac{π}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

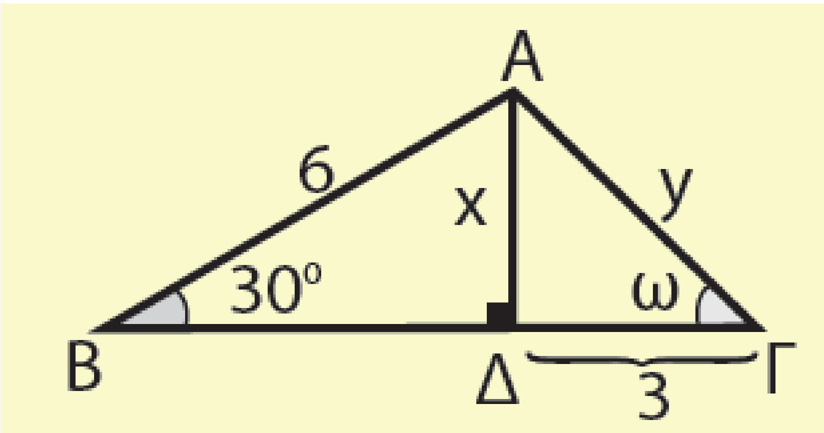
$$συν\frac{79π}{3} = συν\frac{π}{3} = \frac{1}{2}$$

$$εφ\frac{79π}{3} = εφ\frac{π}{3} = \sqrt{3}$$

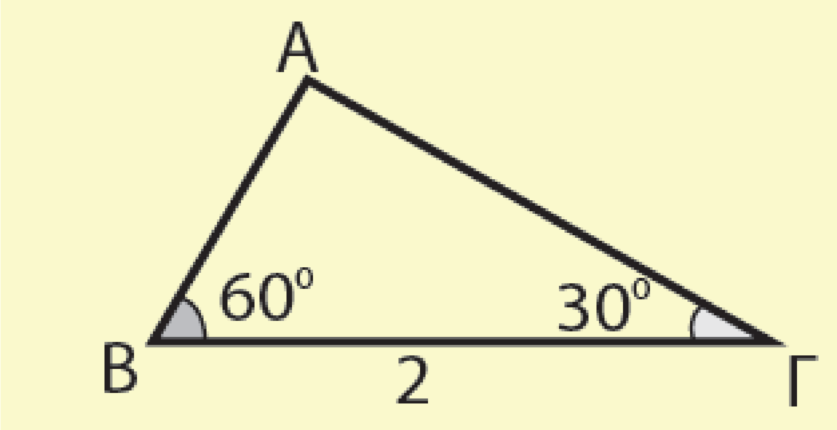
$$σφ\frac{79π}{3} = σφ\frac{π}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη x, y και τη γωνία ω.



2. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου του παρακάτω σχήματος.



3. Μια επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο S = 6cm. Να εκφράσετε τη γωνία αυτή σε ακτίνια, αν η ακτίνα του κύκλου είναι:
i) ρ = 1cm ii) ρ = 2cm
iii) ρ = 3cm.

4. Να εκφράσετε σε rad γωνία
i) 30° ii) 120°
iii) 1260° iv) -1485°.

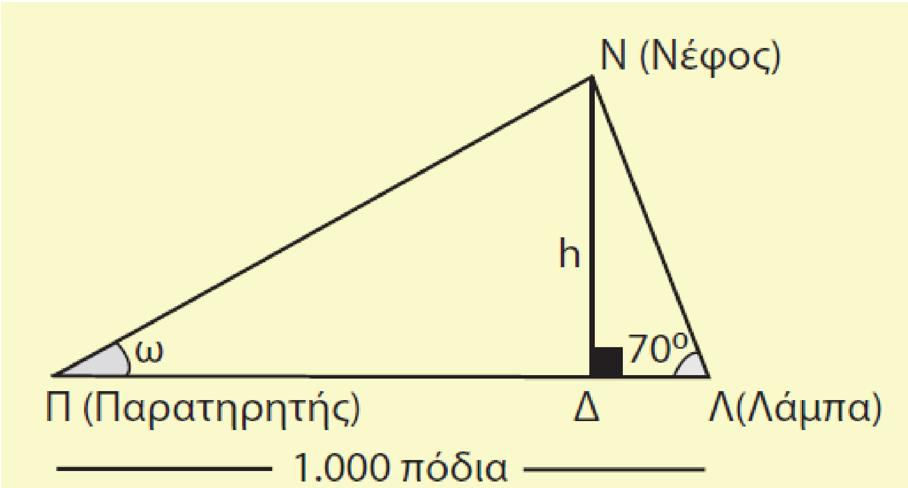
5. Να μετατρέψετε σε μοίρες γωνία:
i) $\frac{\pi}{10}$ rad ii) $\frac{5\pi}{6}$ rad
iii) $\frac{91\pi}{3}$ rad iv) 100rad .

6. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας
i) 1830° ii) 2940°
iii) 1980° iv) 3600°.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Σε μικρά αεροδρόμια υπολογίζουν το ύψος των νεφών

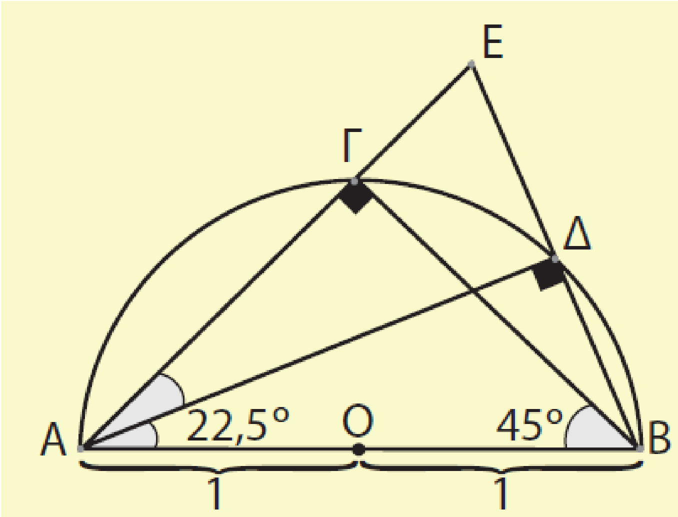
με τη βοήθεια μιας ισχυρής λάμπας εντός παραβολικού κατόπτρου, η οποία βρίσκεται σε απόσταση 1000 πόδια (1 πόδι $\simeq$0,3 m) από το σημείο του παρατηρητή. Η λάμπα είναι τοποθετημένη υπό σταθερή γωνία και ο παρατηρητής στρέφει το όργανο παρατήρησης στο σημείο ανάκλασης του φωτός από τα νέφη.



- **i) Να προσδιορίσετε το ύψος h για ω=30°, 45° και 60°.**
- **ii) Πόση είναι η γωνία ω , αν h=1000 πόδια;**

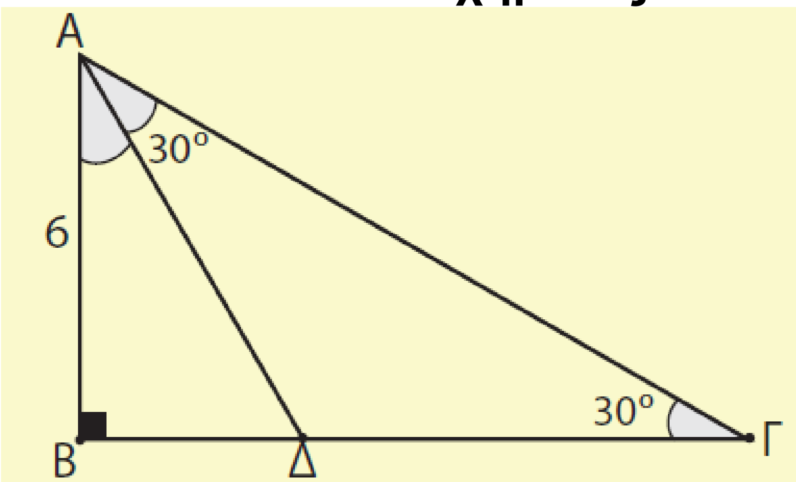
2. Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος:

i) Να δείξετε ότι: (ΑΓ) = (ΒΓ) = 2ημ$45^\circ = \sqrt{2}$.
ii) Να εξηγήσετε γιατί είναι $(ΕΒ) = 4 \cdot ημ22{,}5^0$.
iii) Να υπολογίσετε το μήκος (ΓΕ) .
iv) Να δείξετε, χρησιμοποιώντας το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΒΕΓ}$, ότι $(ΕΒ) = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
v) Να υπολογίσετε το ημ$22{,}5^0$.



vi) Ποιων άλλων γωνιών μπορείτε να υπολογίσετε το ημίτονο και πώς πρέπει να συνεχιστεί η κατασκευή για το σκοπό αυτό;

3. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΔ του διπλανού σχήματος.



4. Η πιο αργή κίνηση που μπορεί να επισημάνει το ανθρώπινο μάτι είναι 1mm ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε πόσο μήκος πρέπει να έχει ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού για να μπορούμε να επισημάνουμε την κίνηση του άκρου του.

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω προκύπτουν ορισμένες σχέσεις που τους συνδέουν και είναι γνωστές ως τριγωνομετρικές ταυτότητες. Οι ταυτότητες αυτές είναι χρήσιμες στο λογισμό με παραστάσεις που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Συγκεκριμένα ισχύουν:

1.

$$ημ^2ω + συν^2ω = 1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν Μ (x, y) είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι:

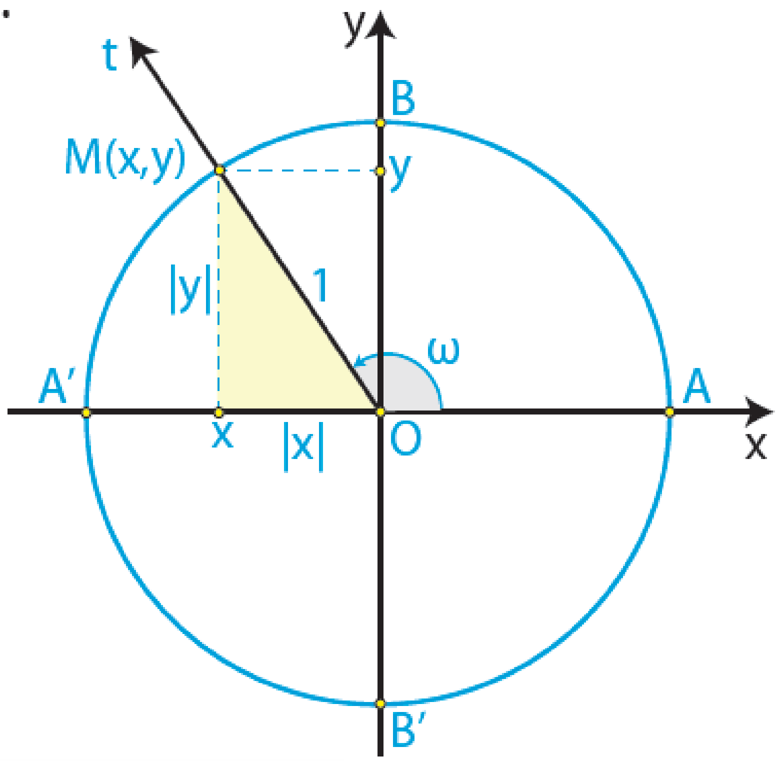
x = συνω και y = ημω

Επειδή όμως, (ΟΜ) =1 και $(ΟΜ)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$
θα ισχύει:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

οπότε θα έχουμε:

$$συν^2ω + ημ^2ω = 1$$



2. $$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \text{και}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στο ίδιο σχήμα έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ (εφόσον } x = \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \text{)}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \quad \text{(εφόσον } y = \eta\mu\omega \neq 0\text{).}$$

Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων (1) και (2), θα αποδείξουμε δύο επιπλέον χρήσιμες ταυτότητες.

3. $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι:

$\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ $\quad$ $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ $\quad$ (εφόσον $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ και $\eta\mu\omega \neq 0$)

Επομένως:

$$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$$

4. $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$ και

$\eta\mu^2\omega = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ταυτότητας $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ με $\sigma\upsilon\nu^2\omega \neq 0$ και έχουμε:

$$\frac{ημ^2ω}{συν^2ω}+\frac{συν^2ω}{ημ^2ω}=\frac{1}{συν^2ω}$$

$$\Leftrightarrow εφ^2ω+1=\frac{1}{συν^2ω} \quad .$$

$$\Leftrightarrow συν^2ω=$$

$$\frac{1}{1+εφ^2ω}$$

Άρα $συν^2ω=\dfrac{1}{1+εφ^2ω}$.

ii) Αν στην ταυτότητα $ημ^2ω+συν^2ω=1$ θέσουμε

$συν^2ω=\dfrac{1}{1+εφ^2ω}$, **έχουμε:**

$$ημ^2ω+\frac{1}{1+εφ^2ω}=1$$

$$\Leftrightarrow ημ^2ω=1-\frac{1}{1+εφ^2ω}$$

$$\Leftrightarrow ημ^2ω=\frac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω}.$$

Άρα $ημ^2ω=\dfrac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η **Αν $ημω=\dfrac{5}{13}$ και $90^\circ<ω<180^\circ$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.**

ΛΥΣΗ

Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$. Αντικαθιστούμε το ημω με $\frac{5}{13}$ και έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{25}{169} =$$

$$\frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Επειδή $90^\circ < \omega < 180^\circ$, είναι συνω < 0 , οπότε έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

Από τις ταυτότητες τώρα $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12} \text{ και } \sigma\varphi\omega = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}.$$

2η Να αποδειχθεί ότι

i) $\eta\mu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega$ ii) $\eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = 2\eta\mu^2\omega - 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έχουμε διαδοχικά:

$$ημ^4ω + συν^4ω$$
$$= (ημ^2ω)^2 + (συν^2ω)^2$$
$$= (ημ^2ω + συν^2ω)^2 - 2ημ^2ω \cdot συν^2ω$$
$$= 1 - 2ημ^2ω \cdot συν^2ω,$$
(επειδή $\quad ημ^2ω + συν^2ω = 1$)

ii) Έχουμε διαδοχικά:
$$ημ^4ω - συν^4ω = (ημ^2ω)^2 - (συν^2ω)^2$$
$$= (ημ^2ω + συν^2ω)(ημ^2ω - συν^2ω)$$
$$= ημ^2ω - συν^2ω$$
(επειδή $\quad ημ^2ω + συν^2ω = 1$)
$$= ημ^2ω - (1 - ημ^2ω) = 2ημ^2ω - 1.$$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $ημx = \frac{3}{5}$ και $\frac{π}{2} < x < π$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad .

2. Αν $συνx = -\frac{2}{3}$ και $π < x < \frac{3π}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad .

3. Αν $εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{3π}{2} < x < 2π$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad .

4. Αν $σφx = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ και $0 < x < \frac{π}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad .

5. Αν $σφx = -2$ και $\frac{3π}{2} < x < 2π$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{2ημxσυνx}{1+συνx}$.

6. Να εξετάσετε, αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες:
i) Να ισχύει συγχρόνως ημx = 0 και συνx = 0 .
ii) Να ισχύει συγχρόνως ημx = 1 και συνx = 1 .
iii) Να ισχύει συγχρόνως $ημx = \frac{3}{5}$ και $συνx = \frac{4}{5}$.

7. Να αποδείξετε ότι, τα σημεία Μ (x, y) του επιπέδου με x = 3συνθ και y = 3ημθ , είναι σημεία κύκλου O(0,0) κέντρου και ακτίνας ρ = 3 .

8. Αν ισχύει x = 2συνθ και y = 3ημθ , να δείξετε ότι 9x2 + 4y2=36 .

9. Αν είναι x = r ημθσυνφ , y = r ημθημφ και z = r συνθ , να δείξετε ότι x2 + y2 + z2 = r2 .

10. Να αποδείξετε ότι:
i) $\frac{ημα}{1+συνα} = \frac{1-συνα}{ημα}$ ii) $συν^4α - ημ^4α = 2συν^2α - 1$

11. Να αποδείξετε ότι:
i) $\frac{ημθ}{1+συνθ} + \frac{1+συνθ}{ημθ} = \frac{2}{ημθ}$

ii) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$.

12. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$

ii) $\varepsilon\varphi^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=\varepsilon\varphi^2\alpha\cdot\eta\mu^2\alpha$.

13. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x}+\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x}=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

ii) $(1-\sigma\upsilon\nu x)\left(1+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=\eta\mu x\cdot\varepsilon\varphi x$

iii) $\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x}=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$

iv) $\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}-\eta\mu x\right)\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu x\right)$

$=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν ημx + συνx = α , να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α τις παραστάσεις:

i) $ημx \cdot συνx$

ii) $\frac{1}{ημx} + \frac{1}{συνx}$

iii) $εφx + σφx$

iv) $ημ^3x + συν^3x$.

2. Να αποδείξετε ότι:

i) $ημ^4x + συν^4x = 1 - 2ημ^2x \cdot συν^2x$

ii) $ημ^6x + συν^6x = 1 - 3ημ^2x \cdot συν^2x$.

iii) Η παράσταση $2(ημ^6x + συν^6x) - 3(ημ^4x + συν^4x)$ έχει τιμή ανεξάρτητη του x , δηλαδή είναι σταθερή.

3. Αν $-\frac{π}{2} < x < \frac{π}{2}$, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{\frac{1+ημx}{1-ημx}} - \sqrt{\frac{1-ημx}{1+ημx}} = 2εφx.$$

4. Αν $0 \le x < \frac{π}{2}$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\sqrt{1+συνx} + \sqrt{1-συνx}}{\sqrt{1+συνx} - \sqrt{1-συνx}} =$$

$$\frac{1+ημx}{συνx} = \frac{συνx}{1-ημx}.$$

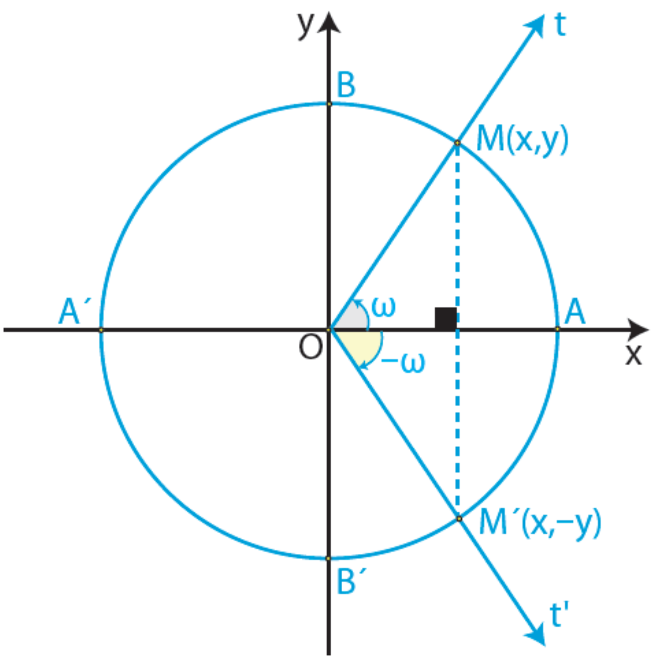
3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^{ο} ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας μπορεί να γίνει, όπως θα δούμε στη συνέχεια, με τη βοήθεια πινάκων που δίνουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών από 0° μέχρι 90°.

Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες ω και ω' που οι τελικές πλευρές τους τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία Μ και Μ' αντιστοίχως.

Γωνίες αντίθετες

Αν οι γωνίες ω και ω' είναι αντίθετες, δηλαδή αν $\omega' = -\omega$, τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία Μ και Μ΄ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x’x . Επομένως τα σημεία αυτά έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες.



Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu(-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega \qquad \eta\mu(-\omega)=-\eta\mu\omega$$
$$\varepsilon\varphi(-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega \qquad \sigma\varphi(-\omega)=-\sigma\varphi\omega$$

Δηλαδή:
Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Για παράδειγμα:

✓Έχουμε:

$$\eta\mu(-30^0)=-\eta\mu(30^0)=-\frac{1}{2}$$
$$\sigma\upsilon\nu(-30^0)=\sigma\upsilon\nu(30^0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\varepsilon\varphi(-30^0)=-\varepsilon\varphi(30^0)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\sigma\varphi(-30^0)=-\sigma\varphi(30^0)=-\sqrt{3}$$

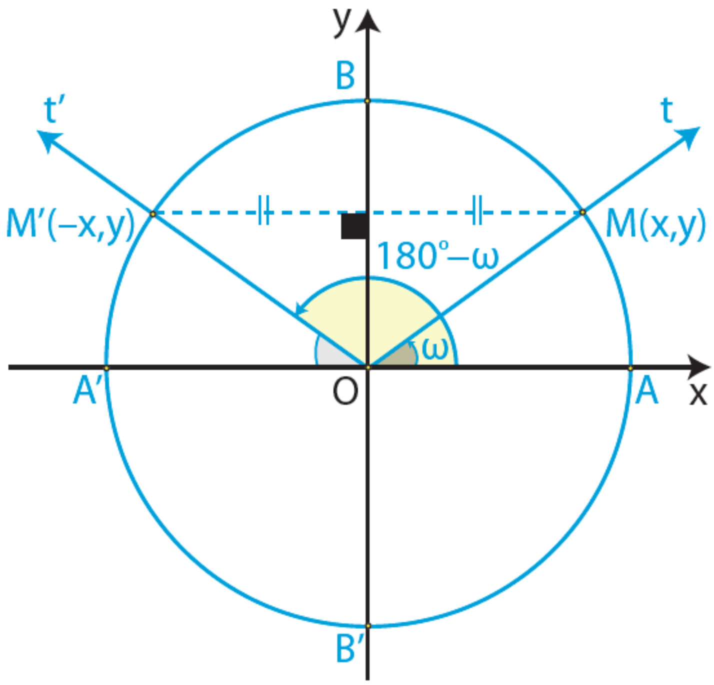
✓Επίσης, έχουμε:

$$\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=-1$$
$$\sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\varphi\frac{\pi}{4}=-1$$

Γωνίες με άθροισμα 180°

Αν οι γωνίες ω και ω' έχουν άθροισμα 180°, δηλαδή αν $\omega' = 180^{\circ} - \omega$, τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y’ y.

Επομένως τα σημεία αυτά έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες.



Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:

$$ημ(180^{\circ} - \omega) = ημ\omega$$

$$συν(180^{\circ} - \omega) = -συν\omega$$

$$εφ(180^{\circ} - \omega) = -εφ\omega$$

$$σφ(180^{\circ} - \omega) = -σφ\omega$$

Δηλαδή,
Οι γωνίες με άθροισμα 180° έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Για παράδειγμα:

✓**Επειδή $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$, έχουμε:**

$$ημ150^\circ = ημ(180^\circ - 30^\circ) = ημ30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$συν150^\circ = συν(180^\circ - 30^\circ) =$$

$$-συν30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$εφ150^\circ = εφ(180^\circ - 30^\circ) =$$

$$-εφ30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$σφ150^\circ = σφ(180^\circ - 30^\circ) =$$

$$-σφ30^\circ = -\sqrt{3}$$

✓**Επειδή $\frac{2π}{3} = π - \frac{π}{3}$, έχουμε:**

$$ημ\left(\frac{2π}{3}\right) = ημ\left(π - \frac{π}{3}\right) = ημ\frac{π}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$συν\left(\frac{2π}{3}\right) = συν\left(π - \frac{π}{3}\right) = -συν\frac{π}{3} = -\frac{1}{2}$$

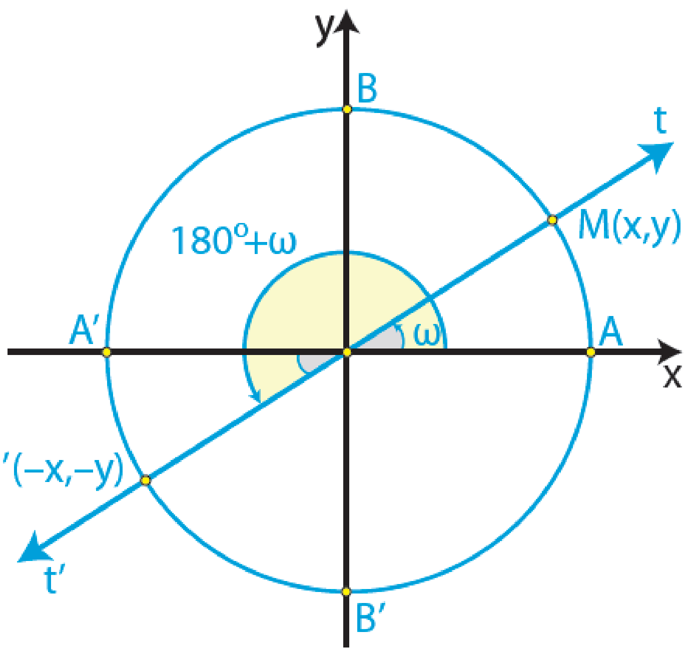
$$εφ\left(\frac{2π}{3}\right) = εφ\left(π - \frac{π}{3}\right) = -εφ\frac{π}{3} = -\sqrt{3}$$

$$σφ\left(\frac{2π}{3}\right) = σφ\left(π - \frac{π}{3}\right) = -σφ\frac{π}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Γωνίες που διαφέρουν κατά 180^o

Αν οι γωνίες ω και ω' διαφέρουν κατά 180°,δηλαδή αν $\omega' = 180^\circ + \omega$,τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Επομένως, τα σημεία αυτά έχουν αντίθετες τετμημένες και αντίθετες τεταγμένες.

Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$$\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(180^\circ + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(180^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

Δηλαδή,

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.

Για παράδειγμα:

✓**Επειδή $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$, έχουμε:**

$$ημ210^\circ = ημ(180^\circ + 30^\circ) = -ημ30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$συν210^\circ = συν(180^\circ + 30^\circ) =$$

$$-συν30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$εφ210^\circ = εφ(180^\circ + 30^\circ) = εφ30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$σφ210^\circ = σφ(180^\circ + 30^\circ) = σφ30^\circ = \sqrt{3}$$

✓**Επειδή $\frac{4π}{3} = π + \frac{π}{3}$, έχουμε:**

$$ημ\left(\frac{4π}{3}\right) = ημ\left(π + \frac{π}{3}\right) = -ημ\frac{π}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$συν\left(\frac{4π}{3}\right) = συν\left(π + \frac{π}{3}\right) = -συν\frac{π}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$εφ\left(\frac{4π}{3}\right) = εφ\left(π + \frac{π}{3}\right) = εφ\frac{π}{3} = \sqrt{3}$$

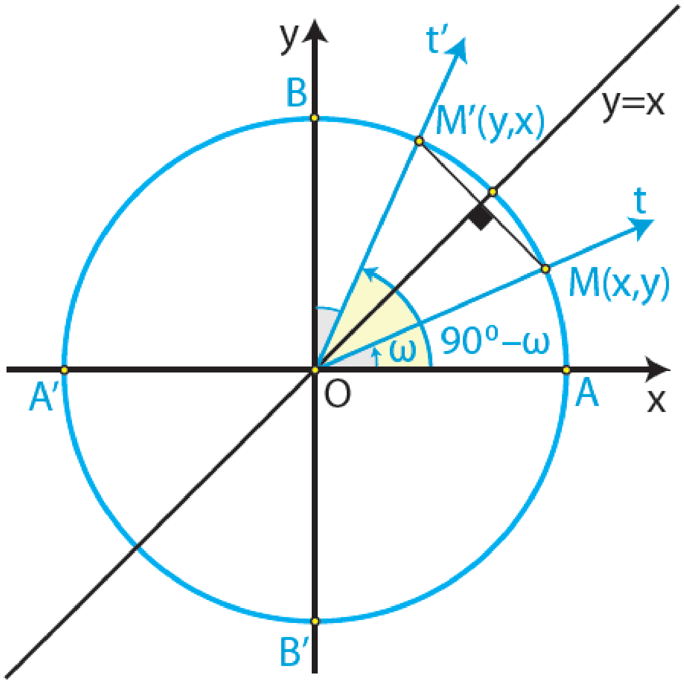
$$σφ\left(\frac{4π}{3}\right) = σφ\left(π + \frac{π}{3}\right) = σφ\frac{π}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Γωνίες με άθροισμα 90°

Αν οι γωνίες ω και ω' έχουν άθροισμα 90°, δηλαδή $ω' = 90^\circ - ω$, τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα,

τα σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.

Επομένως η τετμημένη του καθενός ισούται με την τεταγμένη του άλλου.



Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:

$$\eta\mu(90^\circ-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(90^\circ-\omega)=\eta\mu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(90^\circ-\omega)=\sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(90^\circ-\omega)=\varepsilon\varphi\omega$$

Δηλαδή,

Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90°, τότε το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

Για παράδειγμα, επειδή $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, έχουμε:

$$\eta\mu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\varepsilon\varphi 60^\circ = \sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3} \qquad \text{και } \sigma\varphi 60^\circ = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από τα προηγούμενα καταλαβαίνουμε ότι δεν χρειάζεται να έχουμε πίνακες τριγωνομετρικών αριθμών όλων των γωνιών, αλλά μόνο των γωνιών από 0° μέχρι 90°.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 54°.

ΛΥΣΗ

Επειδή $54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$, έχουμε

$$\eta\mu 54^\circ = \sigma\upsilon\nu 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ ισχύει $\eta\mu^2 54^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 54^\circ = 1$, οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu^2 54^0 = 1 - \eta\mu^2 54^0 =$$

$$1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 =$$

$$1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} =$$

$$\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

οπότε

$$\sigma\upsilon\nu 54^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Επομένως είναι:

$$\varepsilon\varphi 54^\circ = \frac{\eta\mu 54^\circ}{\sigma\upsilon\nu 54^\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \quad \text{και}$$

$$\sigma\varphi 54^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu 54^\circ}{\eta\mu 54^\circ} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}.$$

2η Να υπολογιστούν με τη βοήθεια της γωνίας ω οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών:

α) $90^\circ + \omega$,

β) $270^\circ - \omega$ **και**

γ) $270^\circ + \omega$

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $90^\circ + \omega = 90^\circ - (-\omega)$,

έχουμε:

$\eta\mu(90^\circ+\omega)=\eta\mu(90^\circ-(-\omega))=$
$\sigma\upsilon\nu(-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega.$

Ομοίως υπολογίζονται οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $90^\circ+\omega$.

ii) Επειδή $270^\circ-\omega=180^\circ+(90^\circ-\omega)$,έχουμε:
$\eta\mu(270^\circ-\omega)=\eta\mu(180^\circ+(90^\circ-\omega))=$
$-\eta\mu(90^\circ-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$

Ομοίως υπολογίζονται οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $270^\circ-\omega$.

iii) Επειδή, έχουμε:
$$\begin{aligned}&270^\circ+\omega=360^\circ-90^\circ+\omega=\\&360^\circ+(\omega-90^\circ)\end{aligned},$$

έχουμε:

$\varepsilon\varphi(270^\circ+\omega)=\varepsilon\varphi(\omega-90^\circ)=$
$-\varepsilon\varphi(90^\circ-\omega)=-\sigma\varphi\omega$

Ομοίως υπολογίζονται οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $270^\circ+\omega$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας:

i) 1200° ii) -2850°.

2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας

i) $\frac{187\pi}{6}$ rad ii) $\frac{21\pi}{4}$ rad.

3. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu A = \eta\mu(B+\Gamma)$ ii) $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B+\Gamma) = 0$

iii) $\eta\mu\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}$ iv) $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}$.

4. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(180^\circ+\alpha)}{\eta\mu(-\alpha)\cdot\eta\mu(90^\circ+\alpha)}.$$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu(13\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)} = -1.$$

6. Να δείξετε ότι έχει σταθερή τιμή η παράσταση:

$$\eta\mu^2(\pi-x)+\sigma\upsilon\nu(\pi-x)\sigma\upsilon\nu(2\pi-x)$$
$$+2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{\eta\mu 495^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\upsilon\nu 495^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu(-120^\circ)}{\varepsilon\varphi(-120^\circ) + \varepsilon\varphi 495^\circ}.$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(5\pi+\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu(7\pi-\omega)\cdot\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right)}{\sigma\varphi(5\pi+\omega)\cdot\eta\mu(7\pi-\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right)} = \eta\mu^2\omega - 1.$$

3. Αν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=5$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right).$$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$0 < \frac{\varepsilon\varphi(\pi+x)}{\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi(\pi+x)} < 1.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Αν ημω =1, τότε υποχρεωτικά θα είναι συνω= 0 .	Α Ψ
2. Αν συνω= 0, τότε υποχρεωτικά θα είναι ημω= 1.	Α Ψ
3. Υπάρχει γωνία ω με ημω+ συνω =2 .	Α Ψ
4. Για κάθε γωνία ω ισχύει $ημω = \sqrt{1-συν^2ω}$	Α Ψ
5. $ημ^2 20^\circ + ημ^2 70^\circ = 1$	Α Ψ
6. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $ημ(x-π) = -ημx$	Α Ψ
7. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $ημ^2 x = ημx^2$	Α Ψ
8. Αν $συν(x-\frac{π}{2}) + ημx = 0$, τότε $ημx = 0$	Α Ψ
9. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $συν(x-\frac{π}{6}) - ημ(\frac{π}{3}+x) = 0$	Α Ψ

II. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της Α΄ ομάδας με τον ίσο του από τη Β΄ ομάδα.

Α' ΟΜΑΔΑ	
1	$ημ120^\circ$
2	$συν150^\circ$
3	$ημ210^\circ$
4	$συν300^\circ$
5	$εφ210^\circ$
6	$σφ300^\circ$
7	$εφ310^\circ$
8	$σφ210^\circ$

Β' ΟΜΑΔΑ	
Α	$-\sqrt{3}$
Β	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Γ	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
Δ	$-\frac{1}{2}$
Ε	$\frac{1}{2}$
Ζ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
Η	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Θ	$\sqrt{3}$

ΙΙΙ. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ($Α = 90^\circ$) και όχι ισοσκελές, τότε:
Α) $ημ^2Β + ημ^2Γ = 1,$
Β) $ημ^2Β + συν^2Γ = 1,$
Γ) εφΒ=1.

2. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο τότε:
Α) συν(Β + Γ) = συνΑ ,
Β) ημ(Β + Γ) = ημΑ ,
Γ) εφ(Β + Γ) = εφΑ .

3. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο τότε:

Α) $συν(\frac{Β+Γ}{2}) = ημ\frac{Α}{2}$,

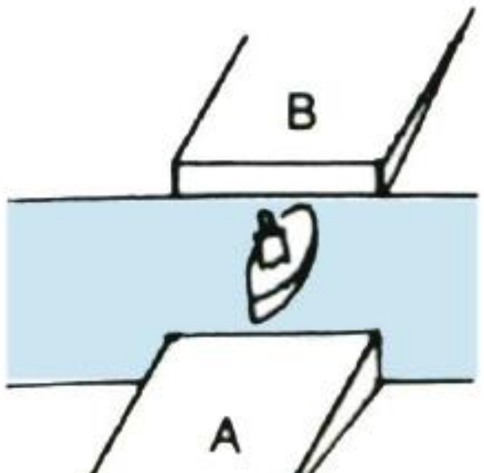
Β) $συν(\frac{Β+Γ}{2}) = συν\frac{Α}{2}$,

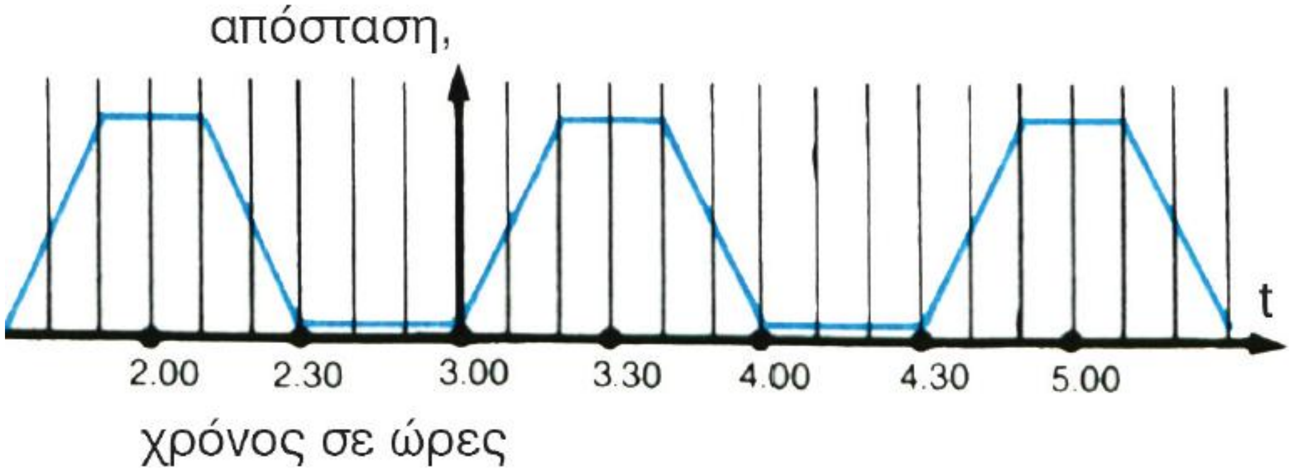
Γ) $εφ(\frac{Β+Γ}{2}) = εφ\frac{Α}{2}$.

3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Περιοδικές συναρτήσεις

— Έστω ότι ένα φέρι-μποτ πηγαινοέρχεται μεταξύ δύο λιμανιών Α και Β και η γραφική παράσταση της απόστασης του από το λιμάνι Α ως συνάρτηση του χρόνου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

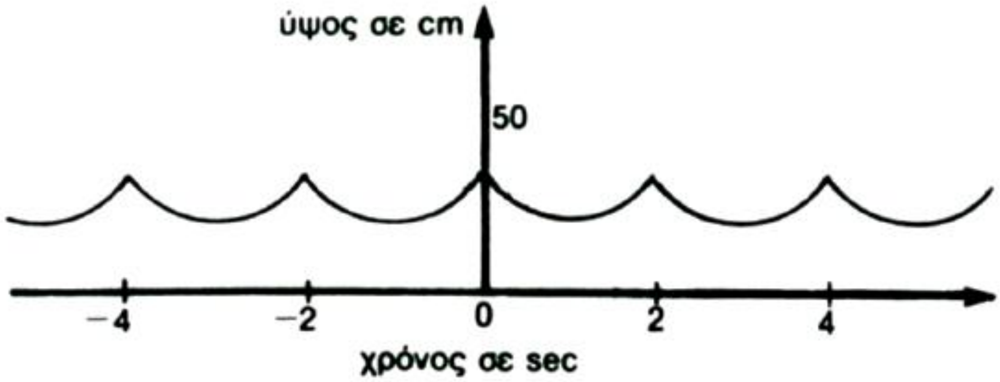


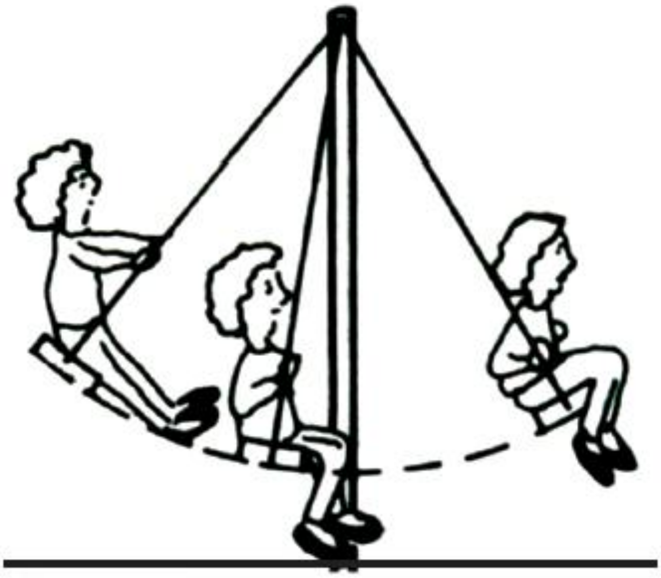


Παρατηρούμε ότι κάθε $1\frac{1}{2}$ ώρα το φέρι-μπότ επαναλαμβάνει την ίδια ακριβώς κίνηση. Αυτό σημαίνει ότι σε όποια απόσταση βρίσκεται από το λιμάνι Α σε κάποια χρονική στιγμή t, στην ίδια απόσταση θα βρίσκεται και τη χρονική στιγμή $t+1\frac{1}{2}$ ώρες και στην ίδια απόσταση βρισκόταν και τη χρονική στιγμή $t-1\frac{1}{2}$ ώρες.

Επομένως η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση του φέρι-μπότ από το λιμάνι Α, με τη βοήθεια του χρόνου t, έχει τις ίδιες τιμές τις χρονικές στιγμές t, $t+1\frac{1}{2}$, $t-1\frac{1}{2}$. Λέμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο $1\frac{1}{2}$ ώρες.

— Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του ύψους μιας κούνιας ως συνάρτηση του χρόνου t.





Παρατηρούμε ότι, όποιο ύψος έχει η κούνια σε κάποια χρονική στιγμή t, το ίδιο ύψος θα έχει και τη χρονική στιγμή t + 2 sec και το ίδιο ύψος είχε και τη χρονική στιγμή t — 2 sec.

Λέμε πάλι ότι η συνάρτηση (που εκφράζει το ύψος της κούνιας με τη βοήθεια του χρόνου t) είναι περιοδική με περίοδο 2 sec.

Γενικότερα:

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός T>0 τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

i) $x+T \in A,\ x-T \in A$

και

ii) $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται περίοδος της συνάρτησης f.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικών αριθμών

Όπως γνωρίζουμε, για κάθε γωνία ω υπάρχει μία μόνο τιμή του ημω, με $-1 \leq ημω \leq 1$. Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση με την οποία κάθε γωνία ω αντιστοιχίζεται στο ημίτονό της. Ομοίως ορίζονται και οι άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις γωνιών.

Πολλές εφαρμογές όμως των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν περιέχουν γωνίες, αλλά πραγματικούς αριθμούς, όπως, π.χ, ο τύπος της αρμονικής ταλάντωσης $f(t)=α\cdot ημωt$, στον οποίο τα α και ω είναι σταθερές και t είναι ένας πραγματικός αριθμός που παριστάνει το χρόνο.

Για το λόγο αυτό ορίζουμε στη συνέχεια τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής.

Συγκεκριμένα:

— Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο ημ (x rad) λέγεται συνάρτηση ημίτονο και συμβολίζεται με ημ.

Ορίζουμε δηλαδή ότι $\eta\mu x = \eta\mu(x \quad \text{rad})$

Επειδή $\eta\mu(\omega + 360°) = \eta\mu(\omega - 360°) = \eta\mu\omega$,
για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **θα ισχύει:**
$\eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu(x - 2\pi) = \eta\mu x$

Άρα η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π.

— Ομοίως ορίζουμε και τη συνάρτηση συνημίτονο που συμβολίζεται με συν.

Ορίζουμε δηλαδή ότι $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(x \quad \text{rad})$.
Και η συνάρτηση συνημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π.

— Η συνάρτηση εφαπτομένη που συμβολίζεται με εφ, ορίζεται ως εξής:

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης εφ είναι το σύνολο:

$$\mathbb{R}^1 = \{x \mid \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}^1$ **ισχύει**
$\varepsilon\varphi(x + \pi) = \varepsilon\varphi(x - \pi) = \varepsilon\varphi x$,
η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π.

— Η συνάρτηση συνεφαπτομένη, που συμβολίζεται με σφ, ορίζεται ως εξής:

$$σφx = \frac{συνx}{ημx}$$

Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης σφ είναι το σύνολο:

$$\mathbb{R}^2 = \{x \mid ημx \neq 0\}$$

Και η συνάρτηση συνεφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π.

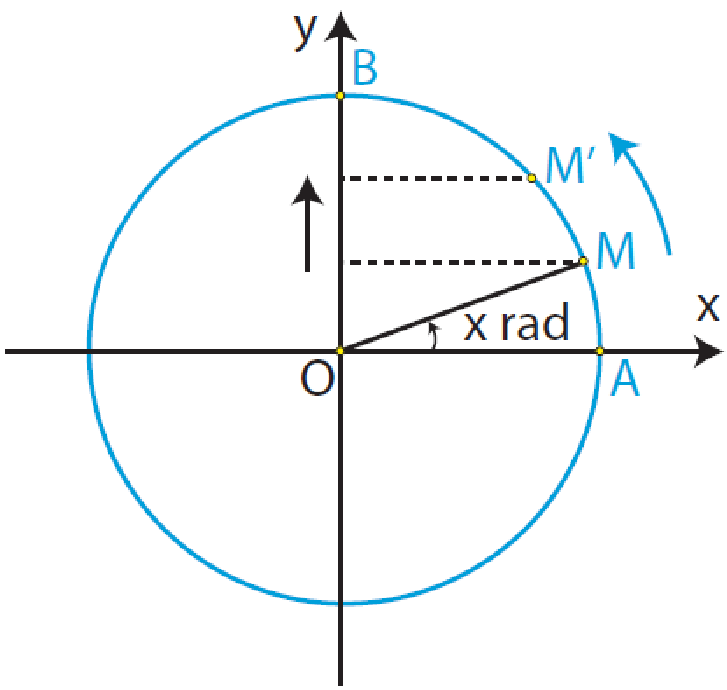
Μελέτη της συνάρτησης f(x) = ημx

Επειδή η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π, π.χ το [0,2π]. Έχουμε αναφέρει όμως ότι το ημx είναι η τεταγμένη του σημείου M στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας xrad τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο. Επομένως αρκεί να εξετάσουμε πώς μεταβάλλεται η τεταγμένη του M, όταν αυτό περιφέρεται στον τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη θετική φορά, ξεκινώντας από το A.

Παρατηρούμε ότι:

- Όταν το x μεταβάλλεται από το 0 μέχρι το $\frac{π}{2}$,

το M κινείται από το A μέχρι το B.
Άρα η τεταγμένη του αυξάνει, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) = ημx είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{π}{2}\right]$.
Ομοίως βρίσκουμε ότι η συνάρτηση f(x) = ημx είναι:



— γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

— γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ και

— γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

• Η συνάρτηση παρουσιάζει

— μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$, το ημ$\frac{\pi}{2} = 1$ και

— ελάχιστο για $x = \frac{3\pi}{2}$, το ημ$\frac{3\pi}{2} = -1$.

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται ως εξής:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
ημx	0	↗	1 μεγ.	↘	0	↘	-1 ελαχ.	↗	0

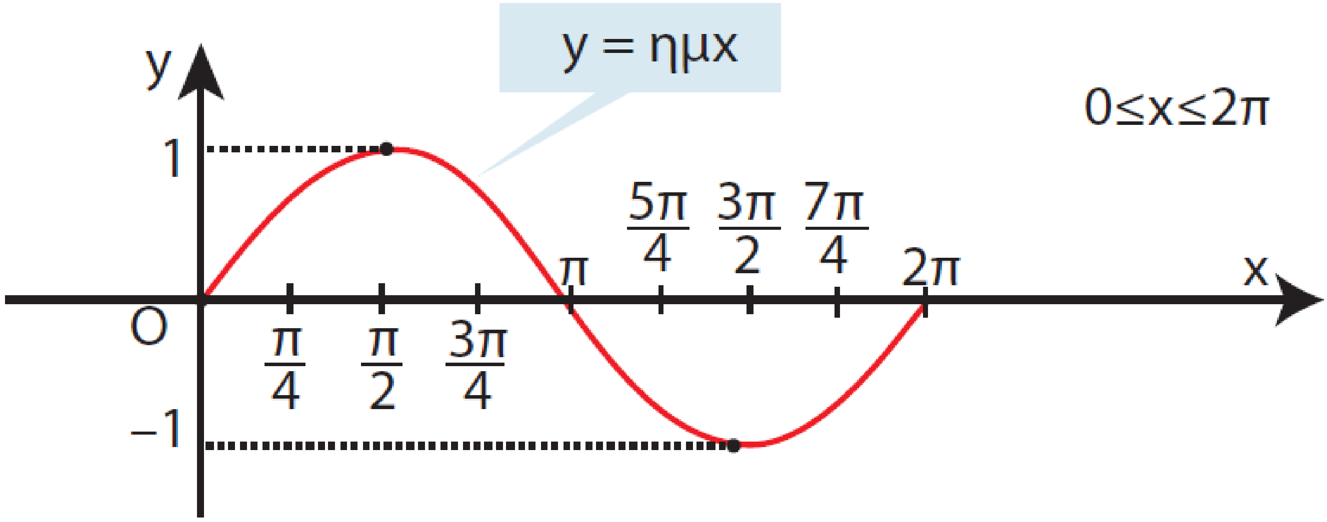
Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης χρειαζόμαστε έναν πίνακα τιμών της.

Κατά τα γνωστά έχουμε:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ημx	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}71$	1	0,71	0	–0,71	–1	–0,71	0

Παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη αυτά των αντίστοιχων τιμών και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή.

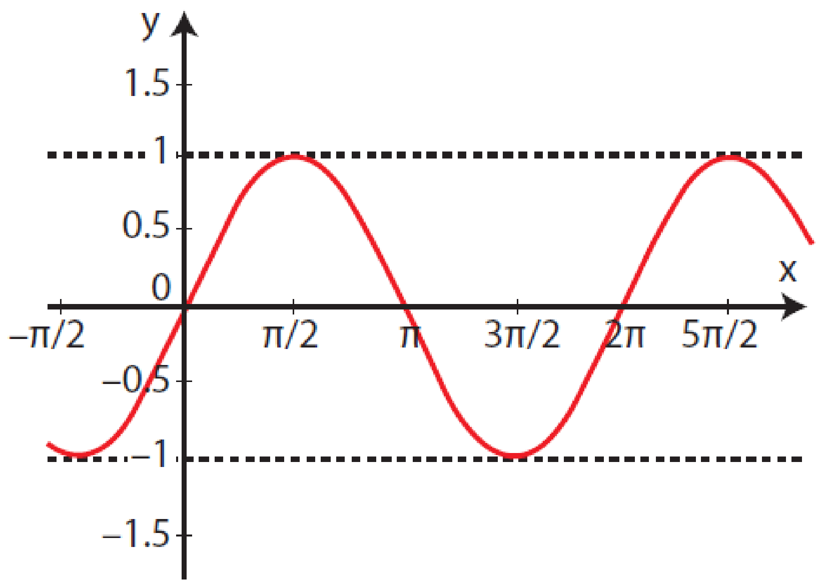
Έτσι προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο στο διάστημα [0, 2π]:



Επειδή η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιοδική, με περίοδο 2π, η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή στα διαστήματα [2π, 4π], [4π, 6π] κτλ. καθώς

και στα διαστήματα [–2π,0],[–4π,–2π] κτλ.

Έτσι έχουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο, η οποία λέγεται ημιτονοειδής καμπύλη.



Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν αντίθετα ημίτονα. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $ημ(-x) = -ημx$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιττή και επομένως η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή 0(0,0) των αξόνων.

Μελέτη της συνάρτησης f(x) = συνx

Επειδή η συνάρτηση f(x) = συνx είναι περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π, π.χ. το [0, 2π].

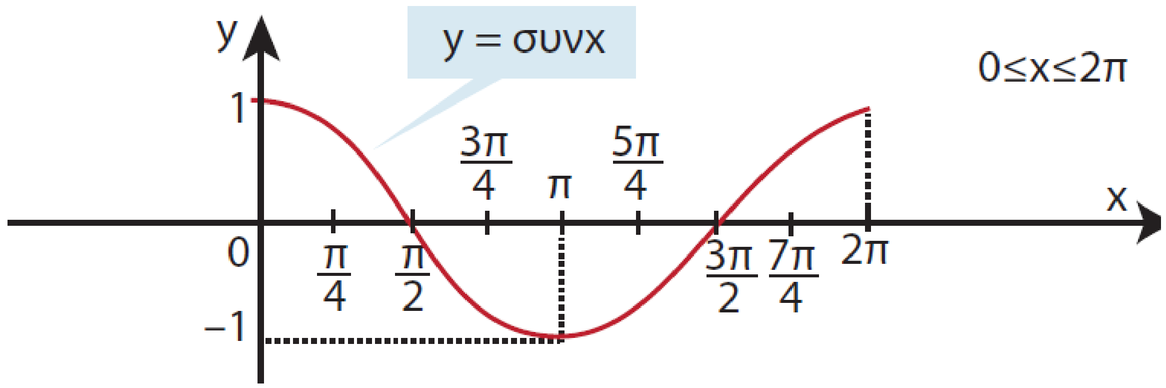
Από τη μελέτη αυτή προκύπτουν τα συμπεράσματα του επόμενου πίνακα:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
συνx	1 μεγ.	$\searrow$	0	$\searrow$	−1 ελαχ.	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1 μεγ.

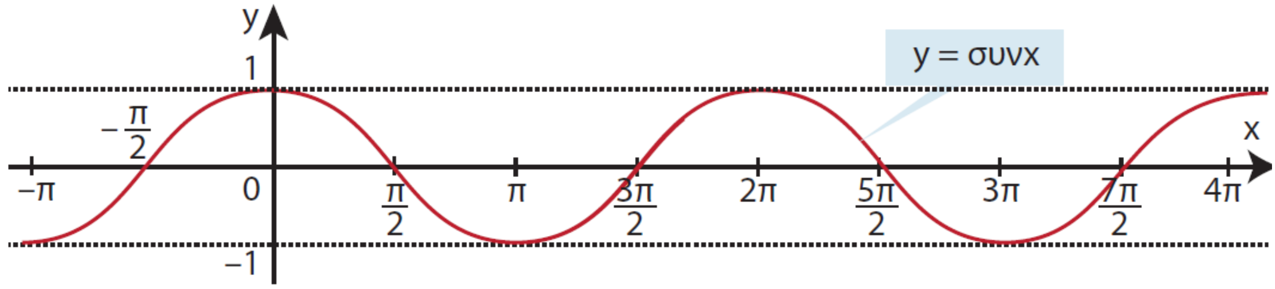
Συντάσσουμε τώρα κατά τα γνωστά και τον ακόλουθο πίνακα τιμών της συνάρτησης συνημίτονο:

x	0		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
συνx	1	$\frac{2}{2}$	0,71	0	–0,71	–1	–0,71	0	0,71	1

Έτσι μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της y = συνx για $0 \leq x \leq 2\pi$.



Επειδή η συνάρτηση f(x) = συνx είναι περιοδική με περίοδο 2π, η γραφική της παράσταση στο $\mathbb{R}$ είναι η ακόλουθη:



Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $συν(-x) = συνx$.

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) = συνx είναι άρτια και επομένως η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y.

Μελέτη της συνάρτησης f(x) = εφx

Επειδή η συνάρτηση f(x) = εφx είναι περιοδική με περίοδο π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους π, π.χ. το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

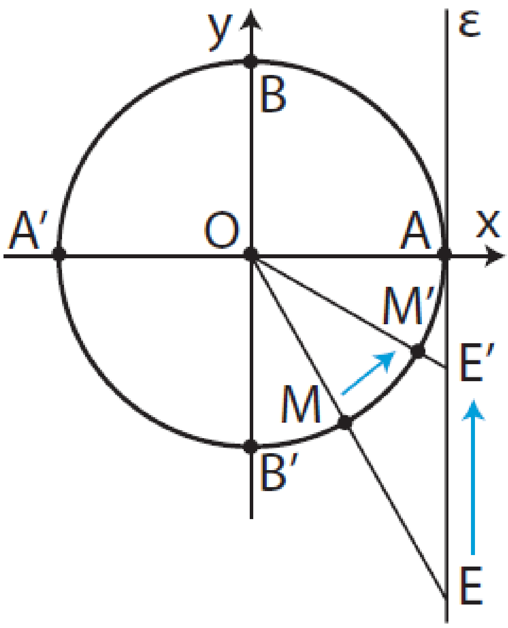
(Το διάστημα είναι ανοικτό, αφού η συνάρτηση εφ δεν ορίζεται στα $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$).

Ας υποθέσουμε ότι η τελική πλευρά της γωνίας x rad τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο Μ και την ευθεία των εφαπτομένων στο σημείο Ε.

Όπως έχουμε αναφέρει η εφx ισούται με την τεταγμένη του σημείου Ε.

Επομένως:

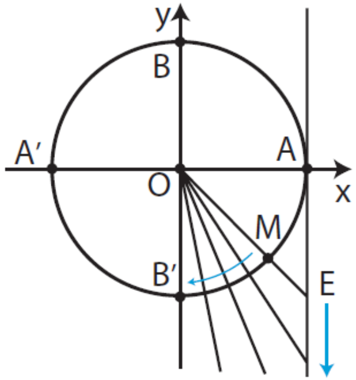
• Όταν ο x παίρνει τιμές από $-\frac{\pi}{2}$ προς το $\frac{\pi}{2}$ το Μ κινείται στον τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη θετική φορά από το Β ' προς το Β, οπότε η τεταγμένη του σημείου Ε αυξάνει. Αυτό σημαίνει ότι η f(x) = εφx είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

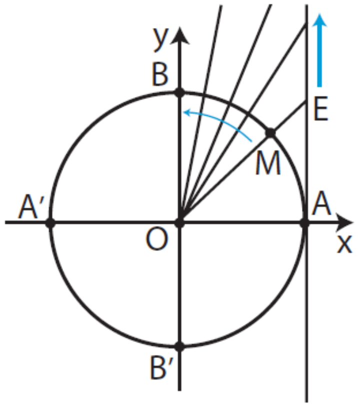


• Όταν ο x «τείνει» στο $-\frac{\pi}{2}$ από μεγαλύτερες τιμές η εφx «τείνει» στο $-\infty$.

Γι' αυτό λέμε ότι η ευθεία $x = -\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Επίσης όταν ο x «τείνει» στο $\frac{\pi}{2}$ από μικρότερες τιμές η εφx τείνει στο $+\infty$. Γ ι ' αυτό λέμε ότι και η ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

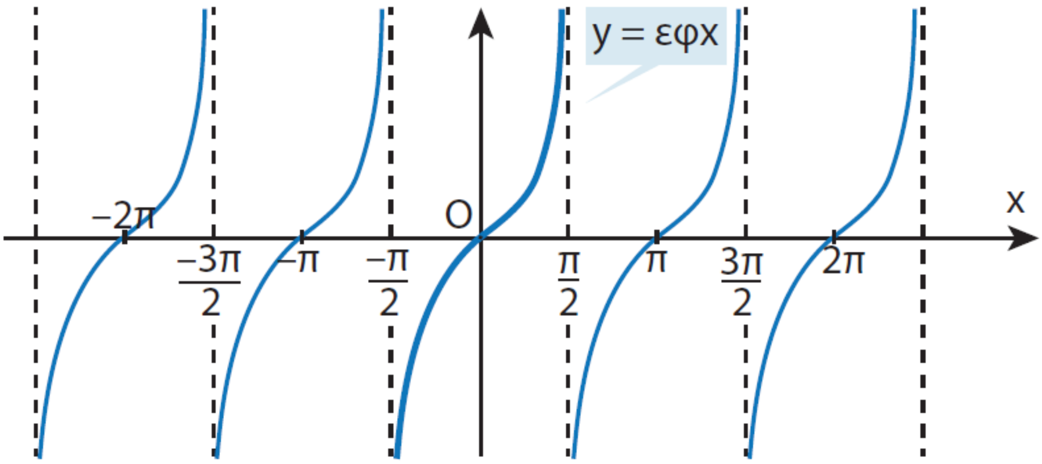




Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της f(x)=εφx συντάσσουμε, με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών πινάκων ή με επιστημονικό κομπιουτεράκι, έναν πίνακα τιμών της:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
εφx	**Δεν ορίζεται**	$-\sqrt{3} \simeq$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq -0{,}6$	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}6$	**1**	$\sqrt{3} \simeq 1{,}7$	**Δεν ορίζεται**

Στη συνέχεια παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη αυτά των αντίστοιχων τιμών και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή. Η γραφική παράσταση της f(x)=εφx φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Είναι φανερό ότι η γραφική παράσταση της f(x)=εφx έχει κέντρο συμμετρίας το O, αφού(§ 5.3: $εφ(-x) = -εφx$ είναι περιττή συνάρτηση.

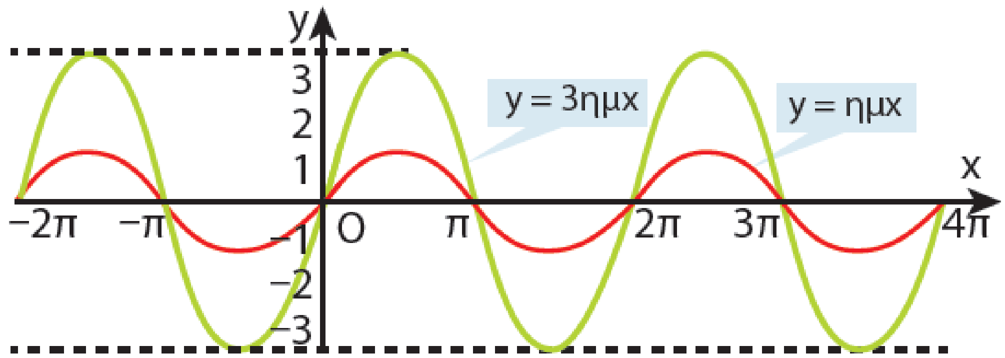
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f(x)=3ημx

ΛΥΣΗ

Οι τιμές της συνάρτησης f(x)=3ημx είναι προφανώς τριπλάσιες από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης φ(x)=ημx. Εξάλλου και η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π, αφού ισχύει:
$f(x+2\pi) = 3\cdot ημ(x+2\pi) = 3\cdot ημx = f(x)$, **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$ **και**
$f(x-2\pi) = 3\cdot ημ(x-2\pi) = 3\cdot ημx = f(x)$, **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$.
Έχοντας υπόψιν τα στοιχεία αυτά και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f(x)=3ημx.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	1	0	–1	0
3ημx	0	3	0	–3	0



2. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f(x)=ημ2x

ΛΥΣΗ

Κάθε τιμή της συνάρτησης f(x)=ημ2x επαναλαμβάνεται, όταν το 2x αυξηθεί κατά 2π, που σημαίνει ότι η τιμή αυτή επαναλαμβάνεται, όταν το x αυξηθεί κατά π.

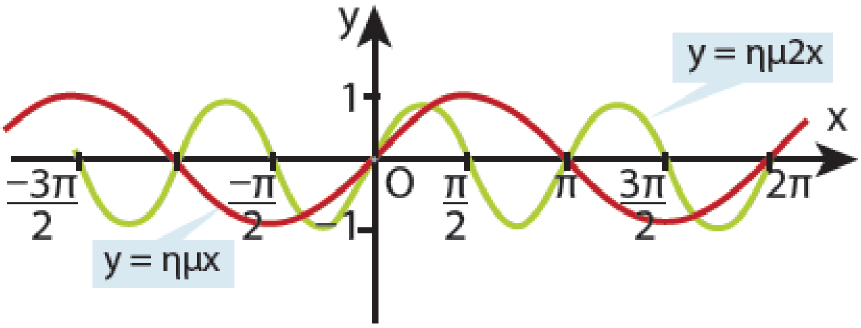
Επομένως, η συνάρτηση f(x)=ημ2x είναι περιοδική με περίοδο π. Πράγματι:

$$\begin{aligned}&f(x+\pi)=\eta\mu 2(x+\pi)=\\&\eta\mu(2x+2\pi)=\eta\mu 2x=f(x),\end{aligned}\quad \text{για κάθε}\, x\in\mathbb{R}.$$

$$\text{και}\quad \begin{aligned}&f(x-\pi)=\eta\mu 2(x-\pi)=\\&\eta\mu(2x-2\pi)=\eta\mu 2x=f(x),\end{aligned}\quad \text{για κάθε}\, x\in\mathbb{R}.$$

Έχοντας υπόψη το στοιχείο αυτό και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f(x)=ημ2x.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	2π
ημ2x	0	1	0	–1	0



3. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f(x)=3ημ2x

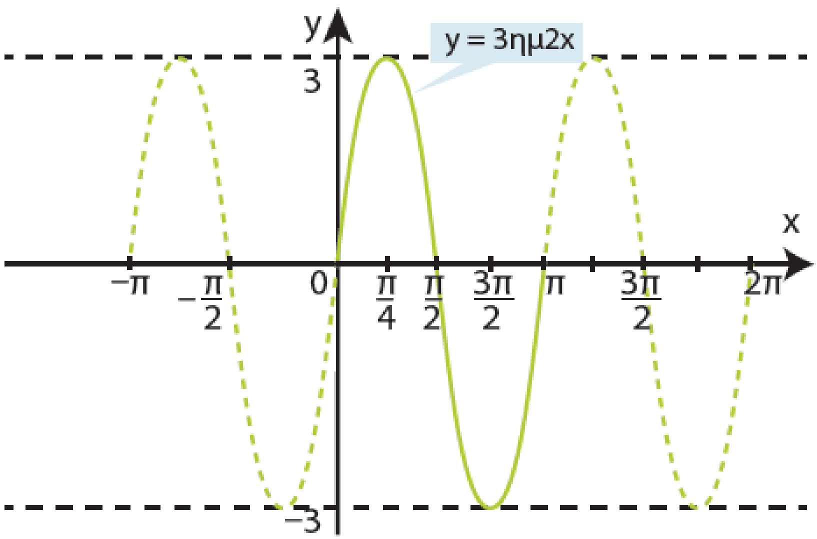
ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τα προηγούμενα παραδείγματα η συνάρτηση αυτή έχει μέγιστο 3, ελάχιστο -3 και είναι περιοδική με περίοδο π.

Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης f(x)=3ημ2x είναι ο εξής:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
3ημ2x	0	3	0	–3	0

Με τη βοήθεια του πίνακα αυτού σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.



Σχόλιο

Από τα προηγούμενα παραδείγματα γίνεται φανερό ότι, σε μια συνάρτηση της μορφής f(x)=ρ ημωx, όπου ρ,ω>0:
(i) Το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή
της που είναι ίση με $-$ρ.
(ii) Το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης που είναι ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$.

Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για μια συνάρτηση της μορφής f(x)=ρ συνωx, όπου ρ,ω>0

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, κάθε φορά στο ίδιο σύστημα αξόνων

i) $f(x)=2\eta\mu x$,
$g(x)=0{,}5\cdot\eta\mu x$,
$h(x)=-2\cdot\eta\mu x, \quad 0\le x\le 2\pi$

ii) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x$,
$g(x)=0{,}5\cdot\sigma\upsilon\nu x$,
$h(x)=-2\cdot\sigma\upsilon\nu x, \quad 0\le x\le 2\pi$

2. Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$ και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=1+\eta\mu x \quad \text{και} \quad h(x)=-1+\eta\mu x$$

3. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=\eta\mu x \quad \text{και} \quad g(x)=\eta\mu 3x,$$
$$0\le x\le 2\pi$$

4. Ομοίως των συναρτήσεων

$$f(x)=\sigma\upsilon\nu x \quad \text{και} \quad g(x)=\sigma\upsilon\nu 3x,$$
$$0\le x\le 2\pi$$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu\frac{x}{2}$. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της εν λόγω συνάρτησης; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

6. Ομοίως για τη συνάρτηση

$$f(x)=2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$$

7. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

i) $f(x)=\varepsilon\varphi x$

ii) $g(x)=1+\varepsilon\varphi x$ **και**

iii) $h(x)=-1+\varepsilon\varphi x$

στο ίδιο σύστημα αξόνων.

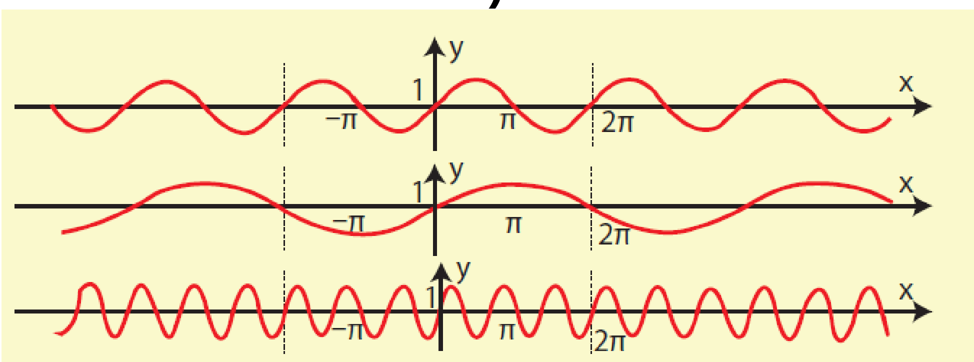
8. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi 2x$.

9. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$.

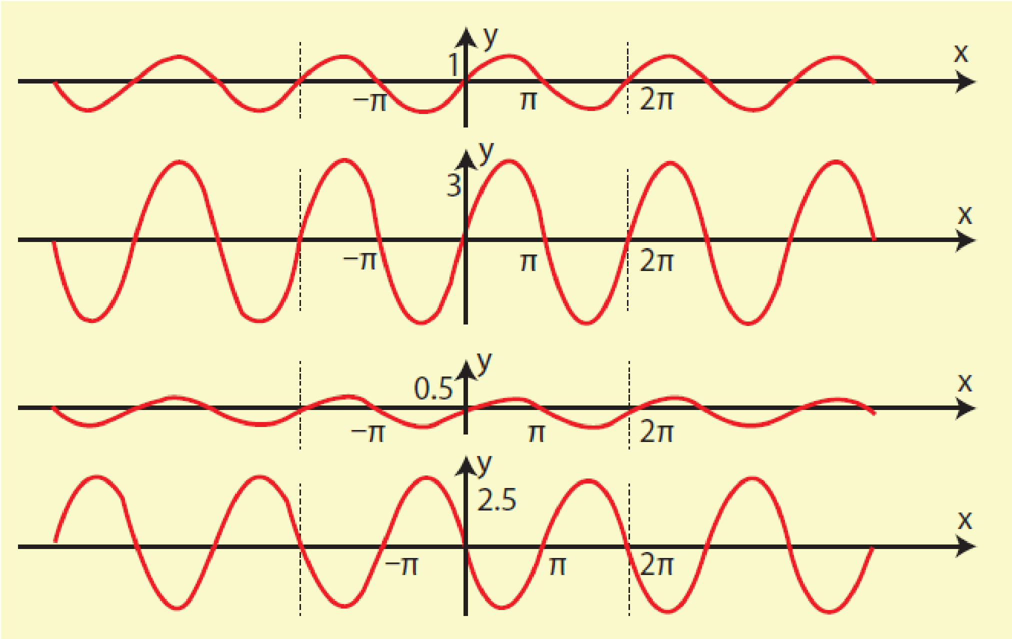
Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των ημιτονοειδών καμπύλων:

i)



ii)

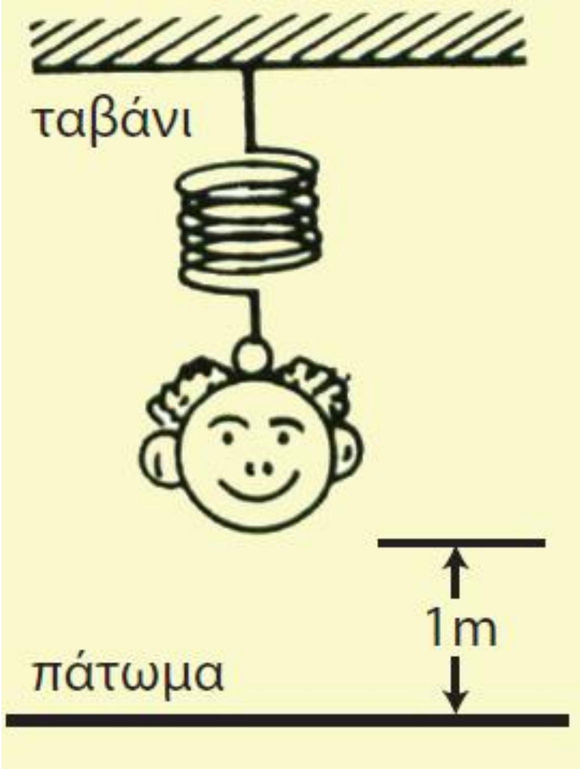


2. Η παλίρροια σε μια θαλάσσια περιοχή περιγράφεται κατά προσέγγιση με τη συνάρτηση $y = 3 \cdot ημ\left(\frac{π}{6} \cdot t\right)$, όπου y το ύψος της στάθμης των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες.

i) Να βρείτε την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη.

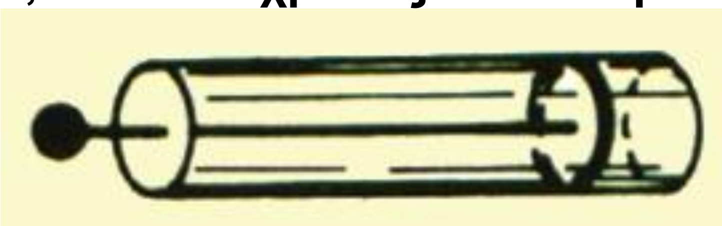
ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \le t \le 12$.

3. Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι και απέχει από το πάτωμα 1m. Όταν το παιγνίδι ανεβοκατεβαίνει, το ύψος του από το πάτωμα σε μέτρα είναι $h = 1 + \frac{1}{3}συν3t$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.



i) Να υπολογίσετε τη διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο και στο ελάχιστο ύψος.
ii) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης
iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 2\pi$

4. Η απόσταση x του πιστονιού σε μέτρα από το ένα άκρο του κυλίνδρου περιγράφεται με τη συνάρτηση x(t) =0,1+0,1·ημ3t, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.



i) Να υπολογίσετε το πλάτος της κίνησης του πιστονιού.

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 2\pi$

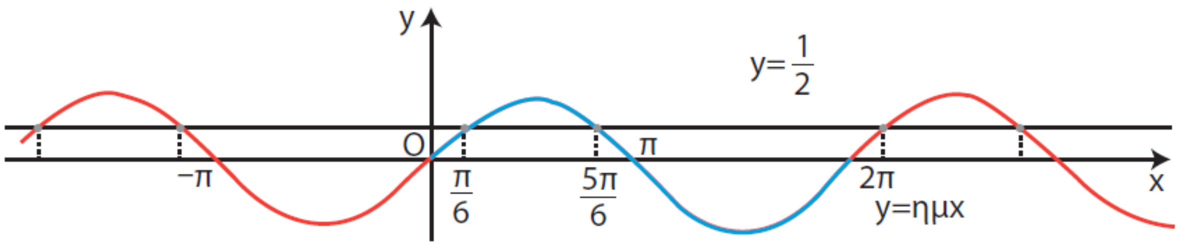
Ποιες στιγμές του χρονικού αυτού διαστήματος η απόσταση είναι 0,15m;

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η Εξίσωση ημχ=α

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$.

Είναι φανερό ότι ζητάμε να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης y = ημx και της ευθείας $y = \frac{1}{2}$.

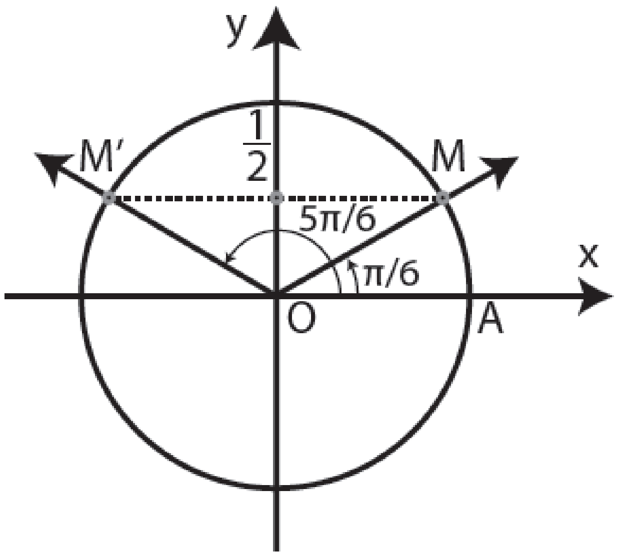


Ζητάμε δηλαδή εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$. Επειδή η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π, για να βρούμε τα ζητούμενα x, που είναι άπειρα σε πλήθος (βλ. σχήμα), αρκεί να βρούμε όσα από αυτά υπάρχουν σε ένα διάστημα πλάτους 2π και σε κάθε ένα να προσθέσουμε το κ · 2π, όπου κ ακέραιος.

Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $ημx=\frac{1}{2}$ στο διάστημα [0, 2π], είναι οι $\frac{π}{6}$ και $π-\frac{π}{6}=\frac{5π}{6}$, γιατί $ημ\frac{π}{6}=ημ\frac{5π}{6}=\frac{1}{2}$.

Επομένως το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $ημx=\frac{1}{2}$ δίνεται από τους τύπους

$$\begin{cases} x=2κπ+\frac{π}{6} \\ \quad ή \qquad\qquad , \quad κ\in\mathbb{Z} \\ x=2κπ+\frac{5π}{6} \end{cases}$$



Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης ημx = α, αν δηλαδή ισχύει ημθ = α, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{array}{l} x=2κπ+θ \\ ή, \quad κ\in\mathbb{Z} \\ x=2κπ+(π-θ) \end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση $ημx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $ημ\frac{π}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ισχύει $ημ(-\frac{π}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Επομένως η εξίσωση γράφεται $ημx = ημ(-\frac{π}{3})$, οπότε οι λύσεις της δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2κπ - \frac{π}{3} \\ \quad\quad ή \quad\quad\quad\quad , \quad κ \in \mathbb{Z} \\ x = 2κπ + π + \frac{π}{3} \end{cases}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $ημ\left(2x + \frac{π}{4}\right) = \frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $ημ\frac{π}{6} = \frac{1}{2}$, έχουμε $ημ\left(2x + \frac{π}{4}\right) = ημ\frac{π}{6}$ οπότε

$$\begin{cases} 2x + \frac{π}{4} = 2κπ + \frac{π}{6} \\ \quad\quad ή \quad\quad\quad\quad\quad\quad , \quad κ \in \mathbb{Z} \\ 2x + \frac{π}{4} = 2κπ + π - \frac{π}{6} \end{cases}$$

Ισχύει όμως

$$2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2x=$$

$$2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{24}$$

και

$$2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{7\pi}{24}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} x=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{24} \\ \qquad\text{ή} \qquad\qquad , \quad \kappa\in\mathbb{Z} \\ x=\kappa\pi+\dfrac{7\pi}{24} \end{cases}$$

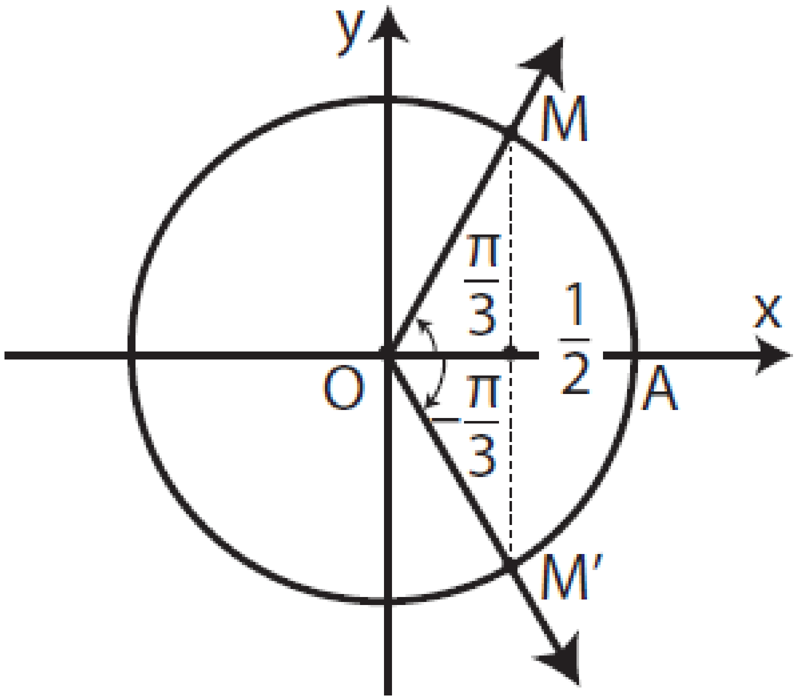
Η εξίσωση συνx = α

Με ανάλογες σκέψεις όπως προηγουμένως, εργαζόμαστε για να λύσουμε π.χ. την εξίσωση $συνx=\frac{1}{2}$.

Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $συνx=\frac{1}{2}$ στο διάστημα

$[-\pi,\pi]$ **είναι οι** $\frac{\pi}{3}$ **και** $-\frac{\pi}{3}$**, γιατί**

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$



Επομένως το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}$ **δίνεται από τους τύπους**

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{3} \\ \qquad ή \qquad\quad ,\ \ \kappa\in\mathbb{Z} \\ x=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωση συνx = α, αν δηλαδή ισχύει συνθ = α, τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους

$$\begin{matrix} x = 2κπ - θ \\ ή \quad , \quad κ \in \mathbb{Z} \\ x = 2κπ - θ \end{matrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση $συνx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $συν\frac{π}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$**, έχουμε** $συνx = συν\frac{π}{4}$**, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους:**

$$\begin{cases} x = 2κπ + \frac{π}{4} \\ \quad ή \quad , \quad κ \in \mathbb{Z} \\ x = 2κπ - \frac{π}{4} \end{cases}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $συν2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $συν\frac{π}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ισχύει

$συν\left(π-\frac{π}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ δηλαδή

$συν\frac{5π}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Έχουμε επομένως

$συν2x=συν\frac{5π}{6}$, οπότε

$$\begin{cases} 2x=2κπ+\dfrac{5π}{6} \\ \quad ή \\ 2x=2κπ-\dfrac{5π}{6} \end{cases}, \ κ\in\mathbb{Z} \ \text{ ή ισοδύναμα}$$

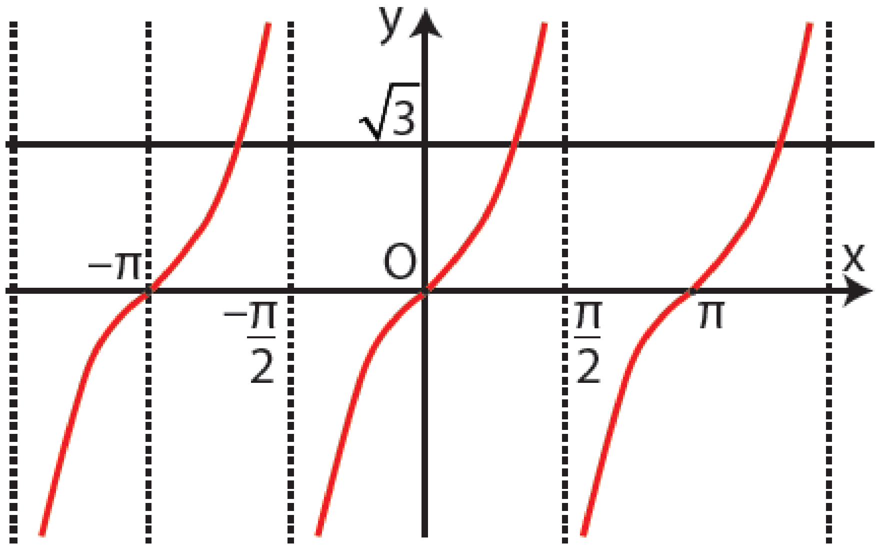
$$\begin{cases} x=κπ+\dfrac{5π}{12} \\ \quad ή \\ x=κπ-\dfrac{5π}{12} \end{cases}, \ κ\in\mathbb{Z}$$

Η εξίσωση εφx = α

Έστω η εξίσωση $εφx=\sqrt{3}$. Όπως γνωρίζουμε η συνάρτηση εφ είναι περιοδική με περίοδο π.

Επομένως, για να λύσουμε την εξίσωση, αρκεί να βρούμε τις λύσεις της σε ένα διάστημα πλάτους π, π.χ. το $\left(-\frac{π}{2},\frac{π}{2}\right)$ και να προσθέσουμε σε αυτές το κπ, $κ\in\mathbb{Z}$.

Όπως φαίνεται όμως και στο σχήμα, μια μόνο λύση της εξίσωσης $εφx=\sqrt{3}$ υπάρχει στο διάστημα αυτό. Η λύση αυτή είναι η $\frac{π}{3}$, γιατί $εφ\frac{π}{3}=\sqrt{3}$.



Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης $εφx=\sqrt{3}$ είναι:

$$x=κπ+\frac{π}{3},\quad κ\in\mathbb{Z}.$$

Γενικότερα, αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης εφx = α, αν δηλαδή ισχύει εφx = εφθ, τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι:

$$x=κπ+θ,\quad κ\in\mathbb{Z}$$

Ο ίδιος τύπος λύσεων ισχύει και για την εξίσωση $σφx=α$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση εφx $= -1$

ΛΥΣΗ

Επειδή εφ$\frac{\pi}{4} = 1$, ισχύει εφ$\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Έχουμε επομένως εφx $=$ εφ$\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, οπότε

$$x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4},\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση σφx $= \sqrt{3}$

ΛΥΣΗ

Επειδή σφ$\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, έχουμε σφx $=$ σφ$\frac{\pi}{6}$, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) ημx $= 0$

ii) ημx $= \frac{\sqrt{2}}{2}$

iii) συνx $= 0$

iv) συνx $= \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $ημx = -\frac{1}{2}$

ii) $ημx = -1$

iii) $συνx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iv) $συνx = -1$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $εφx = 0$

ii) $εφx = \frac{\sqrt{3}}{3}$

iii) $σφx = 1$

iv) $σφx = \sqrt{3}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ii) $σφx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(1-ημx)(2ημx-\sqrt{3})=0$

ii) $(2ημx+\sqrt{2})(1-συνx)=0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(\sqrt{3}+εφx)(1-εφx)=0$

ii) $(2συνx+1)(εφ^2x-3)σφx=0$

7. Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικούς πίνακες ή επιστημονικό κομπιουτεράκι να λύσετε τις εξισώσεις

i) $ημx = 0,951$

ii) $συνx = -0,809$

iii) $\varepsilon\varphi x = 28,636$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2\eta\mu 3x = \sqrt{3}$

ii) $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{5} + 1 = 0$

iii) $3\varepsilon\varphi\frac{2x}{7} - \sqrt{3} = 0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

ii) $2\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

iii) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{3}$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0$

ii) $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$

iii) $3\varepsilon\varphi^2 t = 3 + 2\sqrt{3}\varepsilon\varphi t$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x = 4$

ii) $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi 2x = 1$

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του x, καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις έχει τη μέγιστη και για ποιες την ελάχιστη τιμή της:

i) $f(x) = 3\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right),\ 0 \le x < 2\pi,$

ii) $g(x)=7\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\ 0\le x<2\pi$

13. Οι μηνιαίες πωλήσεις ενός εποχιακού προϊόντος (σε χιλιάδες κομμάτια) δίνονται κατά προσέγγιση από τον τύπο $S=75+50\cdot\eta\mu\frac{\pi t}{6}$, όπου t ο χρόνος σε μήνες και με t = 1 να αντιστοιχεί στον Ιανουάριο.

i) Να βρείτε ποιους μήνες οι πωλήσεις φτάνουν τις 100000 κομμάτια,
ii) Να βρείτε ποιο μήνα έχουμε το μεγαλύτερο αριθμό πωλήσεων και πόσες είναι αυτές.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις
i) $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$
ii) $\varepsilon\varphi 2x-\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}+3x\right)=0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις
i) $\varepsilon\varphi x\cdot\eta\mu x+1=\eta\mu x+\varepsilon\varphi x$
ii) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-2\varepsilon\varphi x=4$

3. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\varepsilon\varphi x=1$ στο διάστημα (3π,4π).

4. Να λύσετε την εξίσωση 1+συνx=ημx στο διάστημα [0,2π).

5. Να λύσετε την εξίσωση: $εφx = σφ\left(\frac{π}{3} + x\right)$ στο διάστημα [0, 2π).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 2ου ΤΟΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{o} - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ