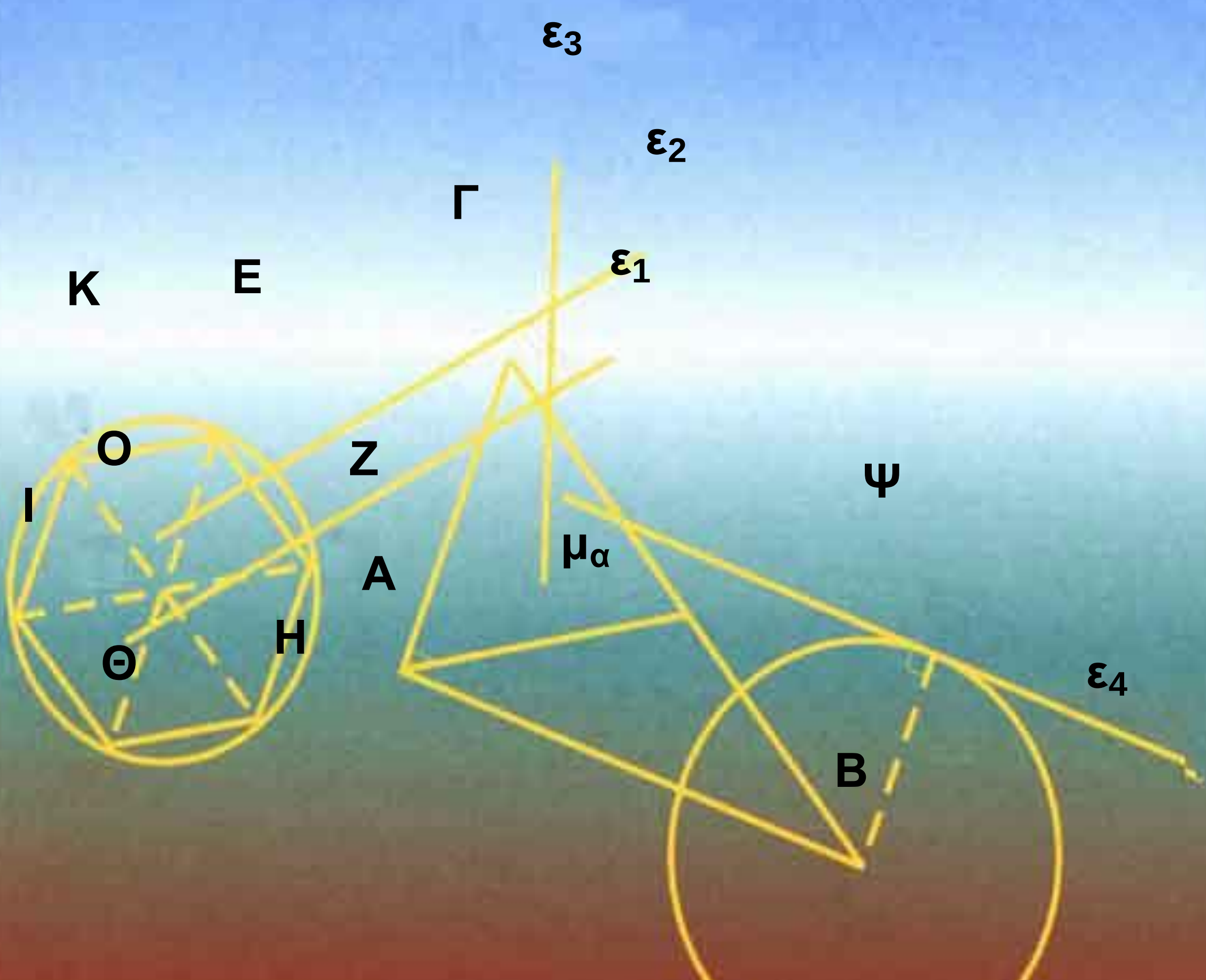
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ,
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ
ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Α΄ και Β΄
Γενικού Λυκείου



Τόμος 4ος

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ,
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΗΛΙΑΣ
ΒΛΑΜΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΤΣΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΜΑΡΚΑΤΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ
ΣΙΔΕΡΗΣ ΠΟΛΥΧΡΟΝΗΣ

ΤΟΜΟΣ 4ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 9 - 10 - 11

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ
Αργυρόπουλος Ηλίας
Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Βλάμος Παναγιώτης
Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Κατσούλης Γεώργιος
Μαθηματικός

Μαρκάτης Στυλιανός
Επίκουρος Καθηγητής, Τομέα Μαθηματικών Ε.Μ. Τηστεχνείου

Σίδερης Πολύχρονης
Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Ιστορικά Σημειώματα: Βανδουλάκης Ιωάννης
Διδάκτωρ Πανεπιστημίου M. Lomonosov Μόσχας Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Φιλολογική Επιμέλεια: Δημητρίου Ελένη

Επιλογή εικόνων: Παπαδοπούλου Μπία

Εικονογράφηση – Σελιδοποίηση: Αλεξοπούλου Καίτη

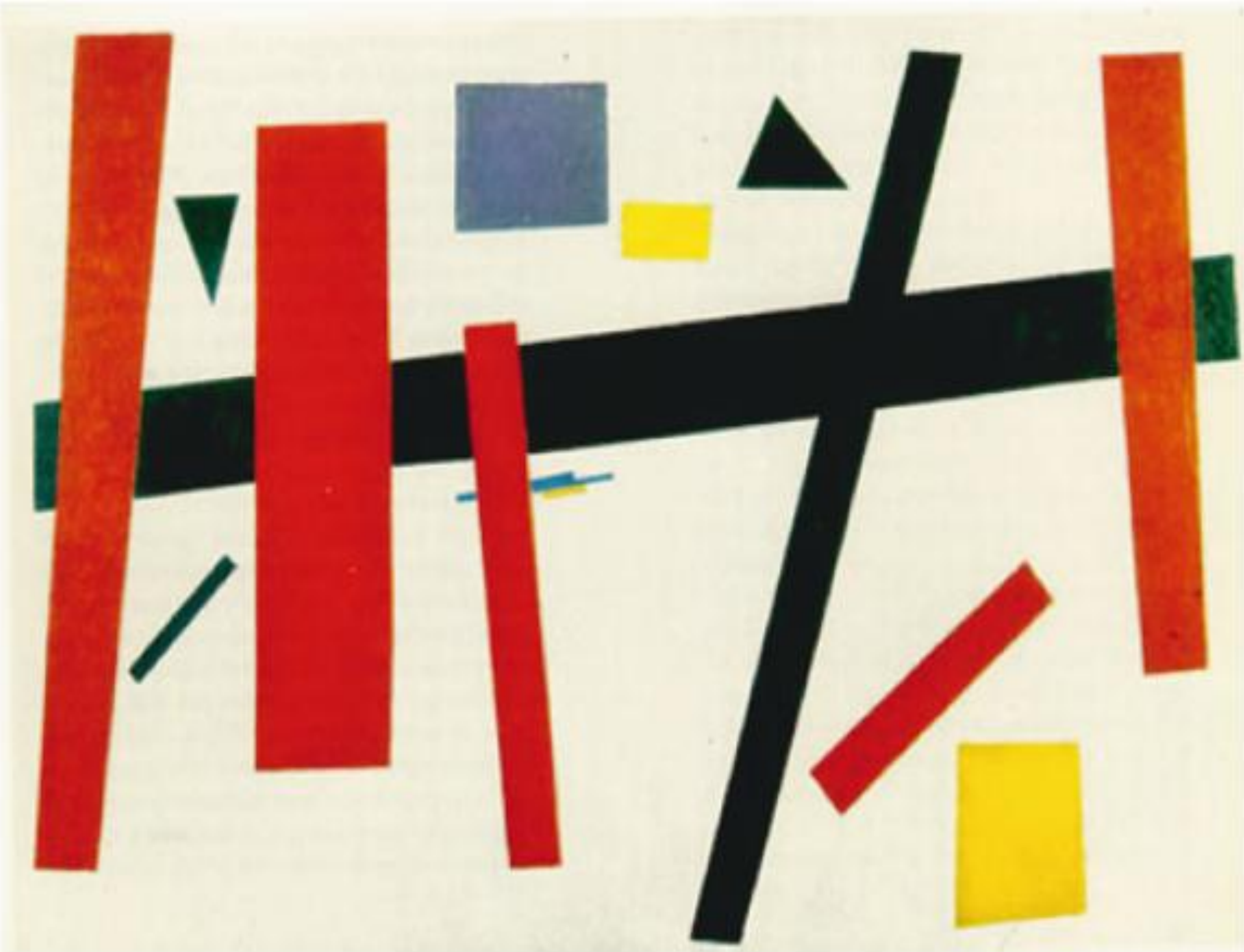
ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ
Ομάδα εργασίας του
Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(Μαγγιώρης Δημήτριος)
Επιμέλεια: (Γελαστοπούλου Μαρία)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Μετρικές Σχέσεις

Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται ουσιαστικά με τον προσδιορισμό των στοιχείων του τριγώνου αν είναι γνωστές οι πλευρές, καθώς και με μετρικές σχέσεις στον κύκλο. Στις μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο παρουσιάζεται το Πυθαγόρειο θεώρημα και η γενίκευσή του με άμεση εφαρμογή στον προσδιορισμό του είδους του τριγώνου ως προς τις γωνίες του - ακόμα και στον προσδιορισμό των γωνιών του, αν χρησιμοποιήσουμε τον ισοδύναμο νόμο των συνημιτόνων - καθώς και των υψών του τριγώνου. Κατόπιν υπολογίζονται οι διάμεσοι με τα δύο θεωρήματα των διαμέσων. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με το θεώρημα τεμνουσών από το οποίο προκύπτουν οι μετρικές σχέσεις σε κύκλο.

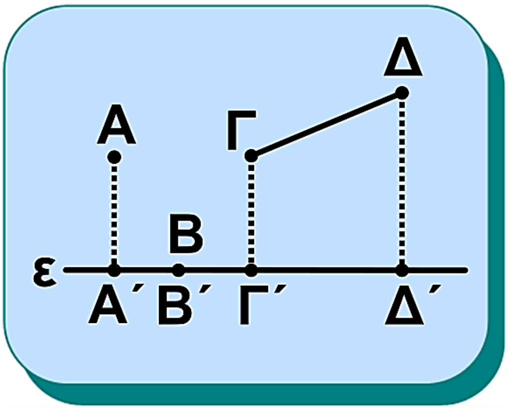


Κάζιμιρ Μαλέβιτς (Ρώσος, 1878 - 1935), «Υπέρτατο», πριν το 1915.

Μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο

9.1 Ορθές προβολές

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία ε και ένα σημείο Α που δεν ανήκει σε αυτή. Το ίχνος Α΄ της καθέτου που φέρουμε από το Α προς την ε το λέμε **ορθή προβολή** ή απλώς **προβολή** του Α στην ευθεία ε. Αν το σημείο είναι σημείο της ευθείας, π.χ. το Β, τότε ως



Σχήμα 1

προβολή του Β΄ πάνω στην ε θεωρούμε το ίδιο το Β. Τέλος ορθή προβολή του τμήματος ΓΔ πάνω στην ευθεία ε λέμε το τμήμα Γ΄Δ΄ που έχει ως άκρα τις ορθές προβολές Γ΄, Δ των άκρων Γ, Δ, αντίστοιχα, του τμήματος ΓΔ πάνω στην ε .

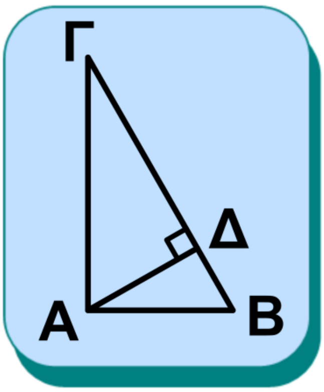
9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Θεώρημα Ι

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Απόδειξη

΄Εστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$ και $ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ$



Σχήμα 2

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{ΑΒ}{ΒΔ} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1 \llcorner$ και η $\hat{B}$ είναι κοινή.

΄Ομοια αποδεικνύεται και η σχέση $ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ$.

Διαιρώντας τις $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$ και $ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ$ κατά μέλη προκύπτει το εξής πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

Θεώρημα ΙΙ (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θέλουμε δηλαδή (σχ.2) να αποδείξουμε ότι:

$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ ή $α^2 = β^2 + γ^2$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$ και $ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ$.

Με πρόσθεση των ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι:

$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ + ΒΓ \cdot ΓΔ =$

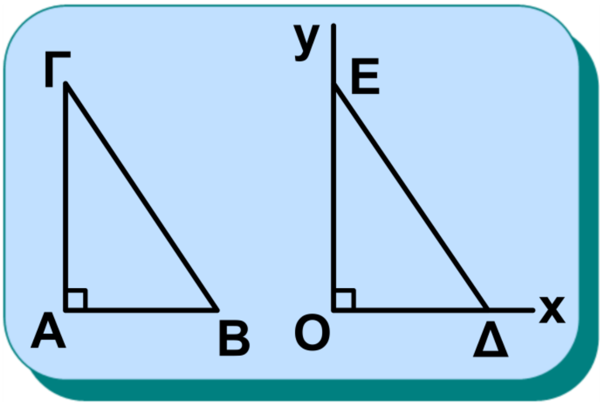
$ΒΓ \cdot (ΒΔ + ΓΔ) = ΒΓ \cdot ΒΓ = ΒΓ^2$.

Θεώρημα ΙΙΙ (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ τότε $\hat{A} = 1 \llcorner$.

Απόδειξη

Πάνω στις πλευρές Οχ, Οψ ορθής γωνίας x y θεωρούμε αντίστοιχα τμήματα ΟΔ=ΑΒ και ΟΕ=ΑΓ. Επειδή το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ορθογώνιο σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα και την υπόθεση, έχουμε



Σχήμα 3

$$ΔΕ^2 = ΟΔ^2 + ΟΕ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$$

Άρα ΔΕ = ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΟΔΕ είναι ίσα, γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες, οπότε θα είναι $\hat{A} = \hat{O} = 1$ ∟, που είναι το ζητούμενο.

Θεώρημα IV

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Απόδειξη

Έστω ΑΔ το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ (σχ.4), που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

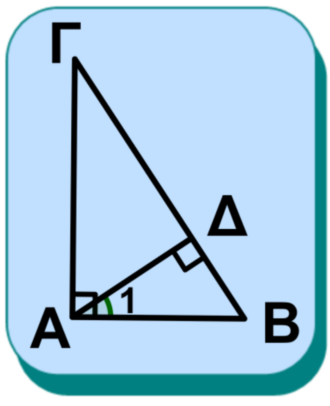
Θα αποδείξουμε ότι: $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΑΔ είναι όμοια, αφού είναι ορθογώνια και

$\hat{A}_1 = \hat{Γ}$ ως συμπληρωματικές της $\hat{B}$.

Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή $\dfrac{ΑΔ}{ΒΔ} = \dfrac{ΔΓ}{ΑΔ}$, οπότε

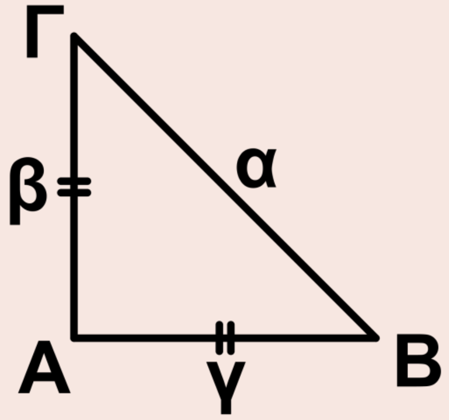
$$\boxed{ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ}$$



Σχήμα 4

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τότε $\alpha^2 = \sqrt{2}\beta$.



Σχήμα 5

Απόδειξη

Πράγματι, με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ΑΒΓ παίρνουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 2\beta^2$ ή $\alpha^2 = \sqrt{2}\beta$.

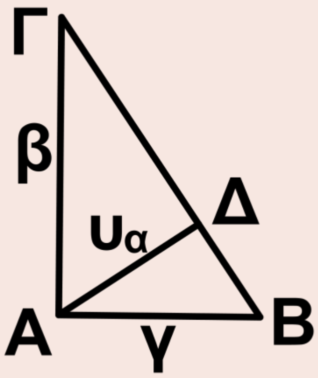
ΣΧΟΛΙΟ

Η εφαρμογή αυτή αποδεικνύει την ύπαρξη τμημάτων με άρρητο λόγο. Είναι αξιοσημείωτο ότι ενώ είναι αδύνατη η μέτρηση με το υποδεκάμετρο τμημάτων άρρητου μήκους, ωστόσο είναι ακριβής ο προσδιορισμός τους με γεωμετρικές κατασκευές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Αν ΑΔ είναι το ύψος ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, τότε ισχύει

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha^2}$$



Σχήμα 6

Απόδειξη

Επειδή $\alpha\upsilon_\alpha = \beta\gamma$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{(\beta\gamma)^2} = \frac{\alpha^2}{(\alpha\upsilon_\alpha)^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha^2}$$

Παρατήρηση: Υπενθυμίζουμε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) ισχύει: $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot B\Gamma \Leftrightarrow \beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \upsilon_\alpha$ (Βλ. Εφαρμογή 4, σελ. 117)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. **Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$=1└) έχει ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8. Ποιο το μήκος της διαμέσου ΑΜ;**

2. **Αν ο λόγος των κάθετων πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 4, τότε ο λόγος των προβολών τους στην υποτείνουσα είναι :**

α. 2 β. 4 γ. 16 δ. $\frac{1}{4}$

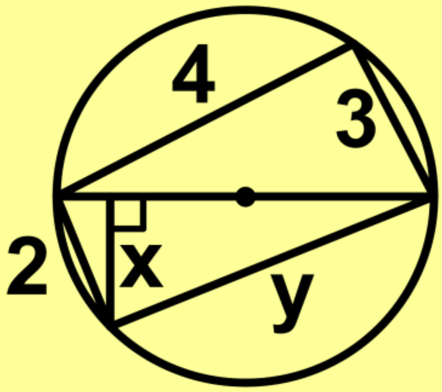
Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. **Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με 9 cm και 12 cm. Η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου που έχει ίση περίμετρο με το ορθογώνιο τρίγωνο είναι:**

α. 10 cm β. 12 cm γ. 13 cm δ. 14 cm.

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

4. **Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τα x και y.**



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. **Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$=1└) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι ΑΒ = 3 και ΑΓ = 4, να υπολογιστούν τα μήκη των τμημάτων ΒΓ, ΒΔ, ΔΓ και ΑΔ.**

2. **Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1└) είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\gamma}$ είναι ίσος με:**

α. $\frac{1}{2}$ β. 1 γ. $\sqrt{3}$ δ. 2 ε. 3

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι ΑΒ = 5 και ΒΔ = $\frac{25}{13}$, να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα: ΑΓ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο, που έχει πλευρές $\alpha = \kappa^2+\lambda^2$, $\beta = 2\kappa\lambda$ και $\gamma = \kappa^2 - \lambda^2$, όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι με κ > λ, είναι ορθογώνιο.

2. Αν ΑΕ, ΑΖ είναι αντίστοιχα οι προβολές δύο χορδών ΑΓ και ΑΔ ενός κύκλου σε μία διάμετρό του ΑΒ, να αποδείξετε ότι
$A Z \cdot A \Gamma^2 = A E \cdot A \Delta^2$.

3. Αν Δ είναι μέσο της κάθετης πλευράς ΑΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟) και Ε η προβολή του στη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι $Ε\Gamma^2 + AB^2 = EB^2$.
Στη συνέχεια διατάξτε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα ΔΒ, ΕΒ, ΕΓ.

4. Δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ($\hat{A}$ = $\hat{A}$΄ = 1∟) έχουν $\mu_\beta = \mu_\beta{}'$ και $\mu_\gamma = \mu_\gamma{}'$. Να αποδείξετε ότι:
i) α = α΄ ii) β = β΄.
Τι συμπεραίνετε για τα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄;

5. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε το ύψος του ΒΕ. Να αποδείξετε ότι
$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3BE^2 + 2AE^2 + \Gamma E^2$.

Σύνθετα θέματα 1.

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1 └) και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές του Δ πάνω ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{AB^3}{A\Gamma^3} = \frac{BE}{\Gamma Z}$ ii) $A\Delta^3 = B\Gamma \cdot \Delta E \cdot \Delta Z$.

2. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν ΒΓ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους και (Ο,σ) ο κύκλος που εφάπτεται στους (Κ,R), (Λ,ρ) και στη ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

i) $B\Gamma = 2\sqrt{R\rho}$ ii) $\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$.

3. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}$ = $\hat{B}$ = 1 └. Αν Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ, ΑΓ αντίστοιχα και Κ το σημείο τομής της ΑΜ με τη ΒΓ να αποδείξετε ότι :

i) το ΑΒΚΔ είναι ορθογώνιο,

ii) $\Delta\Gamma^2 - AB^2 = 4MN^2$.

4. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) να αποδείξετε ότι $2\mu_\alpha^2 \geq \beta\gamma$

5. Θεωρούμε κύκλο (Ο,R), διάμετρό του ΑΒ και μία χορδή του ΓΔ που τέμνει την ΑΒ στο Ε και σχηματίζει με αυτή γωνία 45°. Να αποδείξετε ότι $E\Gamma^2 + E\Delta^2 = 2R^2$.

6. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1 └) και το ύψος του ΑΔ. Αν x, y και ω είναι αντίστοιχα τα μήκη οποιωνδήποτε ομόλογων γραμμικών στοιχείων των τριγώνων (π.χ. διαμέσων, υψών, ακτίνων εγγεγραμμένων κύκλων κτλ.) ΔΑΒ, ΔΑΓ και ΑΒΓ, τότε $x^2 + y^2 = \omega^2$.

9.3 Γεωμετρικές κατασκευές

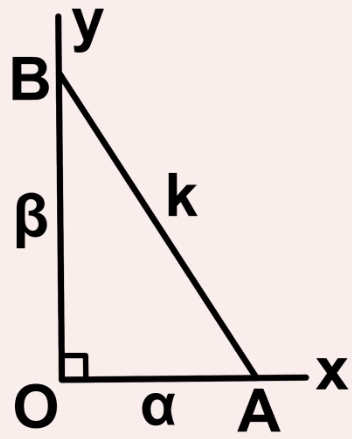
Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος και του θεωρήματος IV αντιμετωπίζουμε τα παρακάτω βασικά προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών ευθύγραμμων τμημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν α, β είναι γνωστά τμήματα, να κατασκευάσετε το τμήμα k , που ορίζεται από την ισότητα :
(i) $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, (ii) $k = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

Λύση

(i) Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$, οπότε το ζητούμενο τμήμα k είναι υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές α, β.Επομένως, αν πάνω στις κάθετες πλευρές (σχ.7) Ox, Oy μίας ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ πάρουμε αντίστοιχα τα σημεία Α, Β, ώστε ΟΑ=α και ΟΒ=β, τότε



Σχήμα 7

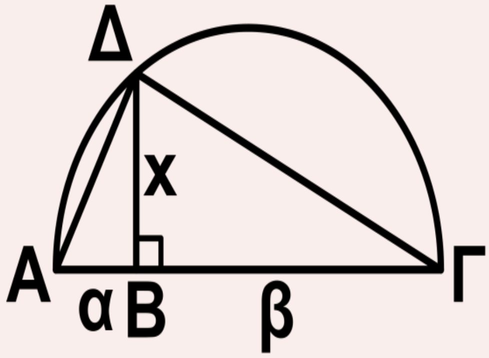
$AB^2 = OA^2 + OB^2 = \alpha^2 + \beta^2$ και επομένως το τμήμα ΑΒ είναι το ζητούμενο τμήμα k .
Είναι φανερό ότι το τμήμα k κατασκευάζεται για οποιαδήποτε τμήματα α, β.
(ii) Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $k^2 = \alpha^2 - \beta^2$ η οποία σημαίνει ότι το ζητούμενο τμήμα k είναι η μία κάθετη πλευρά ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα α και άλλη κάθετη πλευρά το β. Η κατασκευή είναι όμοια της (i).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν α, β είναι γνωστά τμήματα, να κατασκευάσετε το τμήμα x , που ορίζεται από την ισότητα $x=\sqrt{\alpha\beta}$. Το τμήμα x είναι η μέση ανάλογος των α, β.

Λύση

Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $x^2=\alpha\beta$ η οποία σημαίνει ότι το x είναι το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου, που χωρίζει την υποτείνουσα σε δύο τμήματα ίσα με α και β αντίστοιχα.



Σχήμα 8

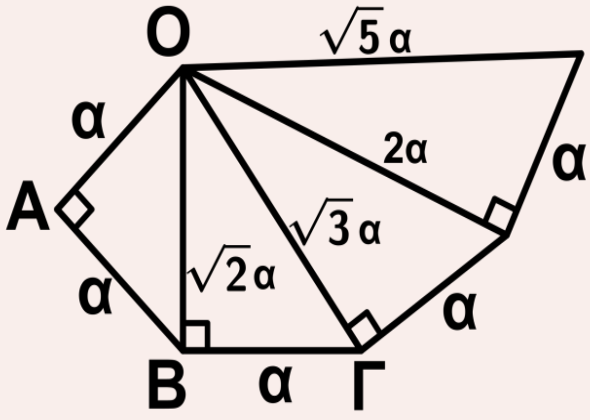
Παίρνουμε επομένως σε μία ευθεία διαδοχικά τα τμήματα ΑΒ=α και ΒΓ=β (σχ.8). Γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΓ και στο Β υψώνουμε κάθετο στην ΑΓ, που τέμνει το ημικύκλιο στο Δ. Σχηματίζουμε το τρίγωνο ΔΑΓ το οποίο είναι ορθογώνιο ($\hat{\Delta}$ =1 ∟). Επομένως έχουμε $\Delta B^2 = AB \cdot B\Gamma = \alpha\beta$ και κατά συνέπεια το τμήμα ΔΒ είναι το ζητούμενο. Είναι φανερό ότι το τμήμα x κατασκευάζεται για οποιαδήποτε τμήματα α, β.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν α είναι γνωστό τμήμα, να κατασκευασθεί τμήμα ίσο με $\sqrt{2}\alpha$, $\sqrt{3}\alpha$, $\sqrt{5}\alpha, \cdots,$ $\sqrt{\nu}\alpha$ με ν φυσικό μεγαλύτερο ή ίσο του δύο.

Λύση

Αν $x=\sqrt{2}\alpha$, τότε $x^2=2\alpha^2=\alpha^2+\alpha^2$, η οποία σημαίνει ότι το x μπορεί να κατασκευασθεί (σχ.9) ως υποτείνουσα ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με α. Έτσι το ΟΒ είναι το ζητούμενο τμήμα.



Σχήμα 9

Αν $y=\sqrt{3}\alpha$, τότε $y=3\alpha^2=\ \alpha^2+2\alpha^2=\alpha^2+x^2$ που σημαίνει ότι το y είναι υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές α και x . Αν λοιπόν φέρουμε κάθετο στην ΟΒ στο Β και πάνω σε αυτή πάρουμε σημείο Γ, ώστε ΒΓ=α, τότε $ΟΓ=\sqrt{3}\alpha$, δηλαδή $y=ΟΓ$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε διαδοχικά τα τμήματα $\sqrt{2}\alpha$, $\sqrt{3}\alpha$, $\sqrt{5}\alpha$, … , $\sqrt{\nu}\alpha$.

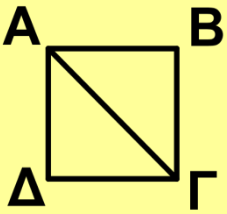
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας

Αρχικά οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος οιωνδήποτε (φυσικών ή γεωμετρικών) μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος φυσικών αριθμών. Ειδικότερα, θεωρούσαν ότι όλα τα τμήματα είναι σύμμετρα, δηλαδή για οποιαδήποτε δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ υπάρχει τμήμα ΕΖ που περιέχεται ακέραιο αριθμό φορών τόσο στο ΑΒ, όσο και το ΓΔ.

Όμως σύντομα έκαναν μια ανακάλυψη που έμελλε να κλονίσει την πεποίθησή τους αυτή. Βρήκαν ότι υπάρχουν μεγέθη που δεν είναι σύμμετρα. Δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα ποιο ακριβώς πρόβλημα οδήγησε τους αρχαίους Έλληνες στην ανακάλυψη αυτή

Οι ιστορικοί έχουν προτείνει κατά καιρούς πολλές εκδοχές. Η ανακάλυψη αυτή μπορεί να είχε γίνει π.χ. στη γεωμετρία, στο πρόβλημα της εύρεσης του κοινού μέτρου της διαγωνίου προς την πλευρά του τετραγώνου,ή κατά τη μελέτη του κανονικού δωδεκαέδρου, ή στη θεωρία της μουσικής, στο πρόβλημα της διαίρεσης της οκτάβας, που ανάγεται στην εύρεση του γεωμετρικού μέσου των αριθμών 1 και 2, ή στην αριθμητική, στο πρόβλημα του ορισμού του λόγου, που το τετράγωνό του είναι ίσο με 2. Η πρώτη μαρτυρία για την απόδειξη της ασυμμετρίας (αλλά όχι κατ' ανάγκη και ιστορικά πρώτη απόδειξη) απαντάται στα «Αναλυτικά ΄Υστερα» του Αριστοτέλη, ο οποίος αναφέρει ότι η απόδειξη της ασυμμετρίας της διαγωνίου με την πλευρά του τετραγώνου γίνεται με την εις άτοπο απαγωγή, γιατί «αν υποτεθεί ότι η διάμετρος είναι σύμμετρη με την πλευρά, τότε ο άρτιος θα ισούται με τον περιττό». Η πρόταση αυτή του Αριστοτέλη ερμηνεύεται ως εξής:



Αν υποθέσουμε ότι η πλευρά ΑΒ είναι σύμμετρη προς τη διαγώνιο ΑΓ, τότε ο λόγος τους είναι λόγος ακεραίων αριθμών, δηλαδή, $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{α}{β}$, όπου οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι. Τότε, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΑΓ^2=2ΑΒ^2$. Επομένως, $\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2}=\frac{α^2}{β^2}=\frac{1}{2}$ ή $β^2=2α^2$.

Αυτό σημαίνει ότι ο $β^2$ είναι άρτιος και επομένως και ο β είναι άρτιος (δηλαδήτης μορφής β=2λ).
Τότε ο α πρέπει να είναι περιττός (αφού οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι). Όμως τότε $(2λ)^2=2α^2$, ή $4λ^2=2α^2$ ή

$2\lambda^2 = \alpha^2$ κι επομένως ο α^2 είναι άρτιος, οπότε και ο α είναι άρτιος, που είναι άτοπο.
Πρέπει να σημειώσουμε ότι η απόδειξη αυτή έχει καθαρά αριθμητικό χαρακτήρα και στηρίζεται στη θεωρία του άρτιου και του περιττού (δηλαδή τη θεωρία διαιρετότητας δια 2) που είχαν αναπτύξει οι Πυθαγόρειοι.
Γρήγορα βρέθηκαν και άλλα ασύμμετρα τμήματα. Ειδικότερα, ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος (τέλη του 5ου αι. π.Χ.) ανακάλυψε ότι οι πλευρές των τετραγώνων με εμβαδόν 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 είναι ασύμμετρες με τη διαγώνιο του τετραγώνου με πλευρές τη μονάδα. Επίσης, ο Θεαίτητος απέδειξε ότι αν το εμβαδόν ενός τετραγώνου εκφράζεται με έναν αριθμό Ν που δεν είναι τετράγωνος, τότε η πλευρά του είναι ασύμμετρη με τη μονάδα.
Με σύγχρονη ορολογία, αν $N \neq \alpha^2$, τότε ο $\sqrt{N}$ δεν είναι ρητός αριθμός. Ο Θεαίτητος προχώρησε παραπέρα τις έρευνές του και απέδειξε ότι και όλοι οι αριθμοί της μορφής $\sqrt[3]{N}$, όπου Ν φυσικός αριθμός δεν είναι τέλειοι κύβοι. Επίσης εξέτασε άρρητους της μορφής $\sqrt{M+N}$, $\sqrt{M}+\sqrt{N}$, $\sqrt{\sqrt{M}+\sqrt{N}}$.

9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος

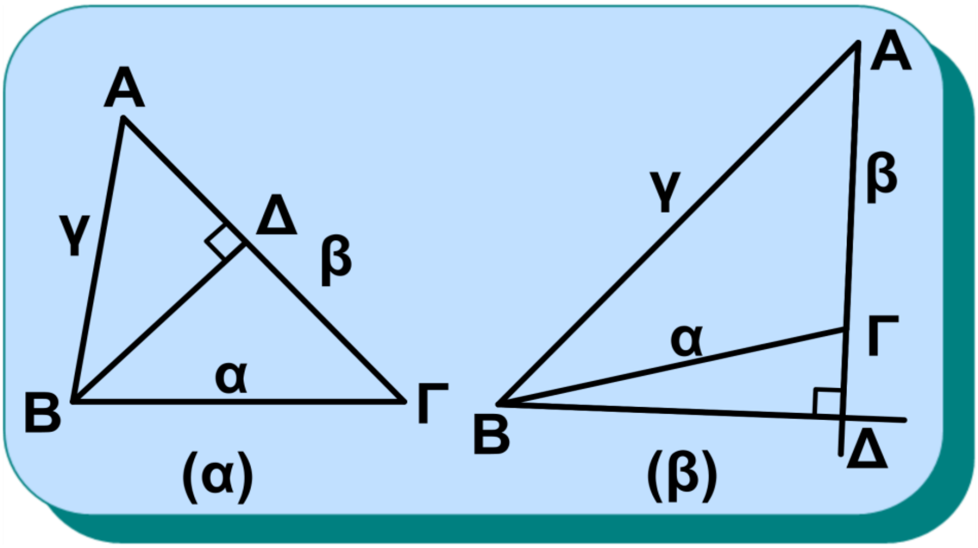
Το Πυθαγόρειο θεώρημα εκφράζει το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από ορθή γωνία, ως προς τις δύο άλλες πλευρές. Προκύπτει, λοιπόν, το ερώτημα: το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι σε οξεία ή αμβλεία γωνία μπορεί να εκφρασθεί ως συνάρτηση των άλλων πλευρών; Απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνουν τα ακόλουθα δύο θεωρήματα.

Θεώρημα I

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.10) είναι π.χ. $\hat{A} < 1^{\llcorner}$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$

Απόδειξη



Σχήμα 10

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ, ΔΒΑ έχουμε, με εφαρμογές του Πυθαγόρειου θεωρήματος αντίστοιχα: $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$ και $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$.

Επειδή είναι $\hat{A} < 1^{\llcorner}$ τα Δ, Γ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Α και ειδικότερα:

▪ αν $\hat{\Gamma} < 1^{\llcorner}$ το Δ είναι μεταξύ των Α, Γ (σχ.10α), οπότε ΔΓ = β - ΑΔ.

▪ αν $\hat{\Gamma} > 1^{\llcorner}$ το Γ είναι μεταξύ των Α, Δ (σχ.10β), οπότε ΔΓ = ΑΔ - β.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι $\Delta\Gamma^2 = (\beta - A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta$.

Με αντικατάσταση αυτής της σχέσης και της $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$ στην $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$ προκύπτει ότι

$$\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$$

δηλαδή η ζητούμενη ισότητα.

▪ αν τέλος $\hat{\Gamma}$ = 1 ∟, το Δ συμπίπτει με το Γ και το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ δίνει $\alpha^2 = \gamma^2 - \beta^2$ που γράφεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$, αφού ΑΔ = β.

Θεώρημα ΙΙ

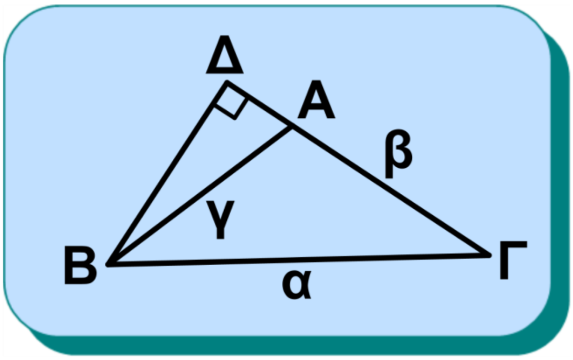
Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.11) είναι π.χ. $\hat{A}$ > 1 ∟ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

Απόδειξη

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ και ΔΒΑ, παίρνουμε αντίστοιχα: $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$ και $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$.



Σχήμα 11

Επειδή $\hat{A}$ > 1 ∟, το Δ βρίσκεται στην προέκταση της ΓΑ προς το Α και επομένως $\Delta\Gamma = \beta + A\Delta$ οπότε

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$ και $\Delta\Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta$ στη σχέση $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$, προκύπτει η ζητούμενη ισότητα

$$\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα και τα προηγούμενα θεωρήματα Ι και ΙΙ προκύπτει άμεσα ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε :

(i) Αν $\hat{A} < 1\llcorner$, τότε $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$,

(ii) Αν $\hat{A} = 1\llcorner$, τότε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$,

(iii) Αν $\hat{A} > 1\llcorner$, τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$.

Αποδεικνύεται όμως, με απαγωγή σε άτοπο ότι ισχύει και το αντίστροφο των (i), (ii), (iii). Πράγματι, αν π.χ. ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ δεν μπορεί να ισχύει $\hat{A} = 1\llcorner$ ή $\hat{A} > 1\llcorner$, γιατί τότε από τις (ii) και (iii) θα είχαμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ ή $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο, αφού $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$. Άρα $\hat{A} < 1\llcorner$.

Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες περιπτώσεις.

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι φανερό ότι τα παραπάνω θεωρήματα Ι και ΙΙ αποτελούν γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, αφού στην περίπτωση που είναι $\hat{A} = 1\llcorner$, τα θεωρήματα αυτά δίνουν ως ειδική περίπτωση το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Έτσι έχουμε το ακόλουθο πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

(i) $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} > 1\llcorner$,

(ii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} = 1\llcorner$,

(iii) $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 1\llcorner$.

Σύμφωνα με το πόρισμα αυτό και επειδή σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι στη μεγαλύτερη γωνία, συγκρίνοντας το τετράγωνο της **μεγαλύτερης** πλευράς ενός τριγώνου με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων πλευρών του, διαπιστώνουμε αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=8, β=10 και γ=7, θα έχουμε $\beta^2 = 100$, $\alpha^2 + \gamma^2 = 64 + 49 = 113$, $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$, οπότε $\hat{B} < 1$∟ και επειδή δηλαδή η $\hat{B}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου, το τρίγωνο θα είναι οξυγώνιο.

Τέλος από τα θεωρήματα Ι και ΙΙ εκφράζοντας την προβολή ΑΔ ως προς το συνΑ προκύπτει το επόμενο πόρισμα:

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

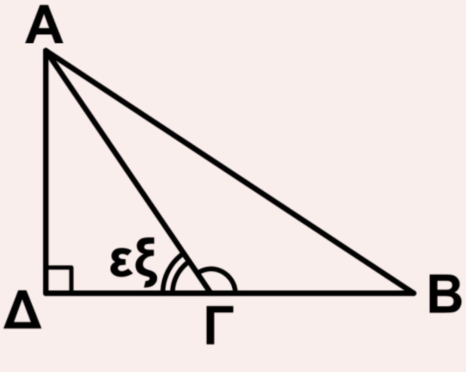
Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \text{συν}A$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta}$, τότε :

(i) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο,

(ii) να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.



Σχήμα 12

Λύση

(i) Από τη δοσμένη ισότητα προκύπτει ότι η γ είναι η μεγαλύτερη πλευρά και επιπλέον ότι

$\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$, οπότε η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία.

(ii) Επειδή η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία, σύμφωνα με το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \Gamma\Delta$ (1).

Από την υπόθεση όμως έχουμε

$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $A\Delta^2 = \beta^2 - \Gamma\Delta^2 = \dfrac{\beta^2}{4}$, οπότε $A\Delta = \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{A\Gamma}{2}$ που σημαίνει ότι $\hat{\Gamma}$εξ = 30° και επομένως $\hat{\Gamma}$ = 150°.

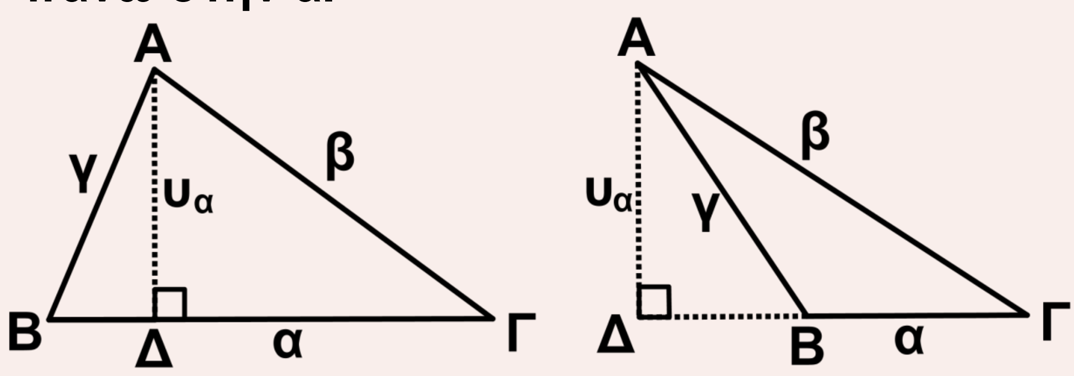
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Το ύψος υ_α ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $\upsilon_\alpha = \dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, όπου $\tau = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου. Ανάλογες εκφράσεις ισχύουν και για τα άλλα ύψη υ_β και υ_γ.

Απόδειξη

Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του υ_α. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε $\upsilon_\alpha^2 = \gamma^2 - B\Delta^2$ (1).

Πρέπει επομένως να υπολογίσουμε την προβολή ΒΔ της γ πάνω στην α.



Σχήμα 13

. Αν $\hat{B} \leq 1\llcorner$, από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot B\Delta$ ή

$$B\Delta = \frac{1}{2\alpha}\left(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2\right) \quad (2)$$

. Αν $\hat{B} \geq 1\llcorner$, από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot B\Delta$ ή $B\Delta = -\dfrac{1}{2\alpha}\left(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2\right)$ (3).

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $B\Delta^2 = \dfrac{1}{4\alpha^2}\left(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2\right)^2$ με αντικατάσταση της οποίας στην (1) παίρνουμε:

$$\upsilon_\alpha^2 = \gamma^2 - \frac{1}{4\alpha^2}\left(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}\left[4\alpha^2\gamma^2 - \left(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}\left(2\alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2\right)\left(2\alpha\gamma - \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}\left[(\alpha + \gamma)^2 - \beta^2\right]\left[\beta^2 - (\alpha - \gamma)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)(\beta + \alpha - \gamma)$$

$$\cdot(\beta + \gamma - \alpha) \quad (4).$$

Επειδή $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$, θα είναι
$\alpha + \gamma - \beta = 2\tau - \beta - \beta = 2(\tau - \beta)$, $\alpha + \beta - \gamma = 2(\tau - \gamma)$ και
$\beta + \gamma - \alpha = 2(\tau - \alpha)$, οπότε η (4) γίνεται:

$$\upsilon_\alpha^2 = \frac{1}{4\alpha^2} 2\tau 2(\tau - \beta) 2(\tau - \gamma) 2(\tau - \alpha) =$$

$= \dfrac{4}{\alpha^2}\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)$ από την οποία προκύπτει το ζητούμενο.

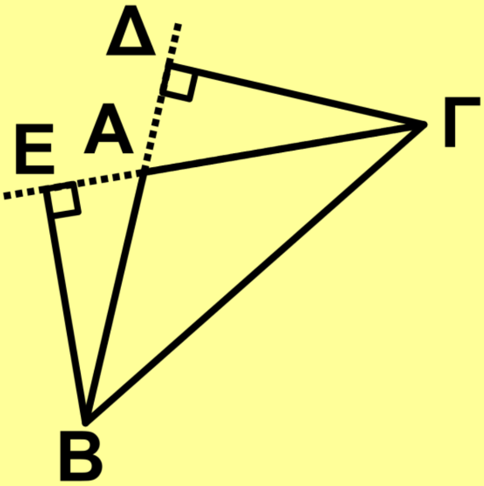
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώστε τα κενά:

i) $B\Gamma^2 = \ldots + \ldots + 2AB\ldots$

ii) $B\Gamma^2 = \ldots + \ldots + 2A\Gamma\ldots$



2. Να βρεθεί το είδος των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ όταν:

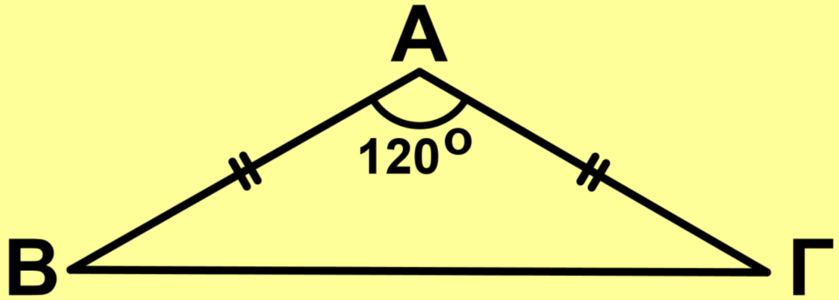
i) $\beta^2 = 3\gamma^2 + \alpha^2$

ii) $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$

iii) $\alpha^2 - \beta^2 = 2\gamma^2$

3. Αν β η .... πλευρά αμβλυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ τότε ….. > α^2 + ….. (Να συμπληρώσετε τα κενά).

4. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 120^\circ$, να δικαιολογήσετε γιατί $\alpha^2 = 3\beta^2$.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ, με α=6μ, β=5μ, γ=4μ, όπου μ θετική παράμετρος. Να εξετασθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

2. Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών α=6, β=5, γ=4; Αν ναι, να υπολογισθούν τα ύψη του τριγώνου.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=1+\sqrt{3}$, $\gamma=2$. Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{A}$.

4. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 4cm, ΑΓ = 5cm και $A\hat{B}\Delta = 30°$, όπου ΒΔ το ύψος του. Να υπολογισθεί η πλευρά του ΒΓ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν μήκη ΑΒ=9cm, ΒΓ=7cm και ΑΓ=12cm. Να υπολογισθεί το μήκος της προβολής της ΒΓ πάνω στην ΑΒ.

2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ ισχύει ότι $A\Gamma^2+B\Delta^2=A\Delta^2+B\Gamma^2+2AB\cdot\Gamma\Delta$.

3. Αν ΒΒ΄, ΓΓ΄είναι ύψη ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $\alpha^2=\beta\cdot\Gamma B'+\gamma\cdot B\Gamma'$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1 ∟). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά ΓΔ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $B\Delta^2=2B\Gamma\cdot A\Delta$.

5. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε παράλληλο της ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BE^2=E\Gamma^2+B\Gamma\cdot\Delta E$

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1 ∟) με πλευρές α, β, γ. Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 5α, 4β, 3γ;

Σύνθετα Θέματα

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A}$ = 30°. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

2. Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και μία χορδή του ΓΔ//ΑΒ. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι $M\Gamma^2+M\Delta^2=MA^2+MB^2$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha^3=\beta^3+\gamma^3$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

9.5 Θεωρήματα διαμέσων

Οι επόμενες μετρικές σχέσεις που θα μελετήσουμε αφορούν τον υπολογισμό των διαμέσων ενός τριγώνου και των προβολών τους στις πλευρές, ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου.

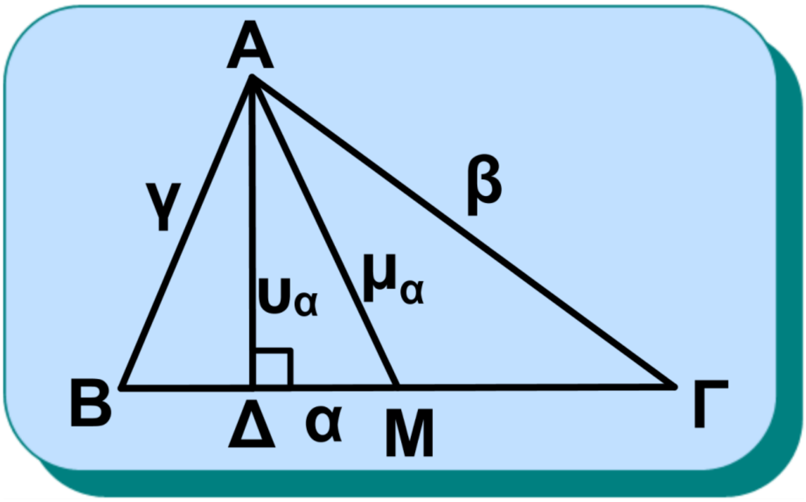
Θεώρημα I (1ο Θεώρημα Διαμέσων)

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος και το ύψος ΑΔ. Αν ΑΓ > ΑΒ, τότε το ίχνος Δ του βρίσκεται μεταξύ των Β, Μ (σχ.14) και $A\hat{M}\Gamma > 1 ^{\llcorner}$, ενώ $A\hat{M}B < 1 ^{\llcorner}$.

Σχήμα 14



Εφαρμόζουμε το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΓ και το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΒ. Τότε θα έχουμε ότι:

(i) $A\Gamma^2 = AM^2 + M\Gamma^2 + 2M\Gamma \cdot M\Delta$

(ii) $AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2MB \cdot M\Delta$

Προσθέτοντας κατά μέλη αυτές τις σχέσεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι ΜΒ = ΜΓ έχουμε:

$$\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{AB}^2=2\mathrm{AM}^2+2\mathrm{MB}^2=$$

$$=2\mathrm{AM}^2+2\left(\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}\right)^2=2\mathrm{AM}^2+\frac{\mathrm{B\Gamma}^2}{2} \text{ ή}$$

$$\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}$$

Ανάλογα έχουμε και τους ακόλουθους τύπους:

$$\alpha^2+\beta^2=2\mu_\gamma^2+\frac{\gamma^2}{2},$$

$$\alpha^2+\gamma^2=2\mu_\beta^2+\frac{\beta^2}{2}.$$

Από τους τύπους αυτούς μπορούμε να υπολογίσουμε τα τετράγωνα των διαμέσων ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου:

$$\mu_\alpha^2=\frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4},$$

$$\mu_\beta^2=\frac{2\alpha^2+2\gamma^2-\beta^2}{4},$$

$$\mu_\gamma^2=\frac{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}{4}$$

Για τον υπολογισμό των προβολών των διαμέσων στις πλευρές του τριγώνου έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα ΙΙ (2^{o} Θεώρημα Διαμέσων)

Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Απόδειξη

Έστω ότι ΑΓ > ΑΒ. Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (βλ. Απόδειξη θεωρήματος Ι):

(i) $ΑΓ^2 = ΑΜ^2 + ΜΓ^2 + 2ΜΓ \cdot ΜΔ$

(ii) $ΑΒ^2 = ΑΜ^2 + ΜΒ^2 - 2ΜΒ \cdot ΜΔ$

βρίσκουμε ότι $ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = 4ΜΒ \cdot ΜΔ = 4\dfrac{ΒΓ}{2} \cdot ΜΔ$

ή $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot ΜΔ$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΓ = ΑΒ) ή ισόπλευρο τότε, το Μ ταυτίζεται με το Δ και το $2^{ο}$ θεώρημα διαμέσων ισχύει ταυτοτικά.

9.6 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες μετρικές σχέσεις θα μελετήσουμε τα παρακάτω προβλήματα γεωμετρικών τόπων.

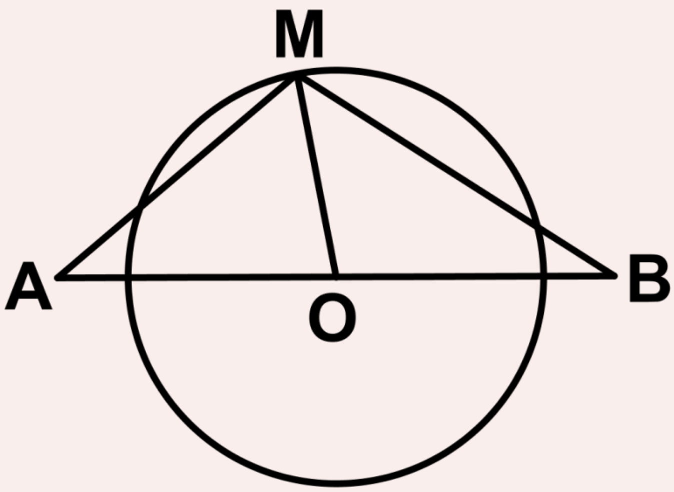
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω Α, Β δύο σταθερά σημεία και k ένα δοσμένο τμήμα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων, των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα Α, Β ισούται με k^2.

Λύση

Έστω Μ ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου. Σύμφωνα με το πρόβλημα θα είναι: $ΑΜ^2 + ΒΜ^2 = k^2$ (1).

Αν Ο είναι το μέσο του ΑΒ, τότε από το 1ο θεώρημα των διαμέσων θα έχουμε



Σχήμα 15

$$AM^2 + BM^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$k^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$MO = \frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2} \quad (2).$$

Από την ισότητα αυτή βλέπουμε ότι το τμήμα ΜΟ έχει σταθερό μήκος.

Έτσι το Μ απέχει από το σταθερό σημείο Ο σταθερή απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}$, άρα βρίσκεται στον κύκλο $\left(O, \frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}\right)$.

Αντίστροφα. Θα αποδείξουμε ότι κάθε σημείο Μ του κύκλου $\left(O, \frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}\right)$ είναι και σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, δηλαδή ότι ισχύει $AM^2 + BM^2 = k^2$. Πράγματι, από το 1ο θεώρημα διαμέσων έχουμε $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} =$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}\right) + \frac{AB^2}{2} = k^2.$$

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος που έχει κέντρο O το μέσο του τμήματος AB και ακτίνα ίση με $\frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}$.

Διερεύνηση. Απαραίτητη προϋπόθεση για να υπάρχει γεωμετρικός τόπος είναι $2k^2 - AB^2 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{AB}{\sqrt{2}}$

Όταν έχουμε ισότητα ο γεωμετρικός τόπος αποτελείται μόνο από το σημείο O.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

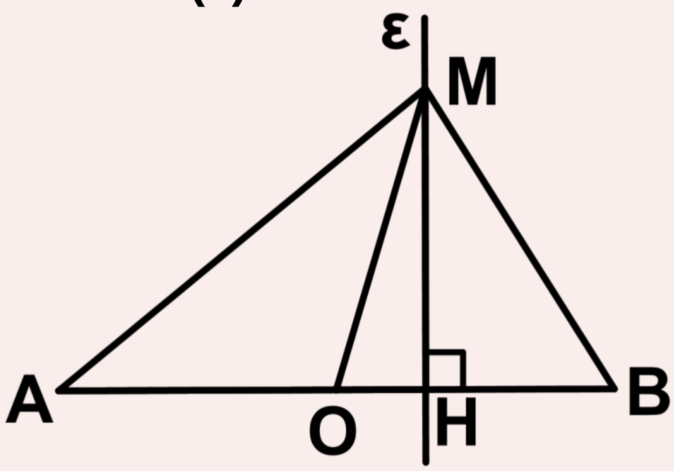
Έστω A, B δύο σταθερά σημεία και k ένα σταθερό τμήμα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων, για τα οποία η διαφορά των τετραγώνων των αποστάσεών τους από τα A, B ισούται με k^2.

Λύση

Έστω M ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου. Σύμφωνα με το πρόβλημα (για AM > BM) είναι

$$AM^2 - BM^2 = k^2 \ (1).$$

Έστω O το μέσο του AB και ε η ευθεία MH ⊥ AB όπου H η προβολή του M πάνω στην AB.



Σχήμα 16

Από το 2ο θεώρημα των διαμέσων έχουμε ότι

$$AM^2 - BM^2 = 2AB \cdot OH \Leftrightarrow$$

$$k^2 = 2AB \cdot OH \Leftrightarrow OH = \frac{k^2}{2AB} \quad (2).$$

Η ισότητα αυτή δείχνει ότι το τμήμα ΟΗ είναι σταθερό. Παρατηρούμε ότι η προβολή του Μ πάνω στο ΑΒ είναι σταθερή, άρα το Μ βρίσκεται στην ευθεία ε ⊥ Β στο σημείο Η, όπου $OH = \frac{k^2}{2AB}$ και βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ο, Β.

Αντίστροφα. Έστω σημείο Η μεταξύ των Ο, Β τέτοιο, ώστε $OH = \frac{k^2}{2AB}$.

Από το Η φέρουμε την κάθετη ευθεία ε στην ΑΒ και έστω Μ τυχαίο σημείο της ε. Θα αποδείξουμε ότι το Μ είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Πράγματι από το 2ο Θεώρημα διαμέσων έχουμε

$$AM^2 - BM^2 = 2AB \cdot OH =$$

$$= 2AB \cdot \frac{k^2}{2AB} = k^2$$

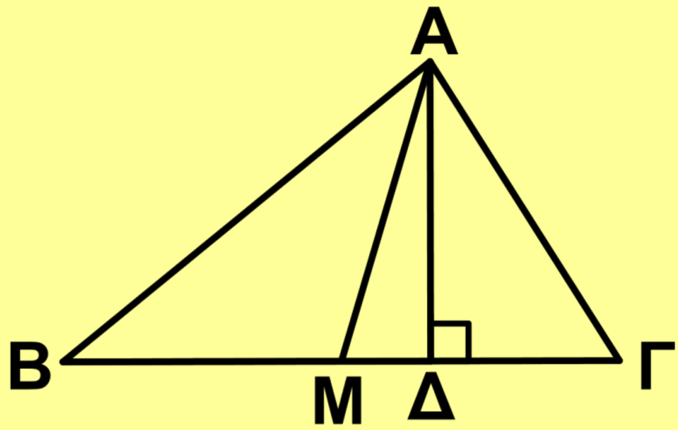
Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ε.

Διερεύνηση. Αν k = 0 είναι $MA^2 - MB^2 = 0$ ή ΜΑ = ΜΒ, οπότε το Μ ισαπέχει από τα σημεία Α,Β. Τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στο παρακάτω σχήμα η ΑΜ είναι διάμεσος και ΑΔ ύψος. Ποια σχέση είναι σωστή;



i) $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2ΑΜ^2 + 2ΒΜ^2$

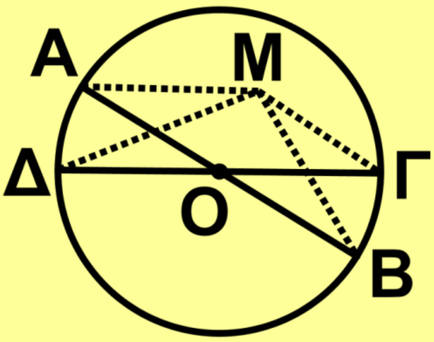
ii) $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2ΑΜ^2 + 2ΑΔ^2$

iii) $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2ΒΓ \cdot ΜΔ$

iv) $ΑΒ^2 - ΑΓ^2 = 2ΑΜ^2 + 2ΒΜ^2$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώσετε τα κενά



i) $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 =$ .... + ...

ii) $ΜΓ^2 + ΜΔ^2 =$ .... + ...

Να εξηγήσετε γιατί

$ΜΑ^2 + ΜΒ^2 = ΜΓ^2 + ΜΔ^2$.

3. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι

$β^2 + γ^2 = 5α^2$ **τότε:**

α. $μ_α = \frac{α}{2}$, β. $μ_α = \frac{3α}{4}$, γ. $μ_α = \frac{3α}{2}$,

δ. $μ_α = \frac{2α}{3}$

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. **Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε β=7, γ=6 και μ_α=7/2. Να υπολογισθούν: i) η πλευρά α, ii) η προβολή της διαμέσου μ_α στη ΒΓ.**

2. **Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\mu_\alpha^2 + \beta\gamma > \frac{\alpha^2}{4}$**

3. **Δίνεται κύκλος (Ο,R), μια διάμετρός του ΑΒ και έστω Γ, Δ τα μέσα των ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα.**
Αν $ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = 5$, όπου Μ τυχαίο σημείο του κύκλου, να υπολογισθεί η ακτίνα R.

4. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και έστω Θ το βαρύκεντρό του.**
Να αποδείξετε ότι:

i) $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$,

ii) $ΘΑ^2 + ΘΒ^2 + ΘΓ^2 = \frac{1}{3}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}$ = 60°, β = 5, γ = 3. Να υπολογισθεί η διάμεσός του μ_α.**

2. **Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τυχαίο σημείο Δ της ΑΒ. Να αποδείξετε ότι**

$ΔΓ^2 - ΔΒ^2 = \frac{ΒΓ^2 \cdot ΑΔ}{ΑΒ}$.

3. **i) Αν ΑΒΓΔ ορθογώνιο και Μ τυχαίο σημείο να αποδείξετε ότι**
$ΜΑ^2 + ΜΓ^2 = ΜΒ^2 + ΜΔ^2$.

ii) Αν ΑΒΓΔ τετράγωνο και σημείο Μ στο εσωτερικό του, ώστε ΜΑ = 1, ΜΒ = $\sqrt{2}$ και ΜΓ = $\sqrt{3}$, να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου.

4. Αν Μ, Ν είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι

$$ΑΒ^2+ΒΓ^2+ΓΔ^2+ΔΑ^2 = ΑΓ^2+ΒΔ^2+4ΜΝ^2$$

(Θεώρημα Euler).

5. Στην υποτείνουσα ΒΓ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια, ώστε

ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ.

Να αποδείξετε ότι $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = \frac{5}{9}ΒΓ^2$

6. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $β^2 + γ^2 = 2αμ_α$ να υπολογισθεί η γωνία $\hat{Α}$.

Σύνθετα Θέματα

1. Δύο αδέλφια κληρονόμησαν αγροτεμάχιο σχήματος τραπεζίου και αποφάσισαν να το μοιράσουν ανοίγοντας δρόμο που θα ενώνει τα μέσα των παράλληλων πλευρών του. Αν οι βάσεις είναι 8km και 6km, ενώ οι μη παράλληλες πλευρές 5km και 7km, πόσο θα στοιχίσει η διάνοιξη του δρόμου, αν 1 χιλιόμετρο δρόμου κοστίζει 50.000 δρχ;

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΓ > ΑΒ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Ο το μέσο του ΜΝ, να αποδείξετε ότι:

$$ΟΓ^2 - ΟΒ^2 = \frac{ΑΓ^2 - ΑΒ^2}{2}$$

3. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2α θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ. Χωρίζουμε τη διάμετρο ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα ΑΓ=ΓΔ=ΔΒ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 + ΜΓ^2 + ΜΔ^2$ είναι σταθερό.

4. **Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς α, Ο το κέντρο του και κύκλος (Ο,λα), λ > 0. Αν για τυχαίο σημείο Μ του κύκλου ισχύει**
$MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 18\alpha^2$, **να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ.**
5. **Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς α, με διαγώνιο ΒΔ = α. Έστω τυχαίο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι**
$\alpha^2 = \left(PA^2 - PB^2\right) + \left(P\Gamma^2 - P\Delta^2\right)$

Μετρικές σχέσεις σε κύκλο

9.7 Τέμνουσες κύκλου

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (Ο,R) και ένα εξωτερικό ή εσωτερικό σημείο του Ρ. Από το Ρ φέρουμε δύο τυχαίες ευθείες που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα. Το ακόλουθο θεώρημα εκφράζει ότι $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$.

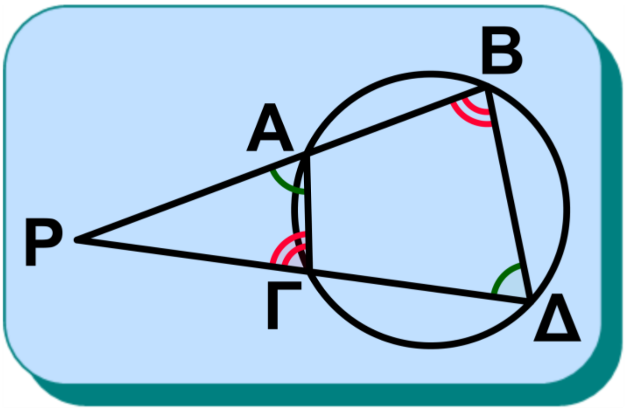
Θεώρημα Ι

Αν δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει

$$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$$

Απόδειξη

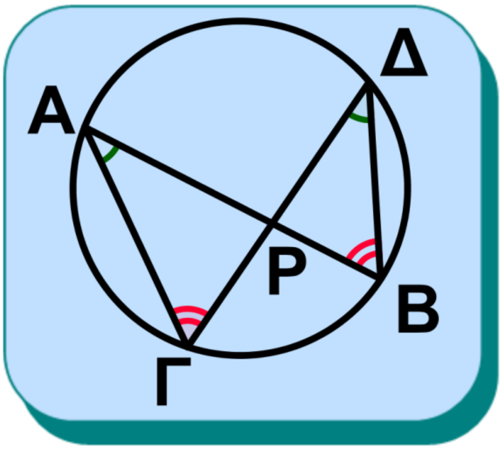
Τα τρίγωνα ΡΑΓ και ΡΒΔ είναι όμοια, αφού $P\hat{A}\Gamma = P\hat{\Delta}B$ **και** $P\hat{\Gamma}A = P\hat{B}\Delta$ **(Στο σχ.17α έχουμε**



Σχήμα 17α

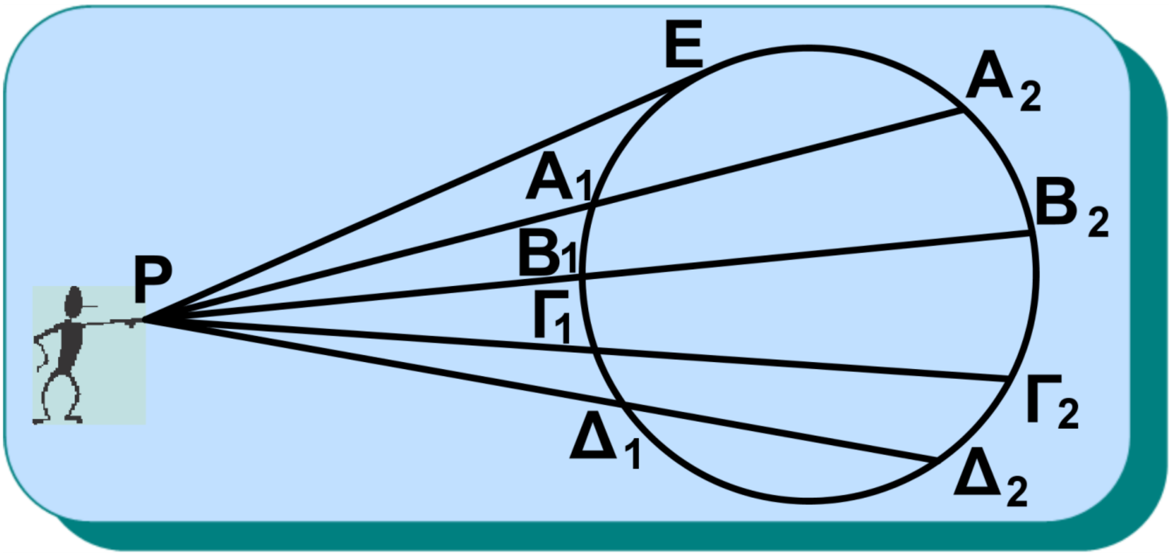
ότι $P\hat{A}\Gamma = P\hat{\Delta}B$ **γιατί το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο και η** $P\hat{A}\Gamma$ **είναι εξωτερική του γωνία.**

Στο σχ. 17β
$\hat{PAΓ} = \hat{PΔB}$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο).
Επομένως, ισχύει ότι



Σχήμα 17β

$$\frac{PA}{PΔ} = \frac{PΓ}{PB} \text{ ή . } PA \cdot PB = PΓ \cdot PΔ$$



Σχήμα 18

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα γινόμενα των τμημάτων που ορίζουν οι τέμνουσες ενός κύκλου $PA_1 \cdot PA_2$, $PB_1 \cdot PB_2$, $PΓ_1 \cdot PΓ_2$, ... παραμένουν σταθερά. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα γινόμενα αυτά εξαρτώνται μόνο από τις θέσεις του σημείου Ρ και του κύκλου (Ο,R).
Στην ειδική περίπτωση της εφαπτομένης, όπου τα δύο σημεία τομής ταυτίζονται, το θεώρημα ισχύει.

Θεώρημα II

Αν από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (O,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α, Β, τότε ισχύει ότι

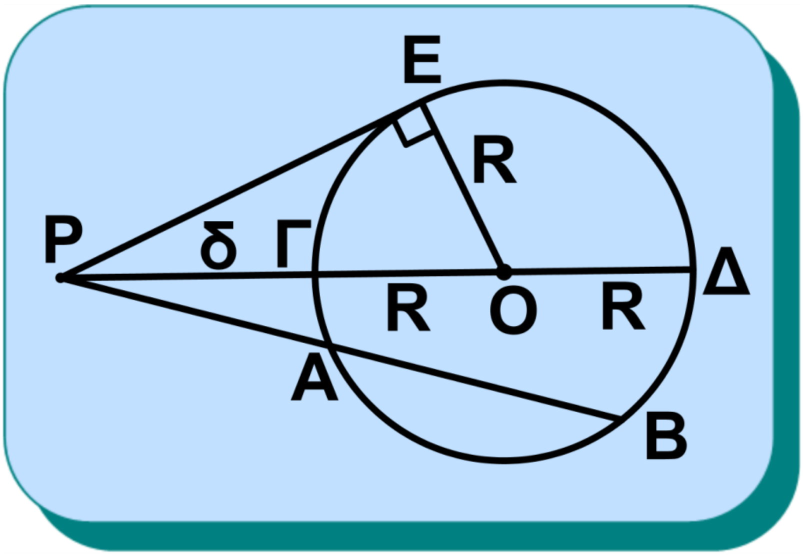
$$\mathrm{PE}^2 = \mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$$

Απόδειξη

Φέρουμε την ευθεία ΡΟ η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ. Θέτουμε ΟΡ = δ, οπότε από το θεώρημα Ι έχουμε ότι:

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{P\Gamma}\cdot\mathrm{P\Delta} =$$
$$= (\delta - R)\cdot(\delta + R) = \delta^2 - R^2.$$

Σχήμα 19



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΡΟΕ προκύπτει ότι

$$\mathrm{PE}^2 = \mathrm{PO}^2 - \mathrm{OE}^2 = \delta^2 - R^2$$

Άρα $\mathrm{PE}^2 = \mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$.

Στην προηγούμενη απόδειξη είδαμε ότι αν μια ευθεία διέρχεται από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (O,R) και τέμνει τον κύκλο σε σημεία Α, Β τότε $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \delta^2 - R^2$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = R^2 - \delta^2$ αν το Ρ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Η διαφορά $\delta^2 - R^2$ λέγεται **δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (O,R)** και συμβολίζεται

$$\Delta^{P}_{(O,R)} = \delta^2 - R^2 = OP^2 - R^2.$$

Ας εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου ή όταν ανήκει σε αυτόν. Τότε η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R) είναι αρνητική ή ίση με το μηδέν αντίστοιχα.

Από τον ορισμό της δύναμης σημείου ως προς κύκλο καταλαβαίνουμε ότι ουσιαστικά εκφράζει τη σχετική θέση του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R), καθώς εξαρτάται μόνο από το δ, δηλαδή την απόσταση του P από το κέντρο του κύκλου. Επομένως, έχουμε ότι:

- **το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν**

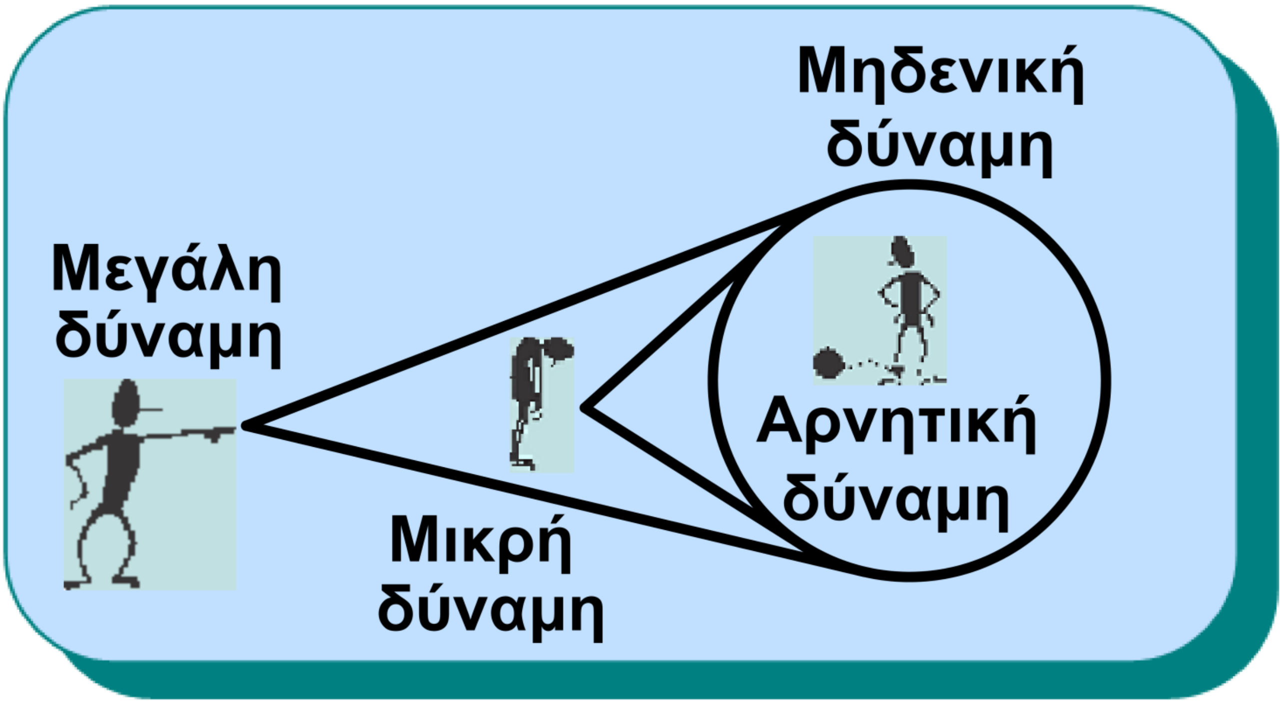
$$\Delta^{P}_{(O,R)} > 0$$

- **το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν**

$$\Delta^{P}_{(O,R)} < 0$$

- **το P είναι σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν**

$$\Delta^{P}_{(O,R)} = 0$$



Σχήμα 20

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ έτσι ώστε $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$, τότε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε το σημείο τομής Ρ των τμημάτων ΑΒ, ΓΔ ή των προεκτάσεών τους (σχ.17). Η δοσμένη σχέση $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$ γράφεται $\dfrac{PA}{P\Gamma} = \dfrac{P\Delta}{PB}$ και αφού $A\hat{P}\Gamma = B\hat{P}\Delta$, τα τρίγωνα ΑΡΓκαι ΒΡΔ θα είναι όμοια.

Επομένως $P\hat{B}\Delta = P\hat{\Gamma}A$, οπότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η εφαρμογή εκφράζει το αντίστροφο του θεωρήματος *I*.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Ας θεωρήσουμε ευθεία ε και τρία σημεία της Ρ, Α, Β, με το Α μεταξύ των Ρ και Β. Έστω σημείο Ε εκτός της ευθείας ε τέτοιο, ώστε $PE^2 = PA \cdot PB$. Τότε το τμήμα ΡΕ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο, που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Ε.

Απόδειξη

Έστω (O,R) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Ε (σχ.19). Τότε $PE^2 = PA \cdot PB = OP^2 - R^2 = OP^2 - OE^2$ ή $PE^2 + OE^2 = OP^2$, οπότε το τρίγωνο ΟΕΡ είναι ορθογώνιο και η ΡΕ εφάπτεται στον κύκλο (O,R).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

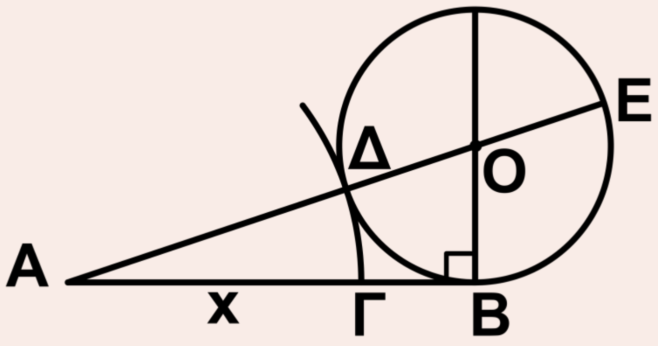
Η εφαρμογή αυτή εκφράζει το αντίστροφο του θεωρήματος *II*.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η Διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο (Χρυσή Τομή)

Να διαιρεθεί ένα τμήμα ΑΒ, σε δύο άνισα τμήματα ΑΓ, ΓΒ ώστε το μεγαλύτερο από αυτά να είναι μέσο ανάλογο του μικρότερου και του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος.

Απόδειξη

Έστω ΑΒ = α και ΑΓ = x το μεγαλύτερο από τα τμήματα στα οποία



Σχήμα 21

χωρίζεται το ΑΒ από το Γ (σχ.21). Τότε ΓΒ = α . x και θα πρέπει να ισχύει η σχέση: $ΑΓ^2 = ΑΓ \cdot ΓΒ$ ή $x^2 = α(α - x)$ (1).

Η σχέση (1) γράφεται $x^2 + αx - α^2 = 0$ ή $x(x + α) = α^2$ (2).

Έτσι, για να κατασκευάσουμε το x γράφουμε κύκλο $\left(O, \frac{α}{2}\right)$ που εφάπτεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο σημείο Β και φέρουμε την ΑΟ, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ, Ε. Τότε ισχύει ότι $ΑΒ^2 = ΑΔ \cdot ΑΕ =$ $ΑΔ(ΑΔ + ΑΕ) =$

$= ΑΔ(ΑΔ + ΑΒ)$ ή $α^2 = ΑΔ(ΑΔ + α)$

οπότε το ΑΔ έχει το ζητούμενο μήκος και το Γ είναι η τομή του κύκλου (Α, ΑΔ) και του τμήματος ΑΒ.

ΣΧΟΛΙΟ

Το πρόβλημα της διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο είναι γνωστό σήμερα και ως πρόβλημα της **Χρυσής Τομής**.

Με το πρόβλημα αυτό επιλύεται γεωμετρικά η εξίσωση $x^2 = \alpha(\alpha - x)$ ή $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$.

Η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$ είναι $x = \frac{\alpha(\sqrt{5} - 1)}{2}$,

από όπου προκύπτει ότι $\frac{\alpha}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\alpha}{\alpha - x}$ που είναι η αναλογία της «χρυσής τομής».

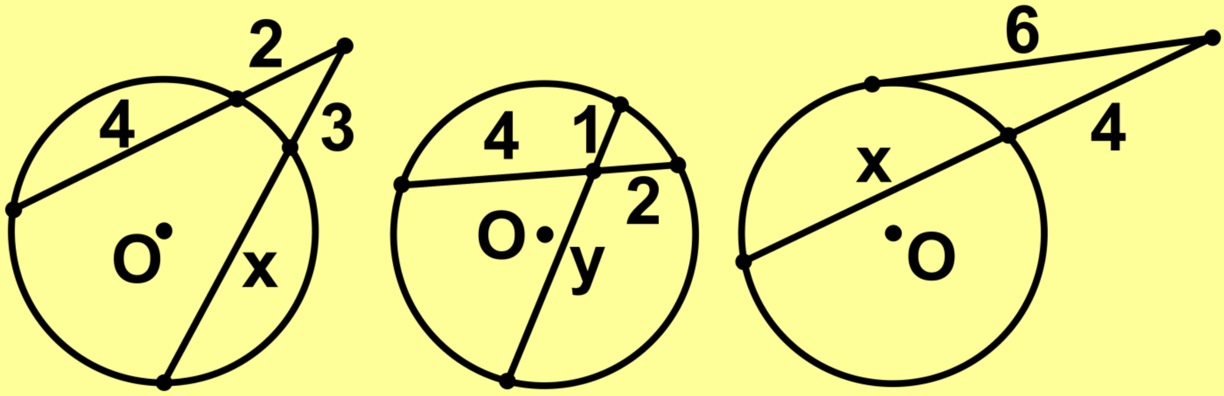
Ο παραπάνω λόγος συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ, δηλαδή $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ο συμβολισμός προέρχεται από το όνομα του γλύπτη της κλασικής αρχαιότητας Φειδία ο οποίος κατασκεύασε τον Παρθενώνα. Οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι διαπίστωσαν ότι όπου εμφανίζεται ο λόγος φ (αρχιτεκτονική, γλυπτική κτλ.), δημιουργεί την **αίσθηση της αρμονίας**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

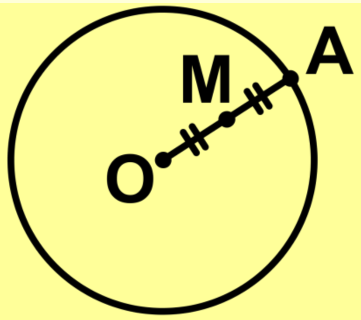
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να προσδιορισθούν οι τιμές των x, y, στα παρακάτω σχήματα:



2. Ποια η δύναμη σημείου P ως προς κύκλο (O,R) όταν $P \equiv O$;

3. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta^{M}_{(O,R)} = -3$, να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται κύκλος (Κ,6) και σημείο Α, ώστε ΑΚ=14cm. Αν από το σημείο Α φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ που τέμνει τον κύκλο κατά χορδή ΒΓ=6cm, να υπολογίσετε το ΑΒ.
2. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ο κύκλος, που διέρχεται από το Α και τα μέσα Μ, Ν των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, εφάπτεται της ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma$.
3. Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και τις χορδές του ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται στο Ρ. Αν ισχύει ότι $\frac{PA}{PB} = \frac{P\Delta}{P\Gamma}$ να αποδείξετε ότι οι χορδές ΑΒ, ΓΔ είναι ίσες.
4. Να αποδείξετε ότι η προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί κάθε κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και η ΒΕ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

i) $BE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$, ii) $BE = 5EZ$

2. Από σημείο Α εκτός κύκλου (Ο,R) φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ και εφαπτόμενο τμήμα ΑΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τις ΒΔ, ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $EB \cdot Z\Gamma = E\Delta \cdot Z\Delta$.
3. Αν η διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγγεγραμμένο κύκλο στο Ε ,να αποδείξετε ότι:

i) $AM \cdot ME = \frac{B\Gamma^2}{4}$,

ii) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM \cdot AE$

4. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ευθεία ε που δεν τέμνει τον κύκλο. Από σημείο Μ της ε φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ, ΜΒ και $O\Gamma \perp \varepsilon$. Αν η ΑΒ τέμνει την ΟΓ στο Ν, να αποδείξετε ότι $ON \cdot O\Gamma = R^2$.

5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1$ └), εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και το ύψος του ΑΔ. Αν μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το Γ τέμνει το ύψος στο Μ και τον κύκλο στο Η, να αποδείξετε ότι $\Gamma M \cdot \Gamma H = \Gamma A^2$

Σύνθετα Θέματα

1. Αν η διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε και είναι $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$, να αποδείξετε ότι $AE^2 = 2E\Gamma^2$.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι $M\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$.

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mu_\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$. Αν Μ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΜ εφάπτεται της ΒΓ στο Β.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΑΔ, η διάμεσός του ΑΜ και ο περιγεγραμμένος κύκλος (Κ) του τριγώνου ΑΔΜ. Αν Ε, Ζ είναι τα σημεία τομής των ΑΒ και ΑΓ με τον κύκλο (Κ) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο ευθύγραμμα τμήματα. Ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε $AB \perp \Gamma\Delta$ είναι να ισχύει ότι $A\Gamma^2 - A\Delta^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2$

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, να αποδείξετε ότι $AB \cdot A\Gamma = A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

3. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ και ΒΔ το ύψος του, να αποδείξετε ότι $AM^2 = BM^2 + A\Delta \cdot A\Gamma$

4. Θεώρημα Stewart

i) Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ, τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι $B\Delta \cdot A\Gamma^2 + \Delta\Gamma \cdot AB^2 = B\Gamma\left(A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma\right)$ ii) Να διατυπώσετε το θεώρημα Stewart όταν το ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ).

5. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$,

ii) αν ΑΔ ύψος και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε $AH \cdot A\Delta = 2\alpha^2$.

6. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Αν Δ η προβολή του Μ πάνω στην ΑΒ να αποδείξετε ότι $B\Gamma^2 = 3AB^2 + A\Gamma^2 - 4AB \cdot A\Delta$

7. Δίνεται κύκλος (Ο,R) μια ακτίνα ΟΑ και χορδή ΒΓ παράλληλη προς την ΟΑ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $AB^2 + A\Gamma^2$ είναι σταθερό.

8. Δίνεται κύκλος (Ο,R), μία διάμετρος ΑΒ και Γ, Δ τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ αντίστοιχα. Αν μία χορδή ΕΗ που διέρχεται από το Γ είναι $EH = \frac{\sqrt{13}}{2}R$, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}H = 1$ └.

Δραστηριότητες

1. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1 ∟) με ίσες πλευρές α. Στο ημιεπίπεδο ακμής ΒΓ που δεν περιέχει το Α θεωρούμε το ορθογώνιο ΒΓΔΕ με ΒΕ = α. Έστω Ζ, Η οι προβολές των Β, Δ αντίστοιχα στην ΕΓ. Προσπαθήστε να ανακαλύψετε εποπτικά τη σχέση των τμημάτων ΓΗ, ΗΖ και ΖΕ και στη συνέχεια να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

2. Με κατάλληλη γεωμετρική κατασκευή προσδιορίστε την .ακριβή. θέση των αριθμών $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ και $\sqrt{5}$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Εργασία (Ριζικός άξονας δύο κύκλων)

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν την ίδια δύναμη ως προς δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) όταν:

i) Οι κύκλοι τέμνονται (**Υπόδειξη**: φέρτε την κοινή χορδή τους),

ii) Οι κύκλοι εφάπτονται (**Υπόδειξη**: φέρτε την κοινή εφαπτομένη),

iii) Οι κύκλοι είναι ο ένας εξωτερικός του άλλου (**Υπόδειξη**: χρησιμοποιήστε το πρόβλημα 2 της §9.6).

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο

Η προέλευση του προβλήματος της διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος σε δύο μέρη, έτσι, ώστε το μεγαλύτερο τμήμα του να είναι μέση ανάλογος ανάμεσα σε ολόκληρο το τμήμα και το μικρότερο τμήμα του, δηλαδή $α:x = x:(α - x)$, δεν είναι ιστορικά εξακριβωμένη. Ορισμένοι ιστορικοί ανάγουν την προέλευσή του στην Πυθαγόρεια σχολή, συνδέοντάς το με την μελέτη της τετραγωνικής εξίσωσης $x^2+αx=α^2$, όπως εμφανίζεται σε γεωμετρική γλώσσα στο Βιβλίο ΙΙ των «Στοιχείων» του Ευκλείδη ή με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας στην αρχαία Ελλάδα, και άλλοι με την κατασκευή του πενταγώνου από το Θεαίτητο περί το 386 π.Χ.

Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται στα εξής Βιβλία:

1. **στο Βιβλίο ΙΙ (Προτάσεις 5, 6 και 11), που συνδέεται με την «παραβολή χωρίων» και κατά συνέπεια με την εξίσωση $x^2 + αx = α^2$,**
2. **στο Βιβλίο IV (Προτάσεις 10-11), κατά την κατασκευή του κανονικού πενταγώνου,**
3. **στο Βιβλίο VI (Ορισμός 3 και Προτάσεις 29-30), όπου ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί έννοιες από τη γενική θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου που εκτίθεται στο Βιβλίο V (βλ. Μέτρηση).**
4. **στο Βιβλίο XIII (Προτάσεις 16 και 17), κατά την κατασκευή του κανονικού εικοσαέδρου και δωδεκαέδρου, στην οποία ενέχεται το πεντάγωνο.**

Μετά τον Ευκλείδη το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο εμφανίζεται στο αποκαλούμενο « Συμπλήρωμα » ή Βιβλίο XIV των « Στοιχείων »,

που αποδίδεται στον Υψικλή (2ος αι. π.Χ.). Στο έργο του Ήρωνα εμφανίζεται σε σχέση με τον προσδιορισμό της επιφάνειας του πενταγώνου και του δεκαγώνου, και στη « Συναγωγή » του Πάππου στην κατασκευή του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου, καθώς και στα θεωρήματα σύγκρισης των όγκων τους.

Στην Αραβική παράδοση δεν υπάρχουν ενδείξεις εισαγωγής της έννοιας της διαίρεσης ενός τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο, αν και στο έργο του αλ-Χουαρίζμι (περίπου 780-850), του Αμπού Καμίλ (περίπου 850-930), του Αμπούλ-Ουάφα (940-997/8) κ.ά. εξετάζονται συναφή προβλήματα.

Στην Ευρωπαϊκή παράδοση οι απαρχές της μελέτης των ιδιοτήτων της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο ανάγονται στον Λεονάρδο της Πίζας ή Φιμπονάτσι (περίπου 1180-1250), που εξετάζει μετρικά προβλήματα του πενταγώνου και του δεκαγώνου, καθώς και προβλήματα προσδιορισμού του όγκου του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου. Ο Φιμπονάτσι είναι περισσότερο γνωστός από το «πρόβλημα των κουνελιών», που εκτίθεται στο «Βιβλίο του άβακα» (Liber abaci): «Πόσα ζεύγη κουνελιών μπορούν να γεννηθούν μέσα σε ένα χρόνο από ένα ζευγάρι κουνέλια; ... όταν ηφύση των κουνελιών είναι τέτοια που κάθε μήνα γεννούν ένα άλλο ζευγάρι και αρχίζουν την αναπαραγωγή το δεύτερο μήνα μετά τη γέννησή τους.»

Ο Φιμπονάτσι δείχνει ότι το πρόβλημα αυτό οδηγεί στη γένεση της ακολουθίας 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, . που ονομάστηκε ακολουθία (αριθμοί) του Φιμπονάτσι από τον Φ.Ε.Α. Λούκας (Frannois Edouard Anatole Lucas, 1848-1891) και σχηματίζεται σύμφωνα με τον κανόνα: .$u_0 = 1, u_1 = 1, u_\nu = u_{\nu-1} + u_{\nu-2}$

Η σχέση της ακολουθίας αυτής με το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο είναι ότι το όριο του λόγου του επόμενου προς τον προηγούμενο όρο της ακολουθίας ισούται με την τιμή του μέσου και άκρου λόγου, δηλαδή με τη ρίζα της εξίσωσης $x^2 + αx = α^2$, και είναι άρρητος αριθμός. Δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι ο Φιμπονάτσι γνώριζε τη σχέση αυτή, η οποία απαντάται αργότερα σε μαθηματικούς του 16ου-17ου αι. (Κέπλερ, Ζιράρ, Σίμπσον). Η γενική μορφή του ν-οστού όρου της ακολουθίας Φιμπονάτσι

$$u_ν = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{ν+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{ν+1}\right]$$

δημοσιεύτηκε το 1843 από τον Ζ. Μπινέ.

Το 13ο αι. ο μεταφραστής και σχολιαστής του Ευκλείδη Καμπανός της Νοβάρα προσθέτει στο Βιβλίο XIII των «Στοιχείων» (1482) μία πρόταση που περιέχει μια αριθμητική απόδειξη της ασυμμετρίας ενός ευθύγραμμου τμήματος και των δύο μερών του που λαμβάνονται από τη διαίρεσή του σε μέσο και άκρο λόγο.

Το 15ο-16ο αι. αναζωογονείται το ενδιαφέρον προς τη διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο σε σχέση με τις εφαρμογές της στην Γεωμετρία και την αρχιτεκτονική. Στο πλαίσιο αυτό εισάγεται ο όρος «χρυσή τομή» από τον Λεονάρντο ντα Βίντσι. Το 1509 εκδίδεται «Η θεϊκή αναλογία» (Divina proportione) του Λουκά Πατσόλι (L. Pacioli, 1445-περ. 1514), που αν και είναι ειδικά αφιερωμένη στο πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο, η μαθηματική διαπραγμάτευση του θέματος είναι μάλλον αδύνατη.

207

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο

Πυθαγόρειο

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A}=1^{L}$$

Θεώρημα διαμέσων

1^o $\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\dfrac{\alpha^2}{2}$

2^o $\beta^2-\gamma^2=2\alpha\cdot M\Delta$

Γενίκευση Πυθαγορείου

$\hat{A}<1^{L} \Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\cdot A\Delta$

$\hat{A}>1^{L} \Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta\cdot A\Delta$

Υπολογισμός των διαμέσων τριγώνων

Προσδιορισμός του είδους τριγώνου ως προς τις γωνίες

Νόμος συνημιτόνων

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot \text{συν}A$$

Υπολογισμός των υψών

$$\upsilon_\alpha=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

Μετρικές σχέσεις σε κύκλο

► **Θεώρημα τεμνουσών:** $PA\cdot PB=P\Gamma\cdot P\Delta$

► **Ειδική περίπτωση εφαπτομένης:** $PE^2=PA\cdot PB$

► **Δύναμη σημείου ως προς κύκλο:** $\Delta^P_{(O,P)}=OP^2-R^2$

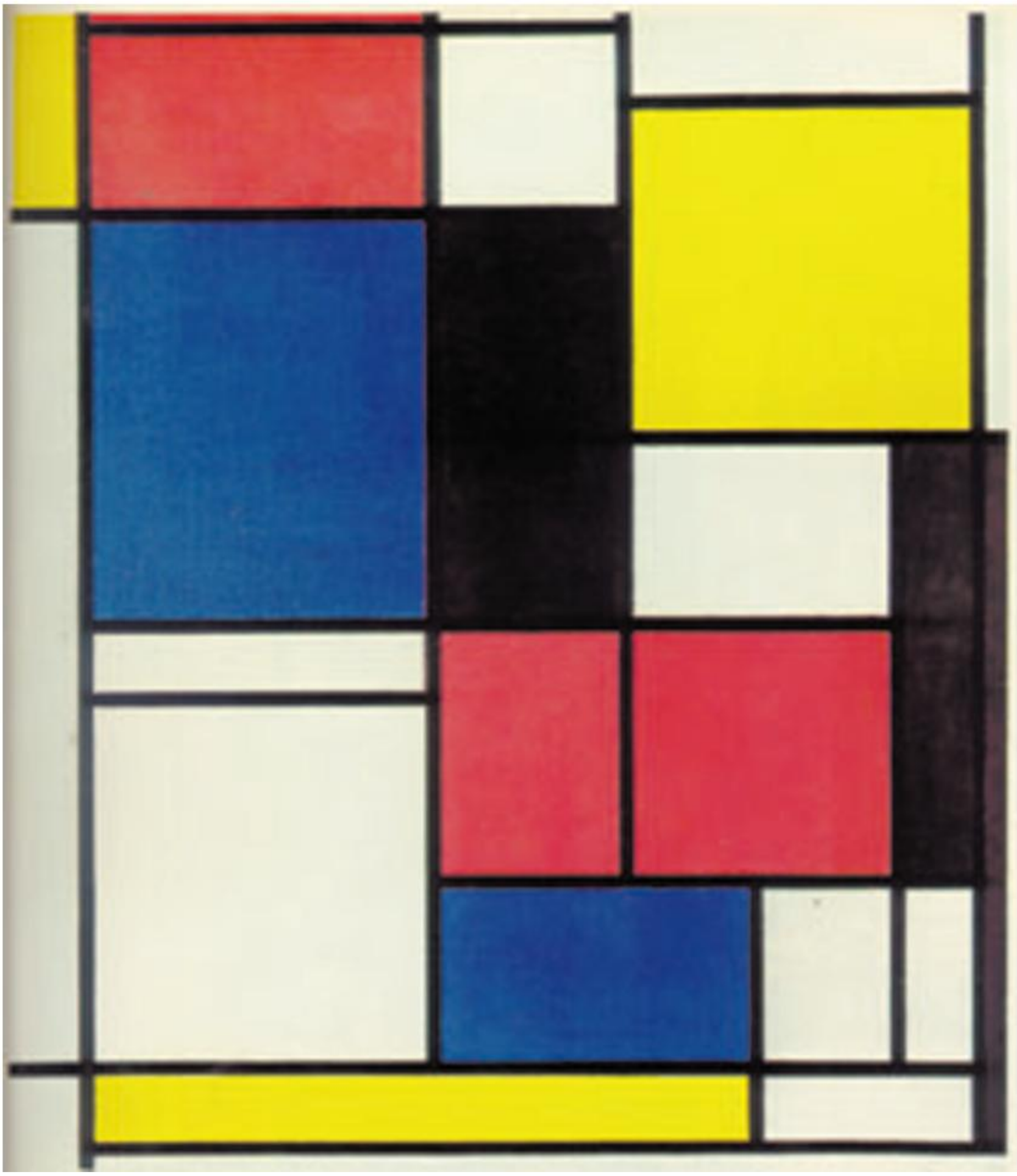
- Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,R), αν και μόνο αν $\Delta^P_{(O,P)}>0$.
- Το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (O,R), αν και μόνο αν $\Delta^P_{(O,P)}<0$.
- Το P είναι σημείο του κύκλου (O,R), αν και μόνο αν $\Delta^P_{(O,P)}=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Εμβαδά

Είναι αποδεκτό ότι η έννοια του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος προέκυψε από την ανάγκη αντιμετώπισης προβλημάτων της καθημερινής ζωής, αρκετά χρόνια πριν. Πράγματι είναι ιστορικά επιβεβαιωμένο ότι η Γεωμετρία εμφανίστηκε, τουλάχιστον τρεις χιλιετίες π.Χ., ως τέχνη υπολογισμού μηκών, εμβαδών και όγκων στους λαούς που κατοικούσαν κοντά στους ποταμούς Νείλο, Τίγρη και Ευφράτη. Στην Αίγυπτο μάλιστα ήταν τέχνη για μέτρηση γης. Αργότερα η έννοια του εμβαδού θεμελιώθηκε αυστηρά και γενικεύθηκε σε σύνολα πιο πολύπλοκα από τα ευθύγραμμα σχήματα.

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με την έννοια του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος. Αρχικά εισάγουμε την έννοια του εμβαδού ενός πολυγωνικού χωρίου ή μιας πολυγωνικής επιφάνειας. Κατόπιν, δίνουμε τύπους υπολογισμού του εμβαδού του τετραγώνου, του ορθογωνίου, του παραλληλογράμμου, του τριγώνου και του τραπεζίου. Στη συνέχεια, δίνουμε τη σχέση των εμβαδών δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων και τέλος αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα του τετραγωνισμού ενός πολυγώνου.

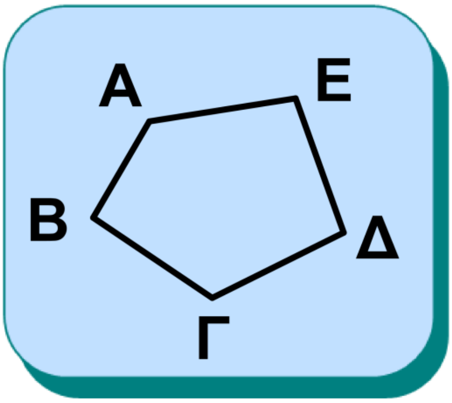


Piet Mondrian (Ολλανδός, 1872 - 1944), Πίνακας II, λάδι σε καμβά, 1921 - 1925 Συλλογή Max Bill, Ζυρίχη.

Πολυγωνικά χωρία . Πολυγωνικές επιφάνειες

10.1 Πολυγωνικά χωρία

Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, για παράδειγμα ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 1). Το πολύγωνο μαζί με τα εσωτερικά του σημεία

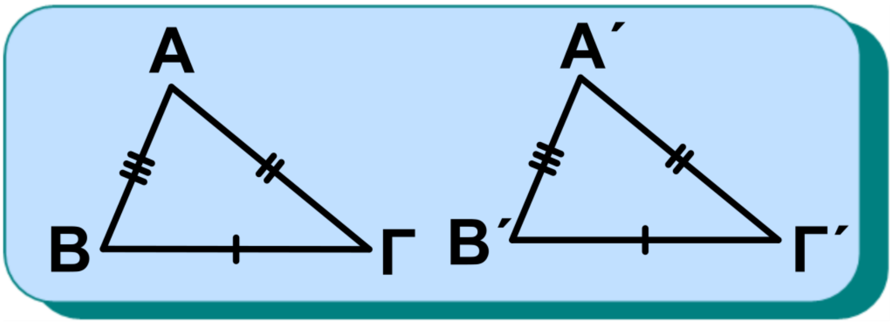


Σχήμα 1

αποτελούν ένα χωρίο, που λέγεται πολυγωνικό χωρίο που ορίζεται από το ΑΒΓΔΕ.

Ένα πολυγωνικό χωρίο που ορίζεται από τρίγωνο, τετράπλευρο, ... , ν-γωνο λέγεται αντίστοιχα τριγωνικό, τετραπλευρικό, ... , ν-γωνικό.

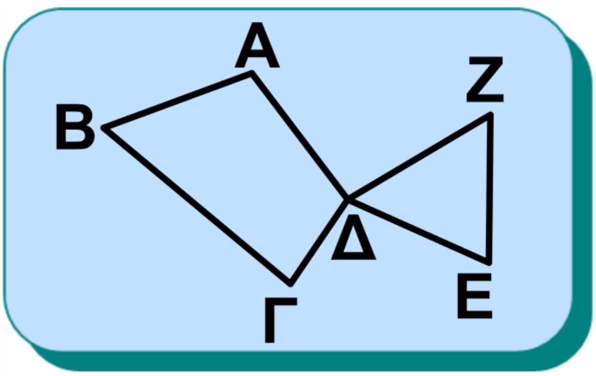
Σχήμα 2



Επίσης, δύο πολυγωνικά χωρία λέγονται ίσα όταν τα αντίστοιχα πολύγωνα είναι ίσα (σχ.2).

Τέλος ένα σχήμα που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος πολυγωνικών χωρίων, που ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγεται πολυγωνική επιφάνεια.

Για παράδειγμα, το σχήμα ΑΒΓΔΕΖ (σχ.3) είναι μια πολυγωνική επιφάνεια.

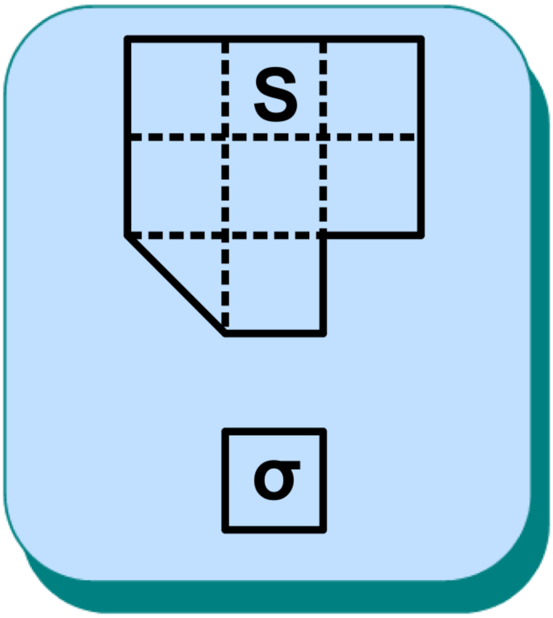


Σχήμα 3

10.2 Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα

Στο 7ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στη μέτρηση των ευθύγραμμων τμημάτων. Εδώ θα ασχοληθούμε με τη μέτρηση πολυγωνικών χωρίων και επιφανειών.

Έστω, λοιπόν ένα πολυγωνικό χωρίο S (σχ.4). Όπως και στα ευθύγραμμα τμήματα, μέτρηση του χωρίου S λέμε τη σύγκρισή του με ένα άλλο επίπεδο χωρίο σ, το οποίο



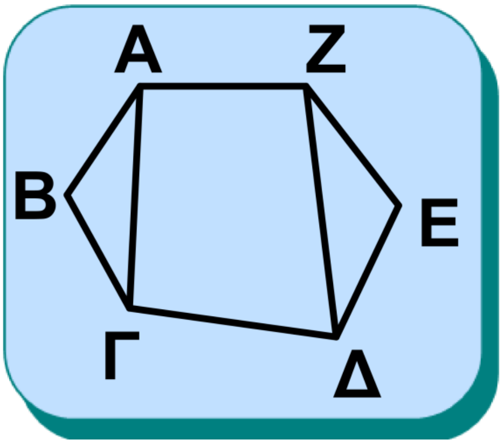
Σχήμα 4

επιλέγουμε ως μονάδα. Η σύγκριση αυτή οδηγεί σε μια σχέση της μορφής: $S = \lambda \cdot \sigma$, όπου λ θετικός αριθμός. (Στην περίπτωση του σχ. 4 είναι λ = 7,5). Ο θετικός αριθμός λ λέγεται εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου S και συμβολίζεται με (S). Πολλές φορές το εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου ή μιας πολυγωνικής επιφάνειας θα το συμβολίζουμε απλά με το γράμμα Ε. Επίσης, στα επόμενα, θα λέμε εμβαδόν τριγώνου, τετραπλεύρου και γενικά πολυγώνου και θα εννοούμε το εμβαδόν του αντίστοιχου πολυγωνικού χωρίου.

Για το εμβαδόν δεχόμαστε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες (αξιώματα):

- **Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.**

● Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά



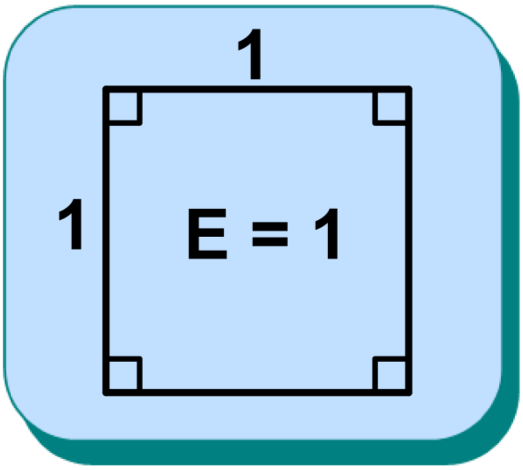
Σχήμα 5

χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων. Για παράδειγμα, για το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ΑΒΓΔΕΖ του (σχ. 5) έχουμε:

(ΑΒΓΔΕΖ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔΖ) + (ΖΔΕ)

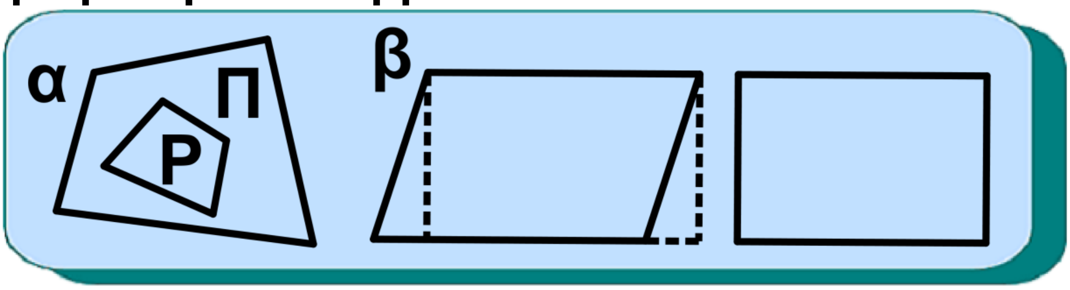
Επίσης δεχόμαστε ότι:

● Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 είναι 1.



Από τα παραπάνω αξιώματα προκύπτει ότι:

● Αν ένα πολύγωνο Ρ περιέχεται στο εσωτερικό ενός άλλου πολυγώνου Π (σχ.6α), τότε το εμβαδόν του Ρ είναι μικρότερο του εμβαδού του Π.

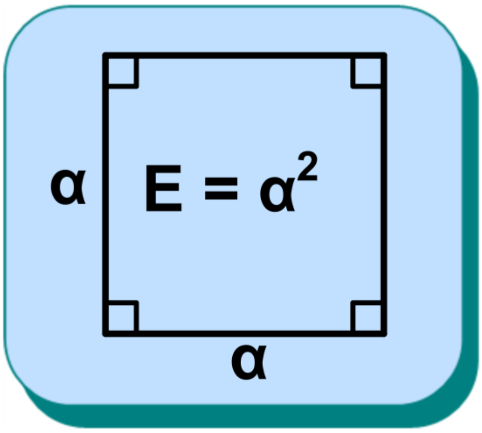


Σχήμα 6

Είδαμε παραπάνω ότι αν δύο πολυγωνικά χωρία είναι ίσα, τότε έχουν ίσα εμβαδά. Το αντίστροφο είναι φανερό (σχ. 6β) ότι δεν ισχύει.
Δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται **ισοδύναμα** ή **ισεμβαδικά**.
Έτσι σχήματα που δεν είναι ίσα μπορούν να συγκρίνονται ως προς το εμβαδόν τους.
Με τη βοήθεια των παραπάνω ιδιοτήτων του εμβαδού μπορεί να αποδειχθεί το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

Το εμβαδόν Ε ενός τετραγώνου πλευράς α είναι $α^2$, δηλαδή: $Ε = α^2$.



10.3 Εμβαδόν βασικών ευθυγράμμων σχημάτων

Με βάση το εμβαδόν του τετραγώνου θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Ι

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

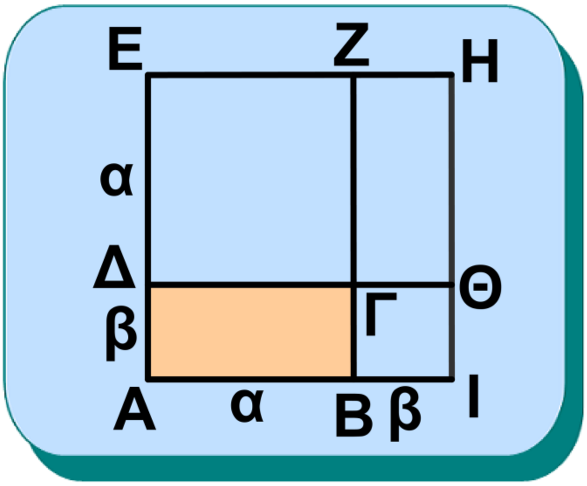
Δηλαδή αν α, β, οι πλευρές και Ε το εμβαδόν είναι:

$$Ε = α \cdot β$$

Απόδειξη

Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με
ΑΒ = α και ΑΔ = β (σχ.7).

Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα
ΔΕ = α, την ΑΒ κατά ΒΙ = β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ,



Σχήμα 7

το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά α+β και επομένως είναι:

$$(ΑΙΗΕ) = (α + β)^2 \ (1).$$

Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ. Έτσι έχουμε

$$(ΔΓΖΕ)=α^2, (ΒΙΘΓ) = β^2 \text{ και } (ΓΘΗΖ) = (ΑΒΓΔ) \ (2)$$

Είναι φανερό όμως ότι

$$(ΑΙΗΕ) = (ΑΒΓΔ) + (ΓΘΗΖ) + (ΒΙΘΓ) + (ΔΓΖΕ),$$

από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(α + β)^2 = 2(ΑΒΓΔ) + α^2 + β^2.$$

Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στησχέση $(ΑΒΓΔ) = α \cdot β$.

Θεώρημα ΙΙ

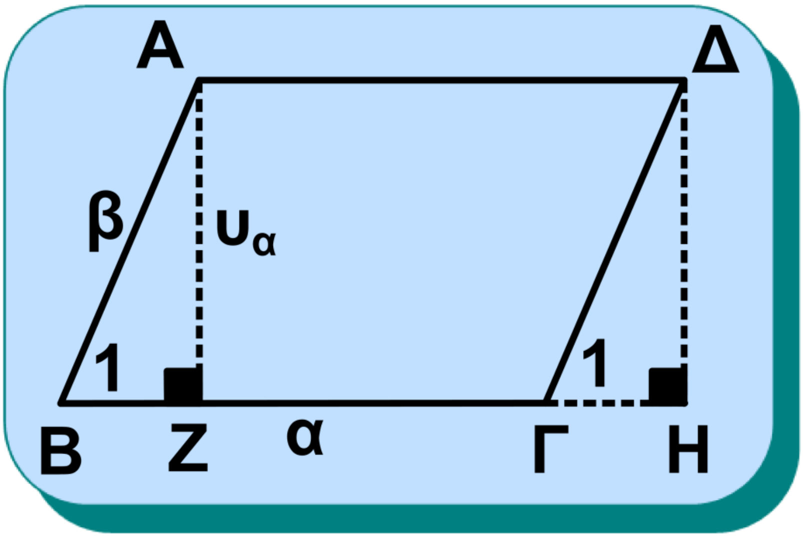
Το εμβαδόν Ε ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.

Δηλαδή , $Ε = αυ_α = βυ_β$

όπου α, β οι πλευρές και $υ_α$, $υ_β$ τα αντίστοιχα ύψη.

Απόδειξη

Σχήμα 8



Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ.8) και ας φέρουμε το ύψος ΑΖ που αντιστοιχεί στη ΒΓ.
Θα αποδείξουμε ότι (ΑΒΓΔ)=ΒΓ$\cdot$ΑΖ.
Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Τότε τα τρίγωνα ΖΒΑ και ΗΓΔ είναι ίσα ($\hat{Z}=\hat{H}=90^\circ$, ΑΒ = ΔΓ και $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1$), οπότε: (ΖΒΑ) = (ΗΓΔ) (1).
Από το σχήμα όμως έχουμε ότι

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΖ) + (ΑΖΓΔ),$$

οπότε σύμφωνα με την (1) προκύπτει ότι

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΖΓΔ) + (ΔΓΗ) = (ΑΖΗΔ).$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Ι έχουμε

$$(ΑΒΓΔ)=(ΑΖΗΔ)=ΑΔ\cdot ΑΖ=ΒΓ\cdot ΑΖ$$

που είναι το ζητούμενο.
Με τη βοήθεια του εμβαδού του παραλληλογράμμου θα υπολογίσουμε τον τύπο του εμβαδού τριγώνου.

Θεώρημα ΙΙΙ

Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

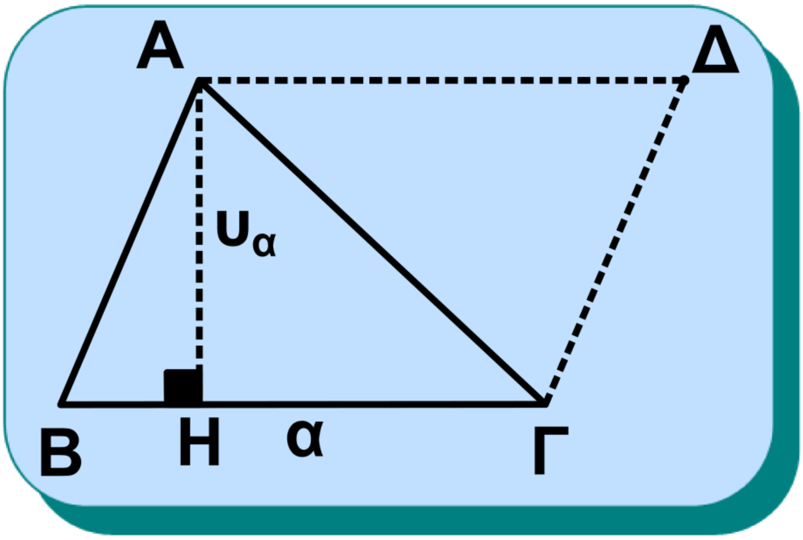
Δηλαδή . $E=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha=\frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon_\beta=\frac{1}{2}\gamma\cdot\upsilon_\gamma$

Απόδειξη

Με πλευρές ΑΒ και ΒΓ (σχ.9) σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το εμβαδόν του οποίου είναι

$$(ΑΒΓΔ) = α \cdot υ_α \ (1).$$

Σχήμα 9



Όμως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ίσα, οπότε:

$$(ΑΒΓ) = (ΑΔΓ) \ (2).$$

Από το σχήμα έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ)+ (ΑΓΔ) η οποία, σύμφωνα με τις (1) και (2), μετατρέπεται στην

$$α \cdot υ_α = 2(ΑΒΓ) \text{ ή } (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} α \cdot υ_α \ 1$$

Τέλος, τον τύπο του εμβαδού τριγώνου θα τον αξιοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου.

Θεώρημα IV

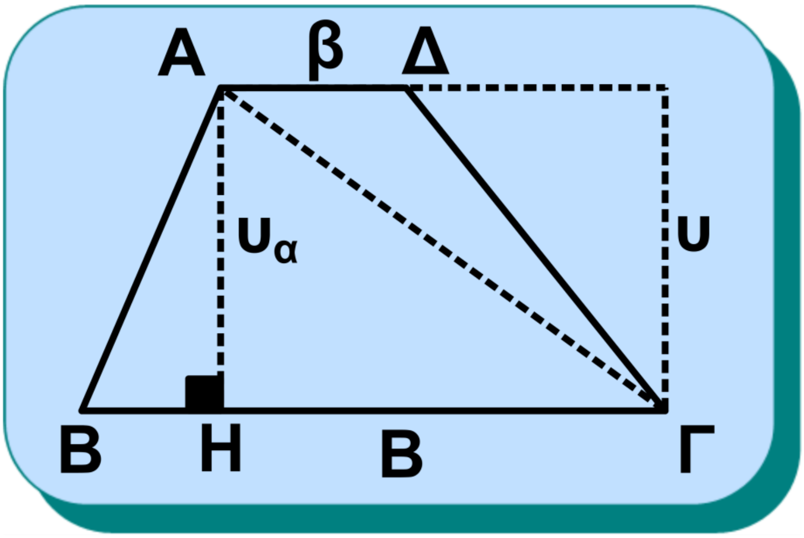
Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Δηλαδή $$E = \frac{(B+β)}{2} \cdot υ ,$$

όπου Β, β οι βάσεις του τραπεζίου και υ το ύψος του.

Απόδειξη

Σχήμα 10



Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) (σχ.10), με βάσεις ΒΓ = Β, ΑΔ = β και ύψος υ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τότε έχουμε

$$E = (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) \quad (1).$$

Αλλά τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις Β, β αντίστοιχα και επομένως:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}Β \cdot υ \text{ και } (ΑΓΔ) = \frac{1}{2}β \cdot υ \quad (2)$$

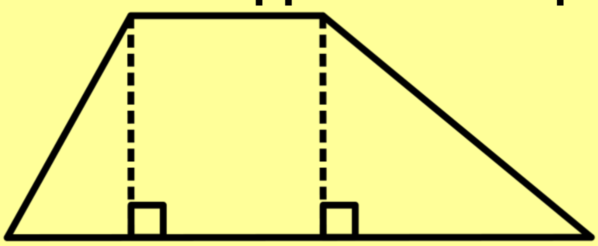
Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι $E = \frac{B+β}{2} \cdot υ$, δηλαδή το ζητούμενο.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

Δραστηριότητα

Χωρίζοντας το τραπέζιο σε δύο ορθογώνια τρίγωνα και ένα ορθογώνιο (βλ. το παρακάτω σχήμα), να αποδείξετε τον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου.



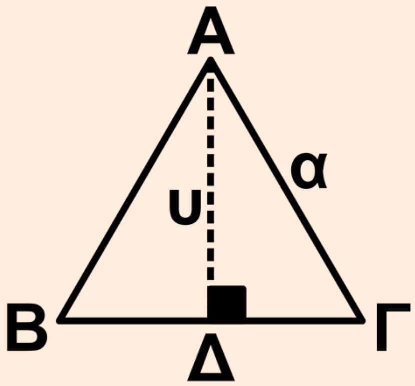
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Το εμβαδόν Ε ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α είναι ίσο με

$$E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

Απόδειξη

Φέρουμε το ύψος ΑΔ (σχ. 11) το οποίο είναι και διάμεσος.



Σχήμα 11

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε

$$\upsilon^2 = A\Delta^2 = \alpha^2 - \Delta\Gamma^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$$

δηλαδή $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$**, οπότε**

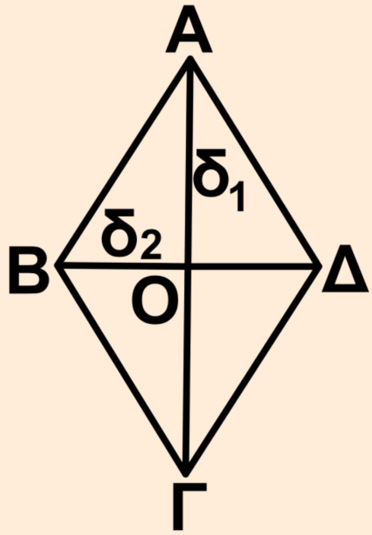
$$E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon = \frac{1}{2}\alpha\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Το εμβαδόν ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

Απόδειξη

Είναι φανερό (σχ.12) ότι



Σχήμα 12

$$(AB\Gamma\Delta) = (AB\Delta) + (B\Gamma\Delta) \quad (1).$$

Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες και διχοτομούνται έχουμε:

$$(AB\Delta) = \frac{1}{2}B\Delta \cdot AO = \frac{1}{2}\delta_2 \cdot \frac{\delta_1}{2} = \frac{1}{4}\delta_1 \cdot \delta_2$$

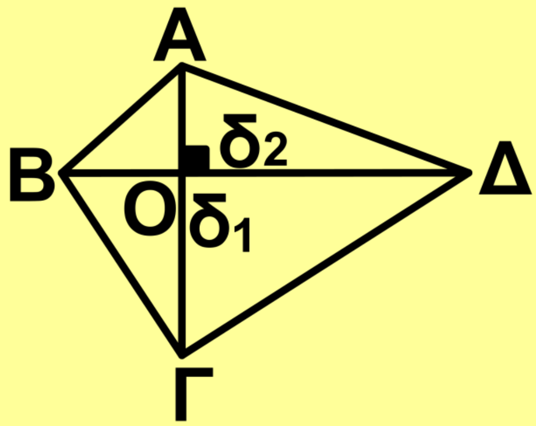
και $(B\Gamma\Delta) = \frac{1}{4}\delta_1 \cdot \delta_2$ (2).

Με αντικατάσταση των (2) στην (1) προκύπτει ότι $E = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2$ (3).

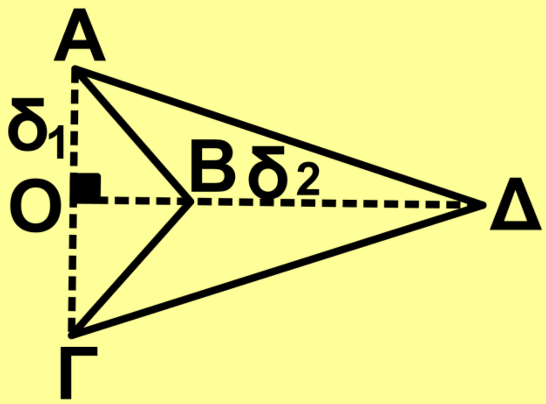
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο προηγούμενος τύπος (3) ισχύει και στην περίπτωση οποιουδήποτε κυρτού ή μη κυρτού, τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους.

Πράγματι (σχ. 13, 14)



Σχήμα 13



Σχήμα 14

$(AB\Gamma\Delta) = (AB\Delta) + (B\Gamma\Delta) =$

$$= \frac{1}{2}B\Delta \cdot AO + \frac{1}{2}B\Delta \cdot O\Gamma =$$

$$= \frac{1}{2}B\Delta \cdot (AO + O\Gamma) = \frac{1}{2}B\Delta \cdot A\Gamma$$

Μια γενίκευση του τύπου (3), για την περίπτωση του τετραπλεύρου αποτελεί η άσκηση 7 των αποδεικτικών ασκήσεων.

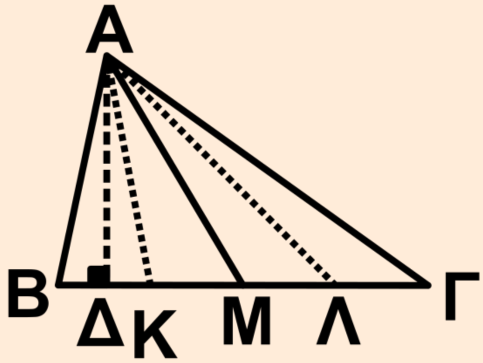
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ.

i) Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου να αποδείξετε ότι

(ΑΒΜ) = (ΑΜΓ).

ii) Από την κορυφή Α να φέρετε τρεις ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε



Σχήμα 15

τέσσερα ισοδύναμα τρίγωνα.

Λύση

i) Φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 15). Το ΑΔ είναι και ύψος στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ, οπότε έχουμε

$(ΑΒΜ) = \frac{1}{2}ΒΜ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2}ΜΓ \cdot ΑΔ = (ΑΜΓ)$ **αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ.**

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι οι ζητούμενες ευθείες είναι οι φορείς των διαμέσων ΑΜ, ΑΚ και ΑΛ των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΜ και ΑΜΓ αντίστοιχα.

Δραστηριότητα

Να χωρίσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα με ευθείες από την κορυφή Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να γράψετε τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού:

i) τετραγώνου

ii) ορθογωνίου

iii) παραλληλογράμμου

iv) τριγώνου
v) τραπεζίου
2. Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 16. Πόσο είναι το εμβαδόν του;
3. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις α=9, β=4 και είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς x. Να βρεθεί το x.
4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α < β. Με ποια ανισοτική σχέση συνδέονται τα $υ_α$ και $υ_β$;
5. Αν ένας ρόμβος έχει μήκη διαγωνίων 4 και 5 αντίστοιχα, με τι ισούται το γινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος;
6. Ένας χωρικός αντάλλαξε έναν αγρό, που είχε σχήμα τετραγώνου πλευράς 60 m, με έναν άλλο αγρό (με την ίδια ποιότητα χώματος) που είχε σχήμα ορθογωνίου με πλάτος 40 m και περίμετρο ίση με την περίμετρο του πρώτου. Έχασε ή κέρδισε ο χωρικός από την ανταλλαγή αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α = 4 κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΖ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν των ΑΒΓΔ, ΑΔΖ, ΑΒΖ και ΒΖΓ.
2. Αν Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΔ = 10 τετραγώνου ΑΒΓΔ, τότε το άθροισμα (ΑΜΒ) + (ΔΜΓ) είναι :
Α:25 Β:40 Γ:50 Δ:75 Ε:100
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.
3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6, ΑΓ = 8 και $\hat{A}$ =60°.
Να βρεθούν: i) το ύψος $υ_β$,
ii) το εμβαδόν (ΑΒΓ), iii) το ύψος $υ_α$.
4. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 14 και διαγώνιο 5. Να βρείτε το εμβαδόν του.

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ = 10 και αντίστοιχο προς αυτήν ύψος υ = 5. Πάνω στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΖΓ.
i) Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.
ii) Αφού πρώτα συγκρίνετε τα εμβαδά των τραπεζίων ΑΕΖΒ και ΕΖΓΔ να βρείτε το εμβαδόν καθενός από αυτά.

6. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με $\hat{A} = \hat{B} = 1$∟, ΑΔ = 15m, ΒΓ = 20m και ΑΒ = 12m. Ένας καινούργιος δρόμος περνάει παράλληλα προς τη ΔΓ και αποκόπτει μια λωρίδα πλάτους 3m. Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι το οικόπεδο που απομένει;

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν Σ είναι σημείο μιας πλευράς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι (ΣΑΓ) + (ΣΒΔ) = (ΑΒΓ).

2. Αν οι διάμεσοι ΑΔ και ΒΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Θ να αποδείξετε ότι:
i) (ΑΒΕ) = (ΒΕΓ), ii) (ΑΘΒ) = (ΔΓΕΘ)
και iii) (ΒΘΔ) = (ΑΘΕ).

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το βαρύκεντρό του Θ. Από σημείο Σ της διαμέσου ΑΔ φέρουμε τις κάθετες ΣΕ, ΣΖ στις ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι
i) (ΑΒΣ) = (ΑΓΣ),
ii) ΑΒ·ΣΖ=ΑΓ·ΣΕ και
iii) (ΑΒΘ) = (ΒΘΓ) = $\frac{1}{3}$(ΑΒΓ).

4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ). Αν Μ το μέσο της πλευράς του ΑΒ, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) = 2(ΜΓΔ).

5. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο της μίας από τις μη παράλληλες πλευρές του επί την απόσταση του μέσου της άλλης από αυτή.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1, ΑΓ = 2 και $\hat{A}$ =120°. Με πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ τα τετράγωνα ΑΒΔΓ και ΑΓΖΘ αντίστοιχα. Τότε:
i) να υπολογίσετε το τμήμα ΕΘ,
ii) να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Θ είναι συνευθειακά και
iii) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της πολυγωνικής επιφάνειας ΒΓΖΘΕΔ είναι $5+\sqrt{3}$.

7. Αν ω είναι η γωνία των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι

(ΑΒΓΔ) = $\frac{1}{2}ΑΓ \cdot ΒΔ \cdot ημω$

8. Ο ιδιοκτήτης ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, του οποίου το μήκος είναι κατά 18 m μεγαλύτερο του πλάτους, θέλει να σχηματίσει γύρω από το οικόπεδο και εξωτερικά αυτού μια δενδροστοιχία πλάτους 2,5 m. Έτσι αναγκάζεται να αγοράσει από τους γείτονές του 695 m^2. Να βρεθούν οι διαστάσεις του οικοπέδου.

Σύνθετα θέματα

1. Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των ημιευθειών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ζ, Η, Θ και Ι, ώστε ΒΖ = ΑΒ, ΓΗ = ΒΓ, ΔΘ = ΓΔ και ΑΙ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι
i) (ΙΘΑ) = (ΑΘΔ) = (ΑΓΔ),
ii) (ΙΘΔ) + (ΖΗΒ) = 2(ΑΒΓΔ) και
iii) (ΙΖΗΘ) = 5(ΑΒΓΔ).

2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ, το μέσο Ν του ΓΜ και το μέσο Ρ του ΒΝ. Να αποδείξετε ότι (ΜΝΡ) = $\frac{1}{8}$(ΑΒΓ).

3. Στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α παίρνουμε τα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε

ΖΓ = ΗΔ = $\frac{α}{4}$

i) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΖ και ΒΗ τέμνονται κάθετα σε σημείο Κ.

ii) Να υπολογισθούν τα μήκη των τμημάτων: ΑΚ, ΑΗ και ΚΗ.

iii) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΚΗΔ.

4. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ο στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι

i) (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΑΒΓ) και ii) (ΟΑΓ) + (ΟΒΓ) = (ΟΓΔ).

5. Αν ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ είναι ρόμβος πλευράς α και τετράγωνο πλευράς α αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) ≤ (ΚΛΜΝ).

10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Με τη βοήθεια του βασικού τύπου για το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ, με μήκη πλευρών α, β, γ, προκύπτουν και οι επόμενοι τύποι:

(i) $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ **(τύπος του Ήρωνα), όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.**

(ii) $E=\tau\rho$**, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.**

(iii) $E=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$**, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.**

Απόδειξη

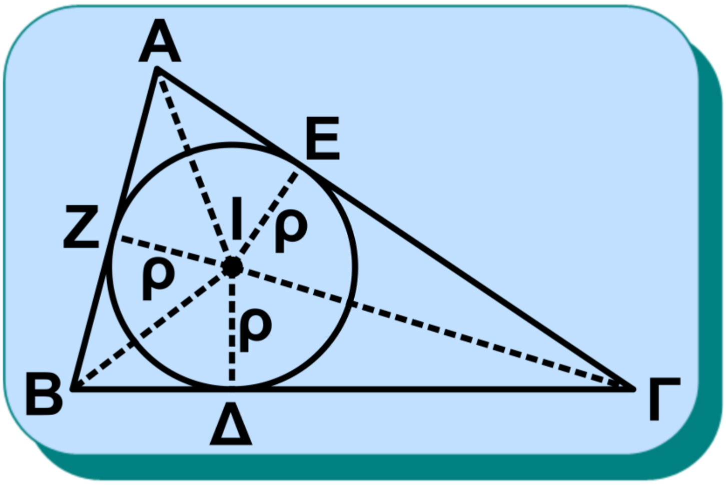
(i) Στην § 9.4 (Εφαρμογή 2) αποδείξαμε ότι $\upsilon_\alpha=\dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$**, οπότε έχουμε:** $E=\dfrac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha=$

$$=\frac{1}{2}\alpha\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}=$$

$$=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

(ii) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 16) και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (Ι, ρ).

Σχήμα 16



Φέρουμε τα τμήματα ΙΑ, ΙΒ και ΙΓ και έτσι το τρίγωνο χωρίζεται στα τρίγωνα ΙΒΓ, ΙΓΑ και ΙΑΒ που έχουν το

ίδιο ύψος ρ και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε έχουμε:

$$E=(AB\Gamma) = (IB\Gamma) + (I\Gamma A) + (IAB) =$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\rho+\frac{1}{2}\beta\rho+\frac{1}{2}\gamma\rho=$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\rho=\frac{1}{2}2\tau\rho=\tau\rho.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Όμοια αποδεικνύεται ότι ο τύπος (2) ισχύει για οποιοδήποτε περιγεγραμμένο σε κύκλο πολύγωνο με ημιπερίμετρο τ.

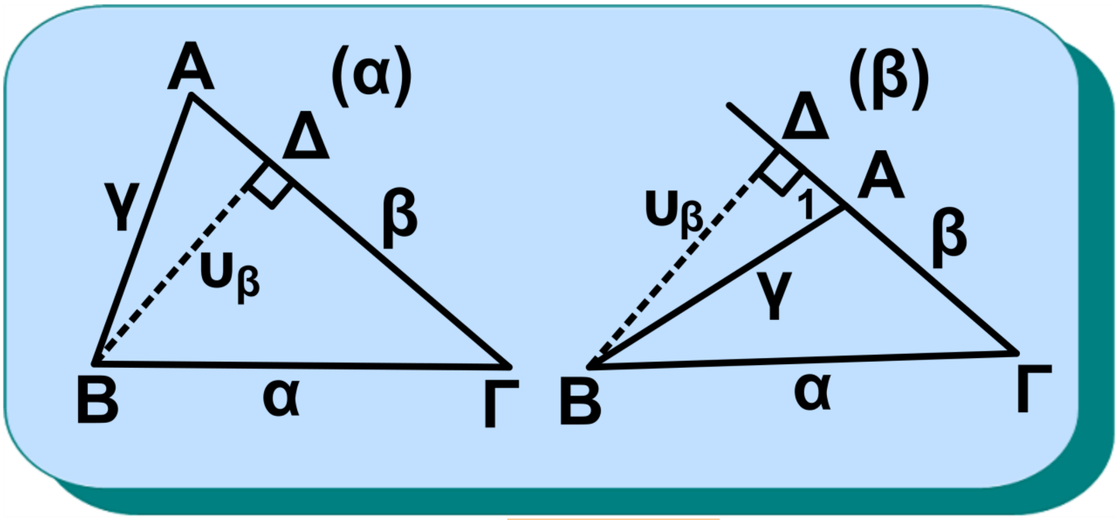
(iii) Είναι γνωστό ότι $\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha$ (Εφαρμογή 5 §8.2), οπότε έχουμε ότι $\upsilon_\alpha=\frac{\beta\gamma}{2R}$ και με αντικατάσταση στον τύπο $E=\frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ προκύπτει το ζητούμενο.

Τέλος, το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται και από τον (τριγωνομετρικό) τύπο:

$$E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=\frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$$

Απόδειξη
Αν $\hat{A} < 1^{\llcorner}$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ (σχ.17α) προκύπτει ότι $\upsilon_\beta=\gamma\cdot\eta\mu A$.

Σχήμα 17



Αν $\hat{A}$ >1 ∟, πάλι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ(σχ. 17β) προκύπτει ότι:

$υ_β = γ \cdot ημA_{εξ} = γ \cdot ημ(180^o - A) == γ \cdot ημA$

Έτσι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $υ_β = γ \cdot ημA$ οπότε

$$E = \frac{1}{2}βυ_β = \frac{1}{2}βγ \cdot ημA.$$

Όταν $\hat{A}$ = 1 ∟, τότε υβ = γ, επομένως πάλι ο τύπος ισχύει.

Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η Νόμος των ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι: $\frac{α}{ημA} = \frac{β}{ημB} = \frac{γ}{ημΓ} = 2R$

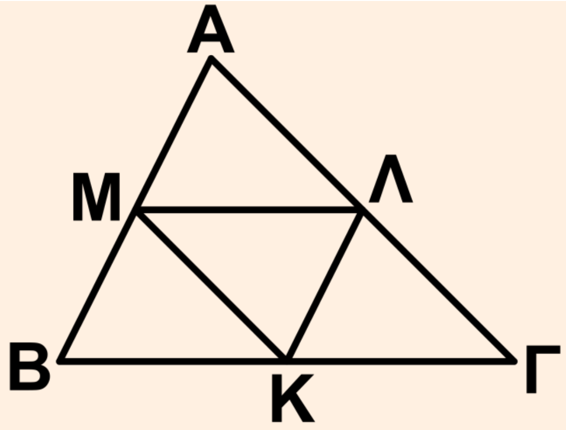
Απόδειξη

Από τις ισότητες $E = \frac{1}{2}βγημA$ και $E = \frac{αβγ}{4R}$ προκύπτει ότι $\frac{1}{2}βγημA = \frac{αβγ}{4R}$ ή $ημA = \frac{α}{2R}$ ή $\frac{α}{ημA} = 2R$. Όμοια προκύπτει $\frac{β}{ημB} = 2R$, $\frac{γ}{ημΓ} = 2R$, από τις οποίες συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α = 13,
β = 14 και γ = 15 (σχ.18).
Να υπολογίσετε:
(i) το εμβαδόν του,

(ii) τα ύψη του,
(iii) τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου,



Σχήμα 18

(iv) το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ.

Λύση

(i) Έχουμε $\tau = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 21$ οπότε με αντικατάσταση των δεδομένων στον τύπο του Ήρωνα παίρνουμε:

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$$

(ii) Έχουμε $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ ή $84 = \frac{1}{2}13\upsilon_\alpha$

ή $\upsilon_\alpha = \frac{168}{13}$. Όμοια βρίσκουμε ότι

$\upsilon_\beta = 12$ και $\upsilon_\gamma = \frac{56}{5}$.

(iii) Από τους τύπους $E = \tau \cdot \rho$ και $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ προκύπτουν αντίστοιχα ότι ρ = 4 και $R = \frac{65}{8}$

(iv) Έχουμε $M\Lambda = \frac{13}{2}$, $MK = 7$ και $K\Lambda = \frac{15}{2}$, οπότε από τον τύπο του Ήρωνα προκύπτει πάλι ότι (ΚΛΜ) = 21.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Με τη βοήθεια του τύπου $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ να αποδείξετε ότι $E \leq \frac{1}{2}\beta\gamma$. Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ)=9 και ρ = 1,5.
Ποια είναι η περίμετρός του;

3. Ποιοι είναι οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = 18, ΒΓ = 20 και ΑΓ = 34. Να βρείτε το εμβαδόν του.

2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με ΒΓ = 25, ΑΔ = 11, ΑΒ = 13 και
ΔΓ = 15. Να βρείτε το εμβαδόν του και το ύψος του.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 4, ΑΓ = 7 και $\hat{A} = 60°$. Να βρείτε το εμβαδόν του.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) με ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8. Να βρείτε:

i) το εμβαδόν,

ii) το ύψος υ_α ,

iii) την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου.

Ασκήσεις Αποδεικτικές

1. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha$ να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 1\llcorner$.

2. Αν Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ, να αποδείξετε ότι:

i) $E<\tau(\tau\ .\ \alpha) \Leftrightarrow \hat{A} < 1\llcorner$,

ii) $E = \tau(\tau\ .\ \alpha) \Leftrightarrow \hat{A} = 1\llcorner$,

iii) $E>\tau(\tau\ .\ \alpha) \Leftrightarrow \hat{A} > 1\llcorner$.

3. Αν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο να αποδείξετε ότι $\frac{(ΑΒΓ)}{(Α΄Β΄Γ΄)}=\frac{αβγ}{α΄β΄γ΄}$.

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} \neq 1^{L}$ φέρουμε τα ύψη ΒΖ και ΓΗ. Να αποδείξετε ότι (ΑΖΗ)=(ΑΒΓ)συν^{2}Α.

5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{υ_α}+\frac{1}{υ_β}+\frac{1}{υ_γ}=\frac{1}{ρ}$.

Σύνθετα θέματα

1. i) Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σταθερό σημείο Κ στο εσωτερικό αυτής. Από το Κ φέρουμε μεταβλητή ευθεία ε που τέμνει τις πλευρές Οx, Οy στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\frac{1}{(ΟΚΜ)}+\frac{1}{(ΟΚΝ)}$ είναι σταθερό.

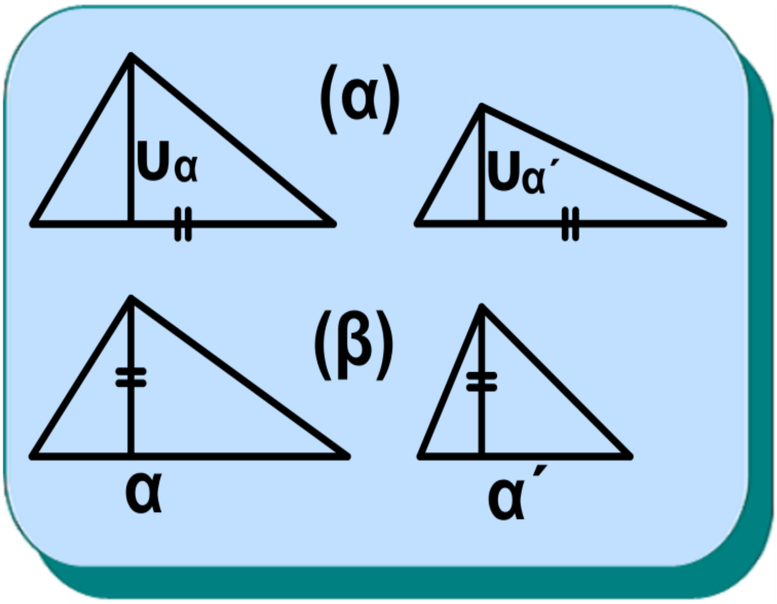
ii) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Κ στο εσωτερικό του και τα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄ που διέρχονται από το Κ. Αν $Ε_1, Ε_2, ..., Ε_6$ είναι αντίστοιχα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΓ΄, ΒΚΓ΄, ΒΑ΄Κ, ΓΚΑ΄, ΓΚΒ΄ και ΑΚΒ΄, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{Ε_1}+\frac{1}{Ε_3}+\frac{1}{Ε_5}=\frac{1}{Ε_2}+\frac{1}{Ε_4}+\frac{1}{Ε_6}$.

2. Αν $ρ_α$, $ρ_β$, $ρ_γ$ είναι οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι
$(ΑΒΓ)=(τ-α)ρ_α=(τ-β)ρ_β=(τ-γ)ρ_γ$.

3. Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγράψιμο σε κύκλο. Αν θέσουμε
ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ και ΔΑ = δ να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΓ}{ΒΔ}=\frac{αδ+βγ}{αβ+γδ}$ (2ο Θεώρημα Πτολεμαίου).

Εμβαδόν και ομοιότητα
10.5 Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων πολυγώνων

Ας θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με εμβαδά Ε και Ε΄ αντίστοιχα. Τότε είναι



Σχήμα 19

$E=\frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ και $E=\frac{1}{2}\alpha'\upsilon_{\alpha'}$, οπότε $\frac{E}{E'}=\frac{\alpha\upsilon_\alpha}{\alpha'\upsilon_{\alpha'}}$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει άμεσα ότι:

- Αν α = α΄, τότε $\frac{E}{E'}=\frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$ (σχ.19α).
- Αν $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$, τότε $\frac{E}{E'}=\frac{\alpha}{\alpha'}$ (σχ.19β).

Δηλαδή: **αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.**

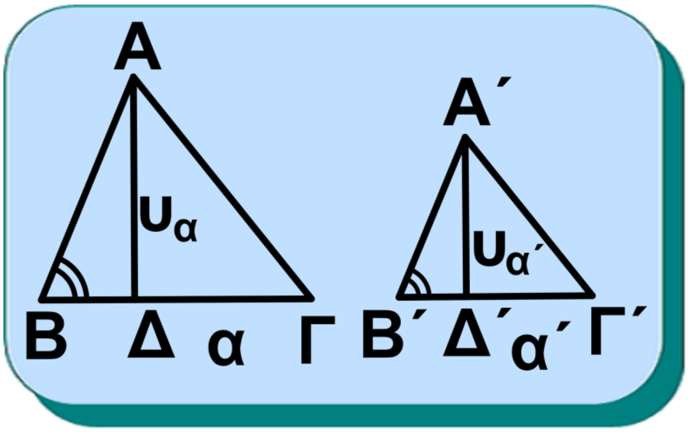
Στην περίπτωση που τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια, ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα I

Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Απόδειξη

Έστω δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 20) με $\hat{A} = \hat{A}'$ και



Σχήμα 20

$\hat{B} = \hat{B}'$.

Τότε $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}} = \lambda$ (1), όπου λ ο λόγος ομοιότητας. Αλλά, όπως και παραπάνω, είναι $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{E}{E'} = \lambda^2$

Το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει γενικότερα και για όμοια πολύγωνα, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

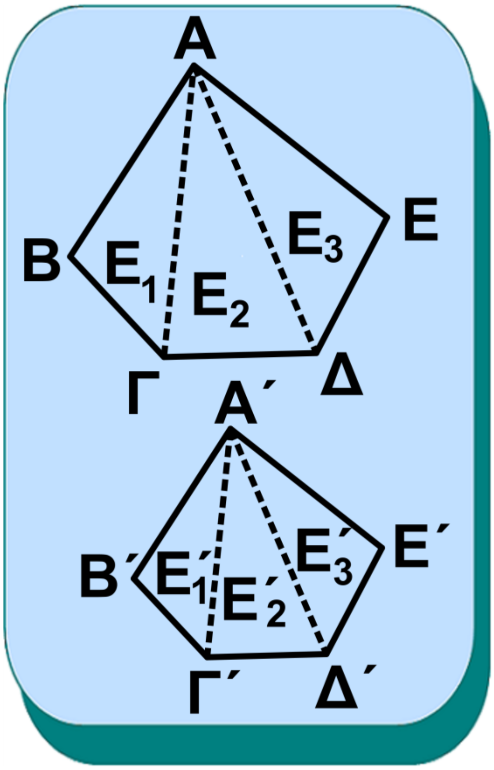
Θεώρημα II

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε δυο όμοια πολύγωνα π.χ. τα πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ (σχ. 21) με λόγο ομοιότητας: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta' E'} = \lambda$ (1).

Φέρουμε τις διαγωνίους των πολυγώνων από τις κορυφές Α και Α΄, οπότε αυτά χωρίζονται σε ισάριθμα τρίγωνα όμοια μεταξύ τους.
Αν $Ε_1$, $Ε_2$, $Ε_3$ και $Ε΄_1$, $Ε΄_2$, $Ε΄_3$ είναι τα εμβαδά των αντίστοιχων τριγώνων,



Σχήμα 21

σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα και τη σχέση (1), θα έχουμε:

$$\frac{Ε_1}{Ε΄_1} = \left(\frac{ΑΒ}{Α΄Β΄}\right)^2 = λ^2,$$

$$\frac{Ε_2}{Ε΄_2} = \left(\frac{ΓΔ}{Γ΄Δ΄}\right)^2 = λ^2 \text{ και}$$

$$\frac{Ε_3}{Ε΄_3} = \left(\frac{ΔΕ}{Δ΄Ε΄}\right)^2 = λ^2, \text{ οπότε:}$$

$$λ^2 = \frac{Ε_1}{Ε΄_1} = \frac{Ε_2}{Ε΄_2} = \frac{Ε_3}{Ε΄_3} =$$

$$= \frac{Ε_1 + Ε_2 + Ε_3}{Ε΄_1 + Ε΄_2 + Ε΄_3} = \frac{(ΑΒΓΔΕ)}{(Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄)}, \text{ δηλαδή το ζητούμενο.}$$

Για το λόγο των εμβαδών τριγώνων με δύο γωνίες ίσες ή παραπληρωματικές ισχύει το επόμενο θεώρημα.

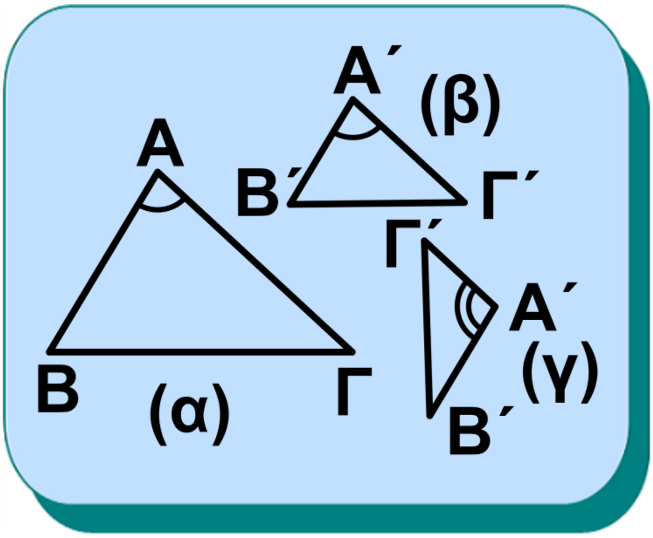
Θεώρημα ΙΙΙ

Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου

τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με $\hat{A}=\hat{A}'$ (σχ.22 α,β) ή $\hat{A}+\hat{A}'=180^\circ$ (σχ.22 α,γ). Τότε και στις



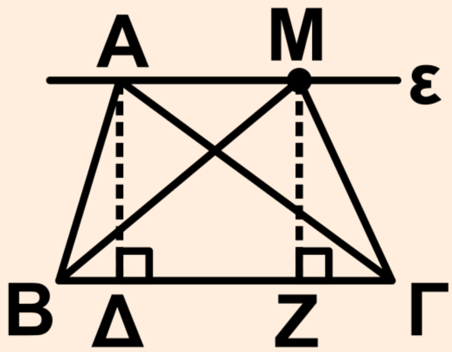
Σχήμα 22

δύο περιπτώσεις θα ισχύει

ημΑ = ημΑ΄, οπότε από τις ισότητες $E=\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma ημA$ και $E=\frac{1}{2}\beta'\cdot\gamma' ημA'$ με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $\frac{E}{E'}=\frac{\beta\cdot\gamma}{\beta'\cdot\gamma'}$, που είναι το ζητούμενο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ.



Σχήμα 23

Αν Μ σημείο της ε, να αποδείξετε ότι (ΜΒΓ) = (ΑΒΓ).

Απόδειξη

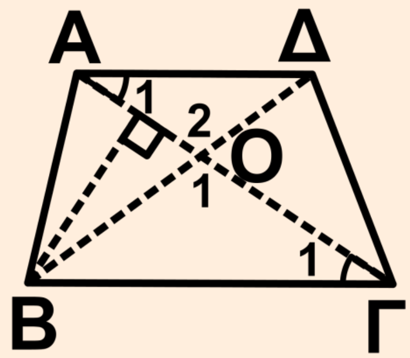
Φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΜΖ των τριγώνων ΑΒΓ και ΜΒΓ αντίστοιχα. Επειδή η ε είναι παράλληλη προς τη ΒΓ, προκύπτει ότι ΑΔ = ΜΖ και επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΜΒΓ είναι ισεμβαδικά, επειδή έχουν κοινή βάση ΒΓ και ίσα ύψη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΒΓ και ΑΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να αποδείξετε ότι: (i) (ΟΑΒ) = (ΟΓΔ),

(ii) $\dfrac{(ΑΟΔ)}{(ΟΒΓ)} = \dfrac{ΑΔ^2}{ΒΓ^2}$ **και**

(iii) $\dfrac{(ΟΑΒ)}{(ΟΒΓ)} = \dfrac{ΑΔ}{ΒΓ}$



Σχήμα 24

Απόδειξη

(i) Είναι (ΟΑΒ) = (ΒΑΔ) - (ΟΑΔ) =
=(ΑΓΔ) - (ΟΑΔ) = (ΟΓΔ).

(ii) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι όμοια ($\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, $\hat{Γ}_1 = \hat{A}_1$) με λόγο ομοιότητας $\dfrac{ΑΔ}{ΒΓ}$ και επομένως

$$\frac{(ΟΑΔ)}{(ΟΒΓ)} = \frac{ΑΔ^2}{ΒΓ^2}$$

(iii) Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒΓ έχουν κοινή κορυφή Β και κοινό το ύψος από αυτήν, επομένως $\dfrac{(ΟΑΒ)}{(ΟΒΓ)} = \dfrac{ΟΑ}{ΟΓ}$. Από την ομοιότητα όμως των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΒΓ έχουμε ότι $\dfrac{ΟΑ}{ΟΓ} = \dfrac{ΑΔ}{ΒΓ}$ οπότε $\dfrac{(ΟΑΒ)}{(ΟΒΓ)} = \dfrac{ΑΔ}{ΒΓ}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $υ_β = υ_{β΄}$ και $\frac{(ΑΒΓ)}{(Α΄Β΄Γ΄)} = \frac{3}{2}$. Τότε ο λόγος $\frac{β}{β΄}$ είναι

Α: $\frac{2}{5}$ Β: $\frac{3}{4}$ Γ: $\frac{3}{2}$ Δ: $\frac{9}{4}$ Ε: $\frac{4}{9}$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. Δυο ρόμβοι ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ έχουν $\hat{Α} = \hat{Α}΄$ και $\frac{ΑΒ}{Α΄Β΄} = \frac{4}{5}$. Να υπολογισθεί ο λόγος $\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α΄Β΄Γ΄Δ΄)}$.

3. Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι ισοδύναμο με ένα τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ που έχει $Α΄Β΄ \cdot Α΄Γ΄ = 36$. Αν είναι $\hat{Α} + \hat{Α}΄ = 2^{L}$, ποιο είναι το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν α = α΄ και $υ_α = \frac{3}{2} υ_{α΄}$. Αν το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι $30m^2$, να βρείτε το εμβαδόν του Α΄Β΄Γ΄.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με εμβαδόν $20m^2$. Αν Μ σημείο στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΒ = 2ΒΜ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΒΓ.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ζ των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΑ αντίστοιχα, προς το Α,

ώστε ΑΔ = $\frac{2}{3}$ΑΒ και ΑΖ = $\frac{1}{2}$ΑΓ. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $30m^2$, να βρείτε το εμβαδόν του ΑΔΖ

4. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν $75m^2$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ και Μ σημείο του ΑΔ τέτοιο, ώστε $\frac{ΑΜ}{ΜΔ}=\frac{3}{2}$. Από το Μ φέρουμε παράλληλο προς την πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΒΕΖΓ.

5. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\hat{Α}=\hat{Α}'$ και $\hat{Β}+\hat{Β}'=2^{L}$. Να αποδείξετε ότι αβ΄ = α΄β.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείο Ρ. Αν οι ΑΡ, ΒΡ και ΓΡ τέμνουν τις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{ΡΔ}{ΑΔ}=\frac{(ΒΡΓ)}{(ΑΒΓ)}$, ii) $\frac{ΡΔ}{ΑΔ}+\frac{ΡΕ}{ΒΕ}+\frac{ΡΖ}{ΓΖ}=1$ και iii) $\frac{ΡΑ}{ΑΔ}+\frac{ΡΒ}{ΒΕ}+\frac{ΡΓ}{ΓΖ}=2$.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β},\hat{Γ}<1^{L}$ και το ύψος του ΑΔ. Στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α) φέρουμε Βx $\perp$ ΒΓ και Γy $\perp$ ΒΓ. Πάνω στις Βx, Γy παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Ζ, ώστε να είναι ΒΕ = ΓΖ = 2ΑΔ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι : (ΕΒΜ)+(ΖΓΝ)=2(ΑΒΓ).

3. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δυο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι (ΒΟΔ) = (ΑΟΓ).

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $(ΑΒΔ)^2$ = (ΑΔΕ)(ΑΒΓ).

5. Πάνω στις πλευρές κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ και ΑΔΛΜ. Να αποδείξετε ότι

$$(ΑΜΖ) + (ΓΗΚ) = (ΒΘΕ) + (ΔΙΛ).$$

6. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1$ └) και τρία πολύγωνα P_1, P_2 και P_3 όμοια μεταξύ τους, που έχουν ως ομόλογες πλευρές τις ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $(P_2)+(P_3)=(P_1)$, όπου (P_1), (P_2) και (P_3) τα εμβαδά τους.

Σύνθετα θέματα

1. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν E_1, E_2, E_3 και E_4 είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_4$.
Αν υποθέσουμε ότι η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι

i) $E_1 = E_3$, (ii) $E_1^2 = E_2 \cdot E_3$,
iii) $E_1 \leq \frac{1}{4}E$, όπου Ε = (ΑΒΓΔ).

2. Από εσωτερικό σημείο Σ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Αν E_1, E_2, E_3 είναι τα εμβαδά των τριών τριγώνων που σχηματίζονται να αποδείξετε ότι

i) καθένα από τα τρίγωνα εμβαδών E_1, E_2, E_3 είναι όμοιο με το ΑΒΓ,
ii) $\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2} + \sqrt{E_3} = \sqrt{E}$, όπου
Ε = (ΑΒΓ).

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι

$$\text{i)}(\Delta EZ)=\frac{2\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}(AB\Gamma)$$

$$\text{ii)}\ (\Delta EZ)\leq\frac{1}{4}(AB\Gamma).$$

4. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Κ,Λ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Από τα Κ, Λ να φέρετε δύο ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία ισοδύναμα μέρη.

Το πρόβλημα του τετραγωνισμού κυρτού πολυγώνου

10.6 Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του

Σε πολλές περιπτώσεις, για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος επιδιώκουμε τον μετασχηματισμό σε ένα ισοδύναμο τετράγωνο. Η κατασκευή ενός τετραγώνου ισοδύναμου με ένα πολύγωνο λέγεται τετραγωνισμός αυτού.

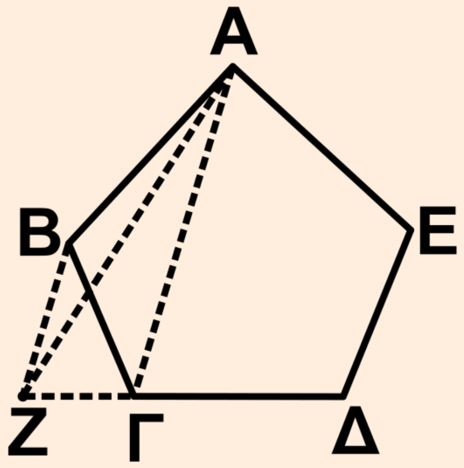
Η λύση των επόμενων δύο προβλημάτων αποτελεί τη μέθοδο κατασκευής του ισοδύναμου τετραγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να μετασχηματισθεί πολύγωνο σε άλλο ισοδύναμό του με μια πλευρά λιγότερη.

Λύση

Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, π.χ. ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 25) Από την κορυφή Α φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ, που



Σχήμα 25

αφήνει προς το ένα μέρος της μόνο μια κορυφή, τη Β. Από το Β φέρουμε την παράλληλο προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την ευθεία ΔΓ στο Ζ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΖΓ έχουν κοινή βάση ΑΓ και τα αντίστοιχα προς αυτή ύψη ίσα, αφού ΒΖ // ΑΓ.

Επομένως, (ΑΒΓ) = (ΑΖΓ), οπότε (ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔΕ) =

=(ΑΖΓ) + (ΑΓΔΕ) = (ΑΖΔΕ) δηλαδή το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι ισοδύναμο με το τετράπλευρο ΑΖΔΕ και επομένως το αρχικό μας πολύγωνο είναι ισοδύναμο με πολύγωνο που έχει μια πλευρά λιγότερη.

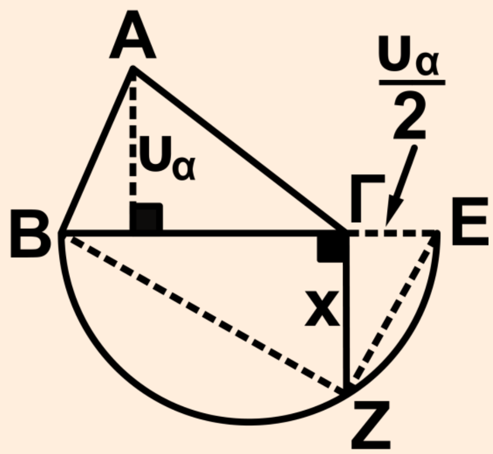
Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία στο τετράπλευρο ΑΖΔΕ, θα μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο. Έτσι, το αρχικό μας πολύγωνο μπορεί να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να μετασχηματισθεί τρίγωνο σε ισοδύναμο τετράγωνο.

Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $ΓΕ = \frac{υ_α}{2}$



Σχήμα 26

και γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΒΕ. Φέρουμε την κάθετο της ΒΓ στο Γ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο σε σημείο Ζ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΖΒΕ έχουμε:

$$ΓΖ^2 = ΒΓ \cdot ΓΕ = α \cdot \frac{υ_α}{2} = \frac{1}{2} αυ_α = (ΑΒΓ),$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι το τμήμα ΓΖ είναι η πλευρά x του ζητούμενου τετραγώνου, που είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε κυρτό πολύγωνο τετραγωνίζεται, αφού με πεπερασμένου πλήθους επαναλήψεις της διαδικασίας του προβλήματος 1 και τέλος της διαδικασίας του προβλήματος 2 κατασκευάζεται τετράγωνο ισοδύναμο προς το αρχικό πολύγωνο. Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα για μη ευθύγραμμα επίπεδα σχήματα;

Η απάντηση θα δοθεί στο επόμενο κεφάλαιο (§11.8).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Τι λέγεται τετραγωνισμός ενός πολυγώνου;
2. Πώς μετασχηματίζεται ένα ορθογώνιο σε ισοδύναμο τρίγωνο;
3. Πώς μετασχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο σε ισοδύναμο τρίγωνο;
4. Πώς μετασχηματίζεται ένα τραπέζιο σε ισοδύναμο τετράγωνο;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοσμένο ορθογώνιο πλευρών α, β.
2. Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο με το άθροισμα δύο τετραγώνων πλευρών α,β αντίστοιχα.
3. Δοσμένο κυρτό τετράπλευρο να διαιρεθεί σε δύο ισοδύναμα μέρη με ευθεία που να διέρχεται από μια κορυφή του.
4. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Κ της πλευράς του ΑΔ.

i) Να μετασχηματισθεί το ΑΒΓΔ σε ισοδύναμό του τρίγωνο του οποίου μια κορυφή να είναι το Κ και οι άλλες να βρίσκονται πάνω στην ευθεία ΒΓ.
ii) Να αχθεί από το Κ μια ευθεία που να διαιρεί το τετράπλευρο σε δύο ισοδύναμα μέρη.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε // ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
i) (ΒΔΕ) = (ΓΔΕ), ii) (ΒΑΕ) = (ΓΑΔ),
iii) (ΒΑΕ) + (ΓΑΔ) = (ΑΒΓ), με την επιπλέον υπόθεση ότι τα Δ, Ε είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

2. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς του ΒΓ, ώστε $B\Delta = \frac{\lambda}{\lambda^2+4}B\Gamma, \lambda > 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) $(AB\Delta) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+4}(AB\Gamma)$,

ii) $(AB\Delta) \le \frac{1}{4}(AB\Gamma)$.

3. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Με τη θεωρία του εμβαδού να αποδείξετε ότι
$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ **(Θεώρημα διχοτόμου).**

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β = 3γ, ΑΔ μία διχοτόμος του και ΒΕ μία διάμεσός του. Να αποδείξετε ότι:

i) $(AB\Delta) = \frac{1}{3}(A\Delta\Gamma)$ **(ΑΒΔ) ,**

ii) (ΑΒΔ)·(ΔΕΓ) = (ΑΔΓ)·(ΒΕΔ),

iii) $(\Delta E\Gamma) = \frac{3}{8}(AB\Gamma)$.

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 6cm και $\hat{A}$ = 120°.

i) Να βρεθεί το εμβαδόν του,

ii) Αν Ε είναι σημείο της ΑΓ τέτοιο, ώστε $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$ και ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ.

iii) Αν η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ στο Ζ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ.

6. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ //ΒΓ) και τα μέσα Κ, Λ των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) (ΑΒΛΚ) = (ΚΛΓΔ),

ii) (ΜΑΒ) = (ΜΓΔ), για οποιοδήποτε σημείο Μ του ΚΛ.

7. Θεωρούμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1 └) με ΑΒ = γ. Διαιρούμε την πλευρά ΑΒ σε ν ίσα τμήματα (ν φυσικός, ν ≥ 2) και από τα σημεία διαίρεσης φέρουμε παράλληλες προς την ΑΓ.

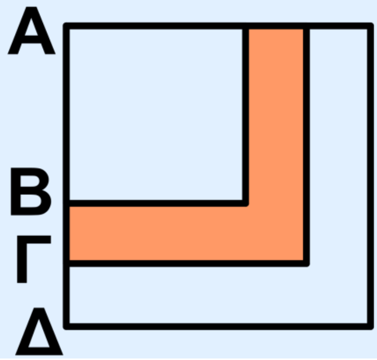
i) Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του γ τα εμβαδά των ν σχημάτων στα οποία διαιρέθηκε το τρίγωνο ΑΒΓ.

ii) Χρησιμοποιώντας το (i) να αποδείξετε ότι

$1 + 3 + 5 + ... + (2ν - 1) = ν^2$.

8. Δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΔΕΖΗ έχουν κοινή την κορυφή Δ και εμβαδόν 36 το καθένα. Αν οι πλευρές ΒΓ και ΕΖ έχουν κοινό μέσο Μ, να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος ΑΒΜΖΗΔ.

9. Τρία τετράγωνα των οποίων τα μήκη των πλευρών είναι ακέραιοι αριθμοί, έχουν κοινή κορυφή Α και



είναι τοποθετημένα το ένα πάνω στο άλλο,όπως δείχνει το σχήμα.
Αν ΒΓ = ΓΔ και η γραμμοσκιασμένη περιοχή έχει εμβαδόν 17, να βρεθεί το εμβαδόν του μικρότερου και του μεγαλύτερου τετραγώνου.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τρεις θετικοί αριθμοί λ, μ, ν. Να φέρετε δύο ευθείες παράλληλες προς τη ΒΓ που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία μέρη ανάλογα των αριθμών λ, μ, ν.

11. i) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείου Μ. Αν η ΑΜ τέμνει την ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι:
α) $\frac{ΒΔ}{ΔΓ} = \frac{(ΑΜΒ)}{(ΑΜΓ)}$, β) $\frac{ΜΔ}{ΑΔ} = \frac{(ΒΜΓ)}{(ΑΒΓ)}$,
ii) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείο Μ. Αν οι ευθείες ΑΜ, ΒΜ και ΓΜ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ στα Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΕ}{ΕΓ} + \frac{ΑΖ}{ΖΒ} = \frac{ΑΜ}{ΜΔ}$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

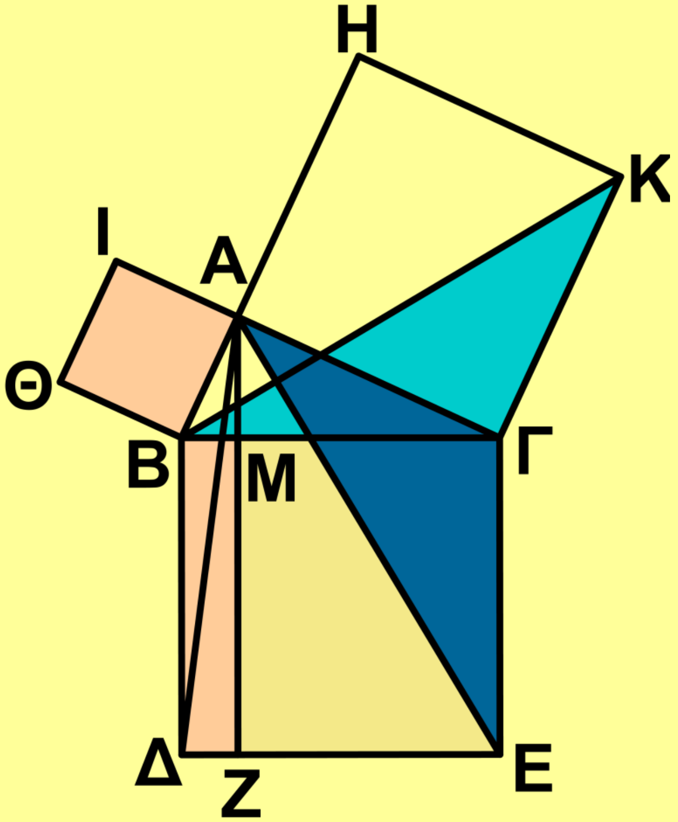
Το Πυθαγόρειο θεώρημα στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη αποδεικνύεται στην προτελευταία πρόταση (Πρόταση 47) του Βιβλίου Ι.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α}$ ορθή. Το τετράγωνο που κατασκευάζεται επί της ΒΓ είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των τετραγώνων που κατασκευάζονται επί της ΑΒ και ΑΓ. Φέρουμε την ΑΖ παράλληλη στις ΒΔ, ΓΕ και τις ευθείες ΑΔ και ΘΓ.

Αφού οι γωνίες $Β\hat{Α}Γ$, $Β\hat{Α}Ι$ είναι ορθές, προκύπτει ότι τα τμήματα ΙΑ, ΑΓ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το ίδιο και τα τμήματα ΒΑ, ΑΗ. Αφού οι γωνίες $Δ\hat{Β}Γ$, $Θ\hat{Β}Α$ είναι ορθές, έχουμε ότι $Δ\hat{Β}Γ = Θ\hat{Β}Α$, οπότε:
$Δ\hat{Β}Γ + Α\hat{Β}Γ = Θ\hat{Β}Α + Α\hat{Β}Γ$ ή $Δ\hat{Β}Γ = Θ\hat{Β}Γ$.

Αφού ΔΒ = ΒΓ, ΘΒ = ΒΑ και $\Delta\hat{B}A = \Theta\hat{B}\Gamma$, η βάση ΑΔ ισούται με τη βάση ΘΓ και το ΑΒΔ ισούται με το ΘΒΓ. Τώρα το παραλληλόγραμμο ΒΜΖΔ είναι διπλάσιο από το ΑΒΔ, και το τετράγωνο ΙΑΒΘ είναι διπλάσιο από το ΘΒΓ.

Επομένως, το παραλληλόγραμμο ΒΜΖΔ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο ΙΑΒΘ.
Όμοια, αν φέρουμε την ΑΕ και τη ΒΚ μπορεί να αποδειχθεί ότι το παραλληλόγραμμο ΓΜΖΕ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο ΗΚΓΑ.
Επομένως, το τετράγωνο ΒΔΕΓ είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των δύο τετραγώνων ΙΑΒΘ και ΗΚΓΑ.



Το Πυθαγόρειο θεώρημα στο
Βιβλίο Ι των «Στοιχείων»

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Αντικείμενο του κεφαλαίου είναι η έννοια του εμβαδού. Το εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει το πλήθος των μοναδιαίων τετραγώνων (ή μερών του) που απαιτούνται για να καλύψουν την έκτασή του. Δεχόμαστε την αλήθεια των εξής ιδιοτήτων:

- **Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.**
- **Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων.**

Ευθύγραμμα σχήματα με το ίδιο εμβαδόν λέγονται ισοδύναμα.

Με σκοπό την παραγωγή των τύπων υπολογισμού του εμβαδού βασικών ευθύγραμμων σχημάτων δεχόμαστε ότι το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α είναι $E = α^2$. Στηριζόμενοι σ. αυτό αποδεικνύουμε ότι το εμβαδόν Ε ορθογωνίου με πλευρές α, β είναι $E = αβ$. Στη συνέχεια μετασχηματίζοντας το παραλληλόγραμμο σε ορθογώνιο βρίσκουμε τον τύπο του εμβαδού Ε ενός παραλληλογράμμου. Θεωρώντας πλέον το τρίγωνο ως το μισό κατάλληλου παραλληλογράμμου βρίσκουμε τον τύπο του εμβαδού ενός τριγώνου. Τέλος χωρίζοντας ένα τραπέζιο σε δύο τρίγωνα βρίσκουμε ότι το εμβαδόν Ε ενός τραπεζίου δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{B + β}{2} υ.$$

Στη συνέχεια δίνουμε και άλλους τύπους για το εμβαδόν τριγώνου.

Ως πόρισμα αυτών καταλήγουμε στο Νόμο των ημιτόνων

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R.$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη σχέση των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων.

Επίσης, αποδεικνύουμε ότι για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με

$$\hat{A} = \hat{A}' \text{ ή } \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \text{ ισχύει ότι .}$$

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$$

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι κάθε κυρτό πολύγωνο μετασχηματίζεται σε ισοδύναμό του τετράγωνο, αποδεικνύοντας πρώτα ότι το πολύγωνο μετασχηματίζεται σε ισοδύναμό του τρίγωνο και αυτό σε ισοδύναμο τετράγωνο.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

ΕΜΒΑΔΟΝ

Πολυγώνων

Τετραγώνου: $E = \alpha^2$

Ορθογωνίου: $E=\alpha\cdot\beta$

Παραλληλογράμμου: $E = \alpha\cdot\upsilon_\alpha = \beta\cdot\upsilon_\beta$

Τριγώνου: $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$

$$E = \tau\rho$$

$$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$$

Τραπεζίου: $E = \frac{1}{2}(B+\beta)\cdot\upsilon$

Ρόμβου (και τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους):

$E = \frac{1}{2}\delta_1\cdot\delta_2$

Πολυγωνικών Επιφανειών

$$(\Pi.E.)=(\Pi_1)+(\Pi_2)+\ldots+(\Pi_\nu)$$

Εμβαδόν και ομοιότητα

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha'}, \text{ αν } \upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'} \\[2ex] \dfrac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}, \text{ αν } \alpha = \alpha' \\[2ex] \dfrac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}, \text{ αν } \hat{A} = \hat{A}' \text{ ή } \hat{A}+\hat{A}' = 180^\circ \end{cases}$$

λ^2, αν $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}} \approx \overset{\Delta}{\text{Α΄Β΄Γ΄}}$ και λ ο λόγος ομοιότητας

$\frac{(\text{ΑΒΓ}\cdots\text{Κ})}{(\text{Α΄Β΄Γ΄}\cdots\text{Κ΄})} = \lambda^2$, αν $\text{ΑΒΓ}\cdots\text{Κ} \approx \text{Α΄Β΄Γ΄}\cdots\text{Κ΄}$ και λ ο λόγος ομοιότητας

Τετραγωνισμός πολυγώνου

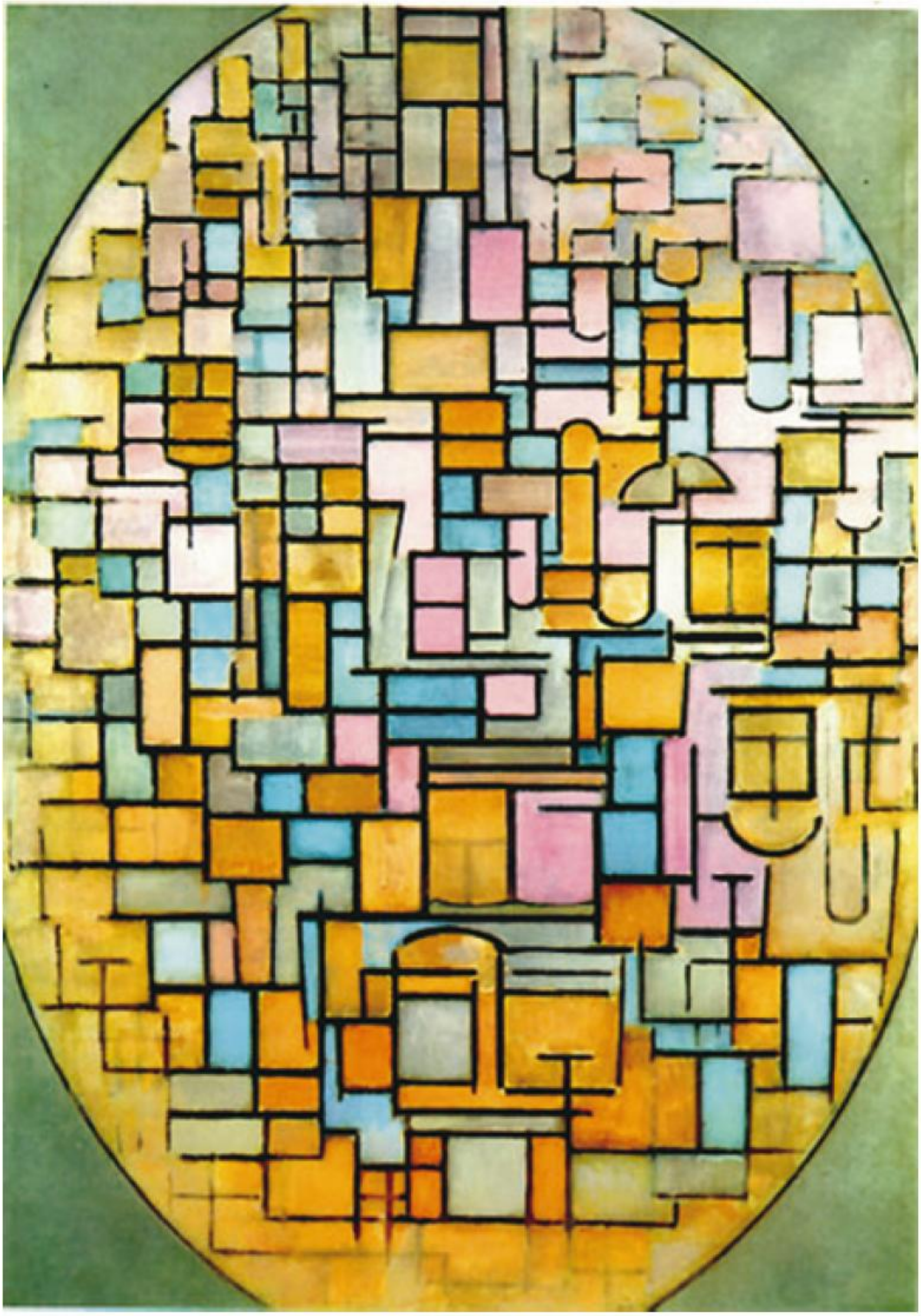
- Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμο τρίγωνο
- Μετασχηματισμός τριγώνου σε ισοδύναμο τετράγωνο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Μέτρηση Κύκλου

Η μέτρηση του μήκους του κύκλου και του εμβαδού του κυκλικού δίσκου αποτέλεσε ένα σημαντικό θέμα με το οποίο ασχολήθηκαν σπουδαίοι μαθηματικοί της αρχαιότητας (Ιπποκράτης ο Χίος, Αρχιμήδης). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν τα κανονικά πολύγωνα, τα οποία με τη σειρά τους απασχόλησαν τους μαθηματικούς για περίοδο πάνω από 2.000 χρόνια (Αρχαιότητα - K.F. Gauss).

Στο παρόν κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια των κανονικών πολυγώνων και μελετάμε βασικές ιδιότητές τους. Εξετάζουμε την εγγραφή ορισμένων βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και υπολογίζουμε τα στοιχεία τους. Στη συνέχεια «προσεγγίζοντας» τον κύκλο με κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα ή περιγεγραμμένα σε αυτόν και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του αριθμού π, βρίσκουμε τύπους για το μήκος κύκλου και τόξου και για το εμβαδόν κυκλικού δίσκου και τομέα.



Piet Mondrian «Σύνθεση»

Κανονικά πολύγωνα

11.1 Ορισμός κανονικού πολυγώνου

Όπως είναι γνωστό, ένα τετράγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες. Το ίδιο ισχύει και για ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Τέτοια πολύγωνα λέγονται κανονικά.

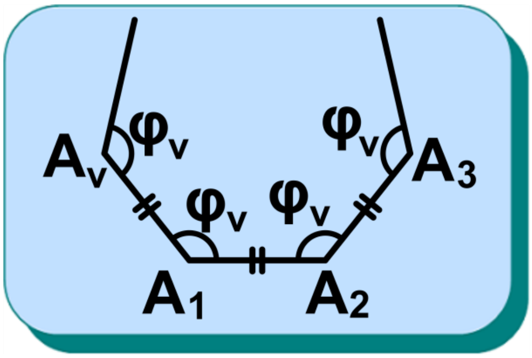
Ορισμός

Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

• Γωνία κανονικού ν-γώνου

Έστω $A_1A_2...A_\nu$ ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές και έστω

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \cdots = \hat{A}_\nu = \varphi_\nu$ (σχ.1).

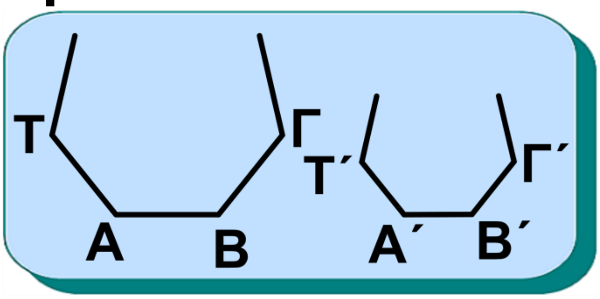


Σχήμα 1

Επειδή το άθροισμα των γωνιών κάθε κυρτού ν-γώνου είναι (ν - 2) ·180°, θα έχουμε $\nu\varphi_\nu$ = (ν - 2)·180° και επομένως $\varphi_\nu = 180° - \frac{360°}{\nu}$

• Ομοιότητα κανονικών πολυγώνων

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο κανονικά πολύγωνα ΑΒΓ...Τ, Α΄Β΄Γ΄...Τ΄ (σχ.2) με τον ίδιο αριθμό πλευρών ν. Τότε η γωνία καθενός είναι



Σχήμα 2

$180° - \frac{360°}{\nu}$, οπότε έχουμε: $\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \cdots, \hat{T} = \hat{T}'$ (1).

Επίσης, αφού $AB = B\Gamma = \cdots = TA$ και $A'B' = B'\Gamma' = \cdots = T'A'$ θα έχουμε

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\cdots=\frac{TA}{T'A'} \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι τα πολύγωνα ΑΒΓ...Τ και Α΄Β΄Γ΄...Τ΄ είναι όμοια. Έτσι, έχουμε το επόμενο συμπέρασμα:

Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

11.2 Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

Μια σημαντική ιδιότητα των κανονικών πολυγώνων εκφράζεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Ι

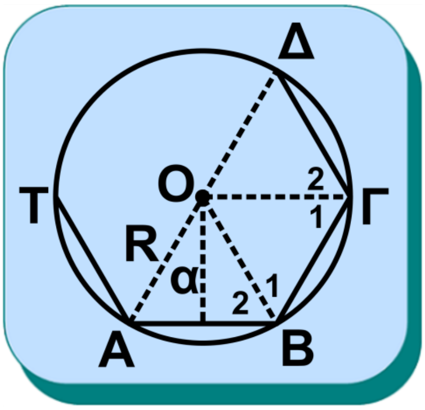
Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλον. Οι δύο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ...Τ ένα κανονικό πολύγωνο (σχ. 3). Θεωρούμε τον κύκλο (Ο, R) που διέρχεται από τις κορυφές Α, Β, Γ του πολυγώνου.

Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος αυτός διέρχεται και από την κορυφή Δ, δηλαδή ότι ΟΔ = R.

Επειδή ΟΒ = ΟΓ = R, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές και επομένως $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1=\sigma$, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν: ΟΒ=ΟΓ, ΑΒ=ΓΔ (αφού ΑΒΓΔ...Τ κανονικό) και $\hat{B}_2=\hat{B}-\sigma=\hat{\Gamma}-\sigma=\hat{\Gamma}_2$.



Σχήμα 3

Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι ΟΔ = ΟΑ = R. Όμοια αποδεικνύεται ότι ο κύκλος (Ο,R) διέρχεται και από τις υπόλοιπες κορυφές Ε, Ζ, ... Τ και επομένως το πολύγωνο είναι εγγράψιμο. Οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες χορδές του κύκλου (Ο,R), επομένως και τα

αποστήματά τους θα είναι ίσα, έστω με α. Επομένως, ο κύκλος (Ο,α) εφάπτεται στις πλευρές του ΑΒΓΔ...Τ, άρα το πολύγωνο είναι περιγράψιμο σε κύκλο. Είναι φανερό, από τα παραπάνω, ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος (Ο,R) και ο εγγεγραμμένος (Ο,α) του πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

● Στοιχεία κανονικού πολυγώνου

Αποδείξαμε παραπάνω ότι κάθε κανονικό πολύγωνο έχει έναν περιγεγραμμένο και έναν εγγεγραμμένο κύκλο που έχουν κοινό κέντρο.

Το κοινό κέντρο των δύο αυτών κύκλων λέγεται **κέντρο** του πολυγώνου. Η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται **ακτίνα** του πολυγώνου, ενώ η απόσταση του κέντρου από μια πλευρά του, δηλαδή η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου λέγεται **απόστημα** του πολυγώνου.

Επειδή τα τόξα $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{B\Gamma}, \cdots, \overset{\frown}{TA}$ (σχ.3) είναι ίσα, οι επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, ..., $T\hat{O}A$ είναι ίσες. Καθεμία από τις γωνίες αυτές, δηλαδή η γωνία υπό την οποία φαίνεται κάθε πλευρά του πολυγώνου από το κέντρο του, λέγεται **κεντρική γωνία** του πολυγώνου.

Στα επόμενα, σε ένα κανονικό ν-γωνο θα συμβολίζουμε με R την ακτίνα του, με λ_ν την πλευρά του, με α_ν το απόστημά του, με ω_ν την κεντρική του γωνία, με P_ν την περίμετρό του και E_ν το εμβαδόν του.

Για τα στοιχεία των κανονικών πολυγώνων ισχύει το εξής θεώρημα.

Θεώρημα ΙΙ

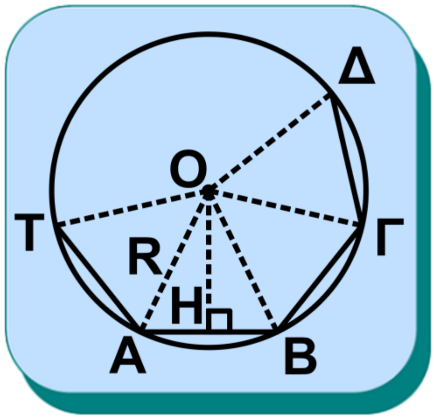
Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R ισχύουν οι εξής σχέσεις:

(i) $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$ (ii) $P_\nu = \nu\lambda_\nu$

(iii) $\omega_\nu = \dfrac{360^\circ}{\nu}$ **(iv)** $E_\nu = \dfrac{1}{2}P_\nu \alpha_\nu$

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ...Τ ένα κανονικό ν-γωνο, R η ακτίνα του, ΑΒ = λ_ν η πλευρά του και ΟΗ = α_ν το απόστημά του (σχ.4).



Σχήμα 4

(i) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΟΑ, με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος προκύπτει $OH^2 + HA^2 = OA^2$,

δηλαδή $\alpha_\nu^2 + \left(\dfrac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 = R^2$.

(ii) Επειδή ΑΒ = ΒΓ = … = ΤΑ = λ_ν, θα είναι $P_\nu = \nu\lambda_\nu$.

(iii) Επειδή $AB, B\Gamma, \cdots, TA$ θα είναι

$A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \ldots = T\hat{O}A = \omega_\nu$ και αφού οι γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, … και $T\hat{O}A$ έχουν άθροισμα 360°, έχουμε

$\nu\omega_\nu = 360^\circ$, δηλαδή $\omega_\nu = \dfrac{360^\circ}{\nu}$

(iv) Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, … , ΟΤΑ είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα και ισεμβαδικά και επομένως έχουμε:

$E_\nu = \nu(OAB) = \nu\dfrac{1}{2}AB \cdot OH = \dfrac{1}{2}\nu\lambda_\nu\alpha_\nu = \dfrac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu$ αφού $P_\nu = \nu\lambda_\nu$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε δύο κανονικά ν-γωνα ο λόγος των πλευρών τους ισούται με το λόγο των ακτίνων τους και το λόγο των αποστημάτων τους.

Απόδειξη

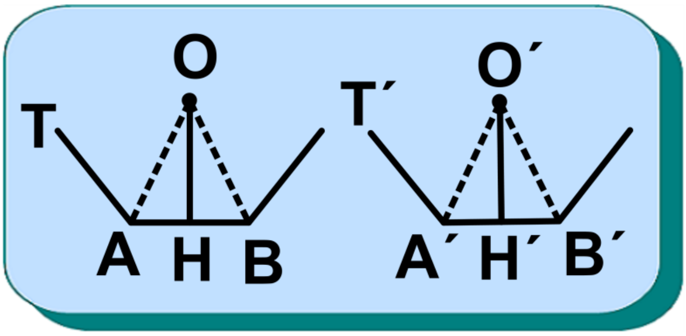
Θεωρούμε δύο κανονικά πολύγωνα ΑΒΓ...Τ και Α΄Β΄Γ΄...Τ΄ (σχ.5) με το ίδιο πλήθος πλευρών, έστω ν (ν ≥ 3). Αν Ο, Ο΄ τα κέντρα των πολυγώνων, τα τρίγωνα

ΟΑΒ και Ο΄Α΄Β΄ είναι όμοια γιατί είναι ισοσκελή και έχουν $A\hat{O}B = A'\hat{O}'B' = \frac{360^\circ}{\nu}$ και επομένως

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OB}{O'B'},$$

όπου ΟΗ, Ο΄Η΄ τα ύψη των τριγώνων. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι:

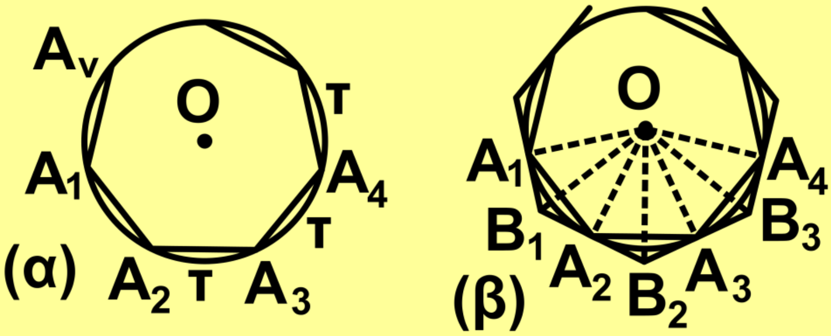
$$\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{R}{R'} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu},$$



Σχήμα 5

όπου λ_ν, R, αν τα συνήθη στοιχεία του ΑΒΓ...Τ και λ'_ν, R΄, α'_ν τα στοιχεία του Α΄Β΄Γ΄...Τ΄.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ



Σχήμα 6

Αποδεικνύεται ότι, αν τα σημεία $A_1, A_2, \ldots A_\nu$ διαιρούν έναν κύκλο σε ν ίσα τόξα, τότε το πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ (σχ.6α) καθώς και το πολύγωνο $B_1, B_2, \ldots B_\nu$, που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία αυτά (σχ.6β) είναι κανονικά.

ΣΧΟΛΙΟ

Η διαίρεση ενός κύκλου σε ν ίσα τόξα με τον κανόνα και το διαβήτη δεν είναι δυνατή για οποιαδήποτε τιμή του φυσικού αριθμού ν. Για παράδειγμα, δεν είναι δυνατή η διαίρεση ενός κύκλου σε επτά ίσα τόξα, το οποίο σημαίνει ότι δεν κατασκευάζεται κανονικό 7-γωνο.

Από τον τρόπο κατασκευής των κανονικών πολυγώνων (με κανόνα και διαβήτη) που αναπτύσσεται στα στοιχεία του Ευκλείδη, προκύπτει ότι οι αρχαίοι Έλληνες
Μαθηματικοί κατασκεύαζαν κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών $2^ν$, $ν \geq 2$, $2^ν·3$, $2^ν·5$, $2^ν·3·5$, όπου ν = 0, 1, 2, ...
Ο Αρχιμήδης (287 π.Χ. περίπου – 212 π.Χ.) ασχολήθηκε με το πρόβλημα της κατασκευής κανονικού πολυγώνου και παρουσίασε ένα θαυμάσιο έργο με θέμα την κατασκευή του κανονικού 7-γώνου. Αρκετά αργότερα, το 1796, ο Gauss (1777 - 1855) με αφορμή την κατασκευή κανονικού 17-γώνου απέδειξε ότι ένα κανονικό πολύγωνο μπορεί να κατασκευαστεί, όταν το πλήθος ν των πλευρών του είναι της μορφής $ν = 2^α·P_1 ·P_2 ·…· P_κ$,
όπου α φυσικός αριθμός και P_1, P_2, …, $P_κ$ πρώτοι αριθμοί του Fermat, δηλαδή της μορφής

$$P_λ = 2^{2^λ} + 1, \quad λ = 1, 2, \dots ,κ.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Υπάρχουν κανονικά πολύγωνα των οποίων οι εξωτερικές γωνίες είναι αμβλείες;

2. Ποιο είναι το απόστημα κανονικού πολυγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο;

3. Ένα κυρτό πολύγωνο είναι κανονικό όταν:

α. έχει μόνον τις πλευρές του ίσες,

β. έχει μόνον τις γωνίες του ίσες,

γ. είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έχει τις πλευρές του ίσες.

4. Μεταξύ των $λ_ν$, $α_ν$ και R ισχύει:

α. $\lambda_\nu^2 + \dfrac{\alpha_\nu^2}{4} = R^2$ β. $\lambda_\nu^2 + \alpha_\nu^2 = 4R^2$

γ. $\lambda_\nu^2 = 4\left(R^2 - \alpha_\nu^2\right)$ δ. $\lambda_\nu^2 + \alpha_\nu^2 = \dfrac{R^2}{4}$

5. Μεταξύ των ω_ν και φ_ν ισχύει:

α. $\omega_\nu+\varphi_\nu=1$ └ β. $\omega_\nu+\varphi_\nu=2$ └

γ. $\omega_\nu+\varphi_\nu=270°$ δ. $\omega_\nu+\varphi_\nu=3$ └

(Στις ερωτήσεις 3, 4, και 5 κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να βρεθούν η γωνία και η κεντρική γωνία ενός κανονικού: πενταγώνου, εξαγώνου, δεκαγώνου και δωδεκαγώνου.

2. Αν η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 108°, τότε το πλήθος των πλευρών του είναι:

α. 15 β. 12 γ. 10 δ. 5 ε. 8

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. Σε δύο κανονικά πεντάγωνα ο λόγος των πλευρών τους είναι $\lambda = 2$. Ποιος είναι ο λόγος των αποστημάτων, των ακτίνων τους, των περιμέτρων τους και των εμβαδών τους;

4. Τα πλήθη ν_1, ν_2 των πλευρών δύο κανονικών πολυγώνων είναι αντίστοιχα ρίζες των εξισώσεων:

$\nu^3 - 3\nu^2 - 7\nu - 15 = 0$, $2\nu - 9 = \sqrt{\nu - 4}$.

Να αποδείξετε ότι τα πολύγωνα είναι όμοια.

5. Να αποδείξετε ότι το μόνο κανονικό πολύγωνο με γωνία οξεία είναι το ισόπλευρο τρίγωνο.

6. Αν ένα κανονικό ν-γωνο και ένα κανονικό μ-γωνο (μ > ν) είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι

i) $\lambda_\nu^2-\lambda_\mu^2=4\left(\alpha_\nu^2-\alpha_\mu^2\right)$,

ii) $\lambda_\nu>\lambda_\mu \Leftrightarrow \alpha_\nu<\alpha_\mu$.

7. **Θεωρούμε ένα κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Να αποδείξετε ότι**

i) κάθε διαγώνιος χωρίζει το πεντάγωνο σε ένα ισοσκελές τραπέζιο και σε ένα ισοσκελές τρίγωνο,

ii) η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΕ,

iii) δύο διαγώνοι που δεν έχουν κοινό άκρο σχηματίζουν με δύο πλευρές του πενταγώνου ρόμβο και

iv) αν Η είναι το σημείο τομής της ΑΓ με τη ΒΔ, τότε $AH^2=A\Gamma\cdot H\Gamma$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. **Το δάπεδο ενός δωματίου στρώθηκε με πλακίδια σχήματος κανονικών πολυγώνων με πλήθος πλευρών λ, μ, ν, όπου λ ≠ μ ≠ ν ≠ λ. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=\frac{1}{2}$.**

2. **Αν ένα πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε δύο ομόκεντρους κύκλους, να αποδείξετε ότι είναι κανονικό.**

3. **Αν Α, Β, Γ, Δ είναι διαδοχικές κορυφές ενός κανονικού ν-γώνου (ν≥4), να αποδείξετε ότι $A\Gamma^2-AB^2=AB\cdot A\Delta$.**

4. **Αν $E_{2\nu}$ είναι το εμβαδόν ενός κανονικού 2ν- γώνου (ν>4), εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R), να αποδείξετε ότι $E_{2\nu}=\frac{1}{2}P_\nu R$, όπου P_ν η περίμετρος του κανονικού ν-γώνου ακτίνας R.**

5. **Αν λ_ν' είναι πλευρά κανονικού ν-γώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο και λ_ν, α_ν η πλευρά**

και το απόστημα αντίστοιχα, κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι $R \cdot \lambda_\nu = \alpha_\nu \cdot \lambda'_\nu$.

6. Αν E_α, E_β, E_γ είναι τα εμβαδά κανονικών ν-γώνων που έχουν πλευρές ίσες αντίστοιχα με τις πλευρές α, β, γ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1 ∟), να αποδείξετε ότι $E_\beta + E_\gamma = E_\alpha$.

Σύνθετα θέματα

1. Οι Πυθαγόρειοι ισχυρίζονταν ότι υπάρχουν τρία μόνο κανονικά πολύγωνα των οποίων οι γωνίες μπορούν να καλύψουν το επίπεδο γύρω από ένα σημείο. Τα κανονικά αυτά πολύγωνα είναι τα ισόπλευρα τρίγωνα, τα τετράγωνα και τα κανονικά εξάγωνα. Να αποδείξετε την αλήθεια του ισχυρισμού αυτού των Πυθαγορείων.

2. Έστω κανονικό ν-γωνο και σημείο Σ στο εσωτερικό του. Αν d_1, d_2, …, d_ν είναι οι αποστάσεις του Σ από τις πλευρές του ν-γώνου, να αποδείξετε ότι

$d_1 + d_2 + \ldots + d_\nu = \nu\alpha_\nu$, όπου α_ν το απόστημα του ν-γώνου.

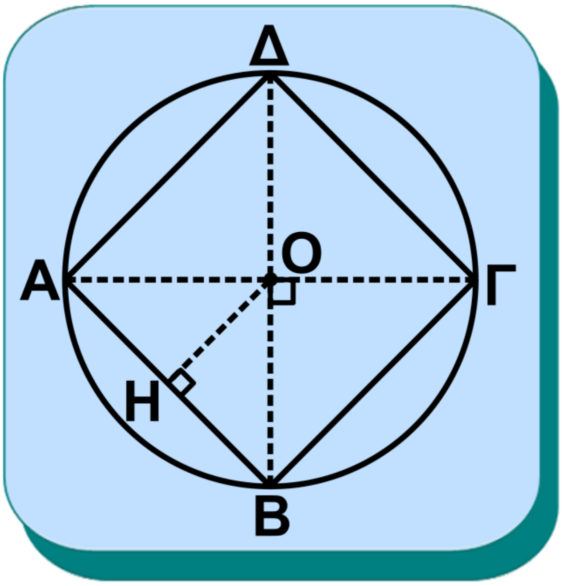
3. Σε κανονικό δεκάγωνο ΑΒΓΔ...Κ η πλευρά ΑΒ προεκτεινόμενη τέμνει την προέκταση της ακτίνας ΟΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι ΑΜ=ΑΔ.

11.3 Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

Από την παρατήρηση της προηγούμενης παραγράφου προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ένα κανονικό πολύγωνο με ν (ν≥3) πλευρές, αρκεί να χωρίσουμε ένα κύκλο σε ν ίσα τόξα. Η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη δεν είναι δυνατή για κάθε ν. (σχόλιο §11.2). Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την εγγραφή μερικών βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και θα υπολογίσουμε τα στοιχεία τους.

• **Τετράγωνο**

Έστω ένας κύκλος (Ο,R) (σχ.7). Αν φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ, θα είναι $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}A = 90°$, οπότε $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$ και επομένως το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε $\lambda_4^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$ από την οποία προκύπτει ότι: $\boxed{\lambda_4 = R\sqrt{2}}$.



Σχήμα 7

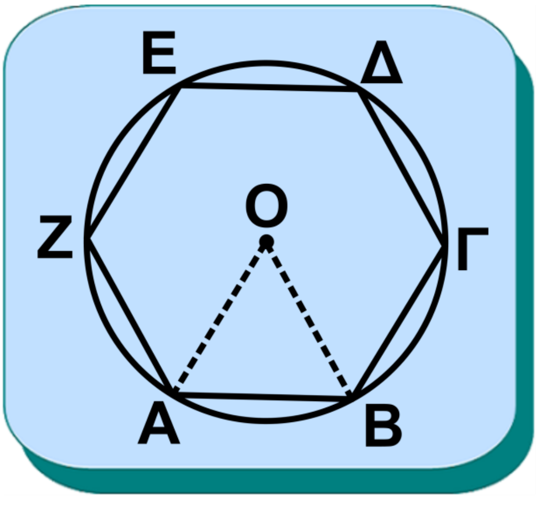
Από τη βασική σχέση $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$ με ν = 4 προκύπτει ότι

$$\alpha_4^2 = R^2 - \frac{\left(R\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{R^2}{2},$$

δηλαδή $\boxed{\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$.

• **Κανονικό εξάγωνο**

Έστω κύκλος (Ο,R) και ΑΒ η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον (Ο,R) (σχ.8). Τότε $A\hat{O}B = \omega_6 = 60°$ και επειδή ΟΑ = ΟΒ (=R) το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο. Άρα ΑΒ = ΟΑ = R, δηλαδή $\boxed{\lambda_6 = R}$.



Σχήμα 8

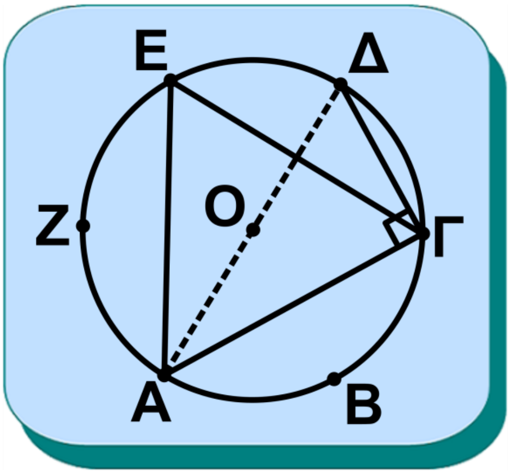
Έτσι για την εγγραφή κανονικού εξαγώνου σε κύκλο, παίρνουμε πάνω στον κύκλο έξι διαδοχικά τόξα ΑΒ, ΒΓ , ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ και ΖΑ με αντίστοιχη χορδή R, το καθένα, οπότε το ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο. Επειδή λ_6= R, από τη βασική σχέση $\alpha_6^2+\frac{\lambda_6^2}{4}=R^2$ με αντικατάσταση του λ_6 προκύπτει ότι:

$$\alpha_6^2=R^2-\frac{R^2}{4}=\frac{3R^2}{4}, \text{ ή } \quad \alpha_6=\frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

• Ισόπλευρο τρίγωνο

Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ (σχ.9) διαιρούν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα, τότε τα σημεία Α, Γ, Ε είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, αφού

$$\text{ΑΓ}=\text{ΓΕ}=\text{ΕΑ}=120^\circ.$$



Σχήμα 9

Επειδή $\text{ΑΓΔ}=180^\circ$, η ΑΔ είναι διάμετρος και επομένως το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε

$$\lambda_3^2=\text{ΑΓ}^2=\text{ΑΔ}^2-\text{ΔΓ}^2=(2R)^2-R^2=3R^2,$$

Δηλαδή $\lambda_3=R\sqrt{3}$.

Εφαρμόζοντας τώρα τη σχέση $\alpha_3^2+\frac{\lambda_3^2}{4}=R^2$, προκύπτει ότι $\alpha_3=\frac{R}{2}$.

Τα στοιχεία των παραπάνω πολυγώνων συγκεντρώνονται στον επόμενο πίνακα:

	Τετράγωνο	Κανονικό εξάγωνο	Ισόπλευρο τρίγωνο
Πλευρά λ_ν	$\lambda_4=R\sqrt{2}$	$\lambda_6=R$	$\lambda_3=R\sqrt{3}$

Απόστημα α_ν	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Σε δοσμένο κύκλο να εγγραφεί κανονικό δεκάγωνο.

Λύση

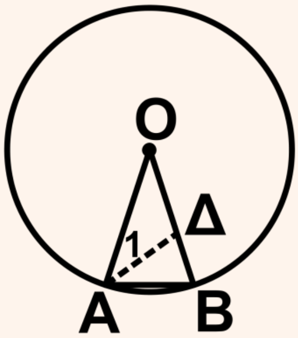
Έστω ΑΒ=λ_{10} (σχ.10) η πλευρά του κανονικού δεκαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον κύκλο (Ο,R).

Η κεντρική γωνία $A\hat{O}B$ είναι $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ και καθεμία από τις γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΟΑΒ είναι $\hat{A} = \hat{B} = 72^\circ$.

Έτσι, αν φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $O\hat{A}B$ τα τρίγωνα ΔΟΑ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή, αφού είναι

$\Delta\hat{A}O = 36^\circ = A\hat{O}B$ και

$A\hat{\Delta}B = \hat{A}_1 + \hat{O} = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ = \hat{B}$.



Σχήμα 10

Επομένως, ΟΔ = ΑΔ = ΑΒ = λ_{10} και ΒΔ = R - λ_{10}.Με εφαρμογή του θεωρήματος της διχοτόμου στο τρίγωνο ΟΑΒ προκύπτει ότι:

$$\frac{AB}{AO} = \frac{\Delta B}{\Delta O} \Leftrightarrow \frac{\lambda_{10}}{R} = \frac{R-\lambda_{10}}{\lambda_{10}} \Leftrightarrow \lambda_{10}^2 = R\left(R-\lambda_{10}\right)$$

και επειδή λ_{10} = ΑΒ > ΔΒ = R - λ_{10} (αφού $A\hat{\Delta}B > B\hat{A}\Delta$), η τελευταία ισότητα εκφράζει ότι το λ_{10} είναι το μεγαλύτερο από τα τμήματα που προκύπτουν αν διαιρέσουμε την ακτίνα R σε μέσο και άκρο λόγο. Για την κατασκευή του κανονικού δεκαγώνου του εγγεγραμμένου σε κύκλο , διαιρούμε την ακτίνα του κύκλου σε μέσο και άκρο λόγο και στη συνέχεια ορίζουμε τα διαδοχικά τόξα $AB, B\Gamma, \cdots,$ που έχουν το καθένα χορδή ίση με το μεγαλύτερο τμήμα στα οποία χωρίζεται η ακτίνα με τη διαίρεσή της σε μέσο και άκρο λόγο.

Δραστηριότητα

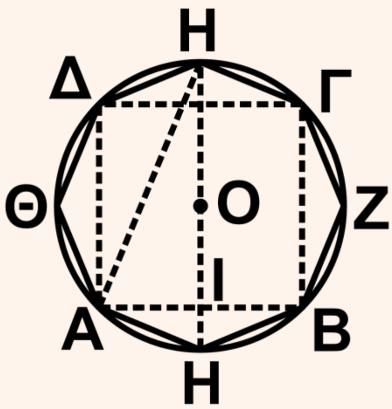
Να αποδειχθεί ότι $\lambda_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ και να υπολογισθεί το α_{10}.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Σε δοσμένο κύκλο, να εγγραφεί κανονικό οκτάγωνο και να υπολογισθούν η πλευρά του και το απόστημά του.

Λύση

Εγγράφουμε στον κύκλο (σχ.11) το τετράγωνο ΑΒΓΔ και στη συνέχεια παίρνουμε τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των τόξων που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Τότε το ΑΕΒ...Θ είναι το ζητούμενο οκτάγωνο. Αν θεωρήσουμε τη διάμετρο ΕΗ που αντιστοιχεί στο Ε, επειδή το τρίγωνο ΑΗΕ είναι ορθογώνιο και



Σχήμα 11

η ΑΒ κάθετη στην ΕΗ, έχουμε $AE^2 = EH \cdot EI = 2R\left(R - OI\right)$ και τελικά, αφού ΑΕ = λ_8 και ΟΙ = α_4 ,

έχουμε: $\lambda_8^2 = 2R\left(R-\alpha_4\right) = 2R\left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = R^2\left(2-\sqrt{2}\right)$ και

επομένως $\boxed{\lambda_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

Τέλος, από τη σχέση $\alpha_8^2 + \frac{\lambda_8^2}{4} = R^2$ προκύπτει ότι $\boxed{\alpha_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η Τύπος του Αρχιμήδη

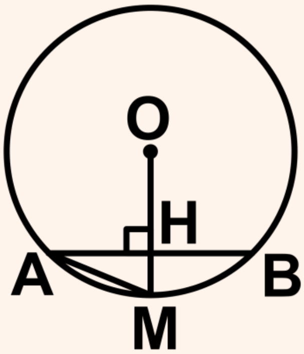
Ένα κανονικό ν.γωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Να εγγραφεί στον ίδιο κύκλο κανονικό 2ν-γωνο και να αποδειχθεί ότι $\lambda_{2\nu}^2 = 2R(R - \alpha_\nu)$.

Λύση

Αν πάρουμε τα μέσα των τόξων που αντιστοιχούν στις πλευρές του κανονικού ν.γώνου, ο κύκλος διαιρείται σε 2ν ίσα τόξα.

Έτσι προκύπτει το εγγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο με 2ν πλευρές.

Έστω ΑΒ = λ_ν (σχ. 12) και Μ το μέσο



Σχήμα 12

του τόξου ΑΒ. Τότε ΑΜ = $\lambda_{2\nu}$ και ΟΜ ⊥ ΑΒ. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΗΜ έχουμε

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 \text{ ή } \lambda_{2\nu}^2 = \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 + (R-\alpha_\nu)^2 =$$

$$= \frac{\lambda_\nu^2}{4} + R^2 + \alpha_\nu^2 - 2R\alpha_\nu \text{ ή } \lambda_{2\nu}^2 = 2R^2 - 2R\alpha_\nu$$

$$\text{(αφού } \frac{\lambda_\nu^2}{4} + \alpha_\nu^2 = R^2\text{) ή } \boxed{\lambda_{2\nu}^2 = 2R(R-\alpha_\nu)}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από τη σχέση $\alpha_{2\nu}^2+\frac{\lambda_{2\nu}^2}{4}=R^2$ προκύπτει ότι $\alpha_{2\nu}^2=\frac{4R^2-\lambda_{2\nu}^2}{4}=\frac{4R^2-\left(2R^2-2R\alpha_\nu\right)}{4}=\frac{4R^2+2R\alpha_\nu}{4}$ ή

$$\boxed{\alpha_{2\nu}^2=\frac{R}{2}\left(R+\alpha_\nu\right)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Χαρακτηρίστε ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω ισότητες, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

i) $\lambda_6^2+\lambda_3^2=\lambda_4^2$ Σ Λ

ii) $\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6=3R\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ Σ Λ

iii) $\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6=\frac{R}{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ Σ Λ

2. Αν Α, Β, Γ, Δ διαδοχικά σημεία κύκλου (Ο, R), ώστε $AB=R\sqrt{2}$, $B\Gamma=\lambda_{12}$ και ΓΔ = R, να εξηγήσετε γιατί η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

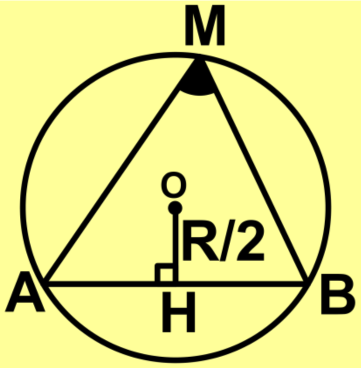
3. Αν Α, Β, Γ διαδοχικά σημεία κύκλου (Ο, R), ώστε $AB=120^\circ$ και $B\Gamma=60^\circ$, η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

α. $(3+\sqrt{3})R$, β. $4R$,

γ. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})R$, δ. $(3+\sqrt{2})R$.

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

4. Στο παρακάτω σχήμα η γωνία Μ είναι:



α. 30° β. 45° γ. 50° δ. 60° ε. 75°
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου, ενός τετραγώνου και ενός κανονικού εξαγώνου, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (O,R).

2. Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα R = 10cm και απόστημα $\alpha_\nu = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$. Να βρεθεί η πλευρά του λ_ν και το εμβαδόν του E_ν.

3. Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα R = 8cm και πλευρά $\lambda_\nu = 8\sqrt{2}\,\text{cm}$. Να βρεθεί το απόστημά του α_ν και το εμβαδόν του.

4. Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα AB = 60°, ΒΓ = 90° και ΓΔ = 120°. Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του R οι πλευρές και το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού πολυγώνου είναι 8 ορθές και το εμβαδόν του $6\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Να βρεθεί η ακτίνα του.

2. Σε κύκλο (O,R) και εκατέρωθεν του κέντρου του, θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές του AB και ΓΔ, ώστε AB = R και ΓΔ = $R\sqrt{3}$. Να υπολογισθούν οι μη παράλληλες πλευρές ΑΓ και ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΔΓ, το ύψος του και το εμβαδόν του, ως συνάρτηση του R.

3. Να υπολογιστούν ως συνάρτηση του R η πλευρά λ_{12} και το απόστημα α_{12} ενός κανονικού 12-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R).

4. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν ενός κανονικού δωδεκαγώνου, χωρίς να υπολογίσετε προηγουμένως την πλευρά και το απόστημά του.

Σύνθετα Θέματα

1. Δίνεται κύκλος (O,R) και χορδή του ΓΔ = λ_6. Πάνω σε τυχαία ευθεία ε που διέρχεται από το κέντρο και εκατέρωθεν του O παίρνουμε σημεία Α, Β, ώστε ΟΑ = ΟΒ = α_3. Αν Μ το μέσο της ΓΔ, να αποδείξετε ότι $MA^2 + MB^2 = \lambda_4^2$.

2. Από το σημείο Α εκτός κύκλου (O,R) φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ, ώστε ΑΒ = ΒΓ. Αν ΟΑ = $R\sqrt{7}$ να αποδείξετε ότι ΒΓ = λ_3 και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΓ.

3. Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, ώστε ΑΒ = λ_6 και ΒΓ = λ_3. Αν Μ το μέσο της ΒΓ και Δ το σημείο που τέμνει η προέκταση της ΑΜ τον κύκλο, να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του R, το τμήμα ΜΔ.

Δραστηριότητες

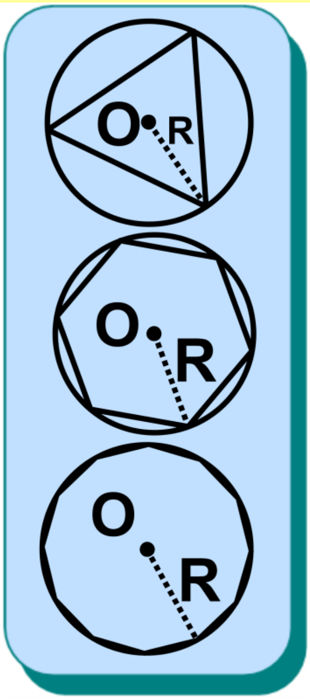
1. Ερμηνεύοντας σε «γεωμετρική γλώσσα» την αριθμητική ισότητα $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, δώστε ένα τρόπο κατασκευής της πλευράς κανονικού 15-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο.

2. Κάνοντας το ίδιο για την αριθμητική ισότητα $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$,να δώσετε ένα δεύτερο τρόπο κατασκευής της πλευράς κανονικού 12-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο .

Μήκος κύκλου

11.4 Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα

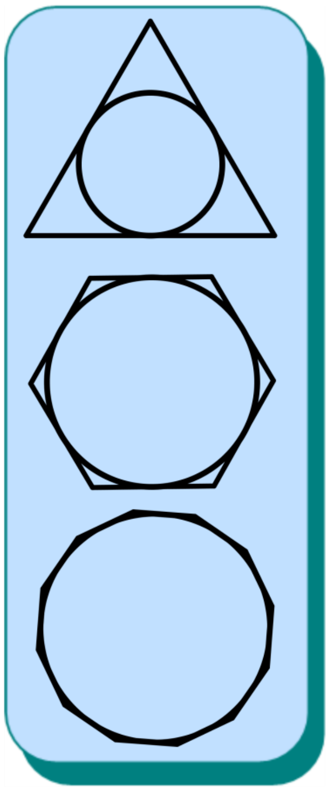
Με τη βοήθεια της περιμέτρου κανονικών πολυγώνων προσεγγίζουμε στη συνέχεια την έννοια του μήκους κύκλου. Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (O,R) (σχ.13) και ας εγγράψουμε σε αυτόν διαδοχικά ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα κανονικό 6-γωνο, ένα κανονικό 12-γωνο και γενικά ένα πολύγωνο με διπλάσιο κάθε φορά πλήθος πλευρών από το προηγούμενο.



Σχήμα 13

Καθώς ο αριθμός των πλευρών των κανονικών πολυγώνων διπλασιάζεται, από το σχήμα φαίνεται ότι: «το κανονικό πολύγωνο τείνει να ταυτισθεί με τον κύκλο».

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και αν αντί εγγεγραμμένων θεωρήσουμε κανονικά πολύγωνα περιγεγραμμένα στον κύκλο (O,R) (σχ.14) και διπλασιάζουμε διαρκώς το πλήθος των πλευρών τους. Αν θεωρήσουμε λοιπόν την ακολουθία ($P_ν$) των περιμέτρων των κανονικών πολυγώνων των εγγεγραμμένων στον κύκλο (O,R) και την ακολουθία ($P'_ν$) των περιμέτρων των περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων γύρω


Σχήμα 14

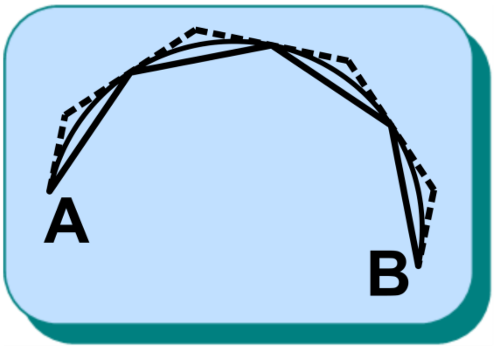
από τον ίδιο κύκλο, τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός L μεγαλύτερος όλων των

όρων της ακολουθίας ($P_ν$) και μικρότερος όλων των όρων της ($P'_ν$) με την εξής ιδιότητα: καθώς το ν διπλασιάζεται, οι όροι των ακολουθιών ($P_ν$) και ($P'_ν$) προσεγγίζουν όλο και περισσότερο τον αριθμό L.
Ο αριθμός L (που είναι το κοινό όριο των ακολουθιών και ανεξάρτητος από την επιλογή κανονικών πολυγώνων) λέγεται **μήκος του κύκλου** (O,R).

Ο Ιπποκράτης ο Χίος απέδειξε πρώτος ότι ο λόγος $\frac{L}{2R}$ του μήκους του κύκλου προς τη διάμετρό του είναι σταθερός, δηλαδή είναι ο ίδιος για κάθε κύκλο. Η σταθερή αυτή τιμή του λόγου $\frac{L}{2R}$ συμβολίζεται διεθνώς με το Ελληνικό γράμμα π (αρχικό της λέξης περιφέρεια) δηλαδή $\frac{L}{2R} = π$, οπότε προκύπτει ότι το μήκος L του κύκλου ακτίνας R δίνεται από τη σχέση $\boxed{L = 2πR}$.
Ο αριθμός π είναι ένας άρρητος, υπερβατικός αριθμός και μια προσέγγισή του, που στην πράξη χρησιμοποιείται, είναι $π \cong 3,14$.
Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιούσε ως προσέγγιση του π το $\frac{22}{7}$.

11.5 Μήκος τόξου

Έστω ένα τόξο ΑΒ ενός κύκλου (O,R) (σχ.15). Μία τεθλασμένη με άκρα τα σημεία Α, Β και τις άλλες κορυφές της σημεία του τόξου λέγεται **εγγεγραμμένη** στο τόξο ΑΒ. Στην περίπτωση που οι πλευρές της είναι ίσες, λέγεται
κανονική τεθλασμένη.



Σχήμα 15

Μια τεθλασμένη με άκρα τα Α, Β και πλευρές εφαπτόμενες του τόξου ΑΒ λέγεται **περιγεγραμμένη** τεθλασμένη στο τόξο ΑΒ. Η έννοια της κανονικής περιγεγραμμένης ορίζεται, όπως στην περίπτωση της εγγεγραμμένης. Το μήκος του τόξου ΑΒ κύκλου (Ο,R) ορίζεται όπως και το μήκος του κύκλου. Δηλαδή το **μήκος του τόξου** ΑΒ είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός ℓ τον οποίο προσεγγίζουν ολοένα και περισσότερο τα μήκη P_ν και P'_ν των κανονικών τεθλασμένων γραμμών των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων αντίστοιχα στο τόξο ΑΒ, καθώς το ν διπλασιάζεται. Επειδή ο κύκλος είναι τόξο 360° με μήκος 2πR, το τόξο 1° θα έχει μήκος $\frac{2\pi R}{360}$ οπότε ένα τόξο μ° θα έχει μήκος $\ell = \frac{\pi R \mu}{180}$ (1).

Επίσης, ένα τόξο κύκλου με μήκος R λέγεται **ακτίνιο** (rad).

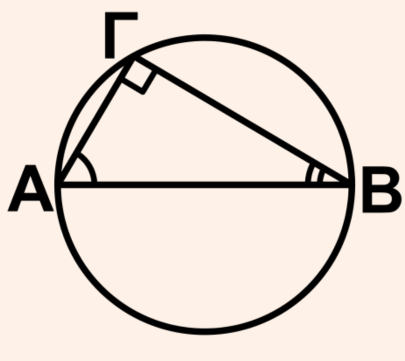
Άρα ένα τόξο α rad έχει μήκος αR, δηλαδή $\ell = \alpha R$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε κύκλο (Ο,R) θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τις χορδές ΑΓ και ΒΓ, ώστε ΑΓ=2cm και ΒΓ=$2\sqrt{3}$ cm. Να βρεθεί το μήκος του κύκλου και τα μήκη των τόξων ΑΓ και ΓΒ, που είναι μικρότερα του ημικυκλίου.

Λύση



Επειδή η ΑΒ είναι διάμετρος, η γωνία ΑΓ ^ Β θα είναι ορθή, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ έχουμε $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$ ή

$(2R)^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2$ ή $4R^2 = 16$, δηλαδή R = 2. Το μήκος L του κύκλου **Σχήμα 16**

θα είναι L = 2πR = 4π cm. Επειδή $ΑΓ = 2 = \frac{ΑΒ}{2}$, θα είναι $\hat{B} = 30°$, οπότε $\overset{\frown}{ΑΓ} = 60°$ και επομένως το μήκος του θα είναι: $\ell_1 = \frac{πRμ}{180} = \frac{π \cdot 2 \cdot 60}{180} = \frac{2}{3}π$ cm

Τέλος, αφού $\hat{A} = 60°$, θα είναι $\overset{\frown}{ΒΓ} = 120°$ και το μήκος του, θα είναι $\ell_2 = \frac{π \cdot 2 \cdot 120}{180} = \frac{4}{3}π$ cm

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Αντιστοιχίστε κάθε μέγεθος της στήλης Α με την τιμή του στη στήλη Β.

Α	Β
Μήκος κύκλου ακτίνας R Μήκος τόξου μ^o (σε κύκλο ακτίνας R) Μήκος τόξου αrad (σε κύκλο ακτίνας R)	αR $2\pi R$ $\frac{\pi R\mu}{360}$ $2\alpha R$ $\frac{\pi R\mu}{180}$

2. Το μήκος L τόξου, κύκλου ακτίνας R με χορδή λ_6 είναι: α. 6R β. πR γ. $\frac{1}{3}\pi R$ δ. 2πR ε. $\frac{1}{3}R$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Πάνω σε ευθεία ε θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Αν L_1, L_2, L_3, και L είναι τα μήκη των κύκλων με διαμέτρους ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $L_1 + L_2 + L_3 = L$.

2. Να βρείτε το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου σε κανονικό εξάγωνο πλευράς 10cm.

3. Να βρεθεί το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά κανονικού 10-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 5cm.

4. Όταν ένα ποδήλατο διανύει μια απόσταση, ο ένας τροχός του που έχει ακτίνα R κάνει ν στροφές, ενώ ο άλλος, που έχει ακτίνα ρ κάνει 2ν στροφές. Να αποδείξετε ότι R = 2ρ.

5. Δίνεται κύκλος (O, R) και τα διαδοχικά του σημεία Α, Β, Γ, ώστε να είναι ΑΒ = $R\sqrt{2}$ και ΒΓ = $R\sqrt{3}$. Να βρεθούν τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ, ως συνάρτηση του R.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Με διάμετρο την ακτίνα ΟΑ ενός κύκλου (O, R) γράφουμε κύκλο (Κ) και από το Ο φέρουμε ημιευθεία που τέμνει τον κύκλο (Ο) στο Γ και τον κύκλο (Κ) στο Δ. Να αποδείξετε ότι τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΓ}$ και $\overset{\frown}{ΑΔ}$ έχουν ίσα μήκη.

2. Να αποδείξετε ότι το μήκος του κύκλου, που εφάπτεται σε δύο ομόκεντρους κύκλους, ισούται με το ημιάθροισμα ή την ημιδιαφορά των μηκών αυτών, όταν αντίστοιχα ο κύκλος αυτός περιέχει στο εσωτερικό του ή όχι το μικρότερο κύκλο.

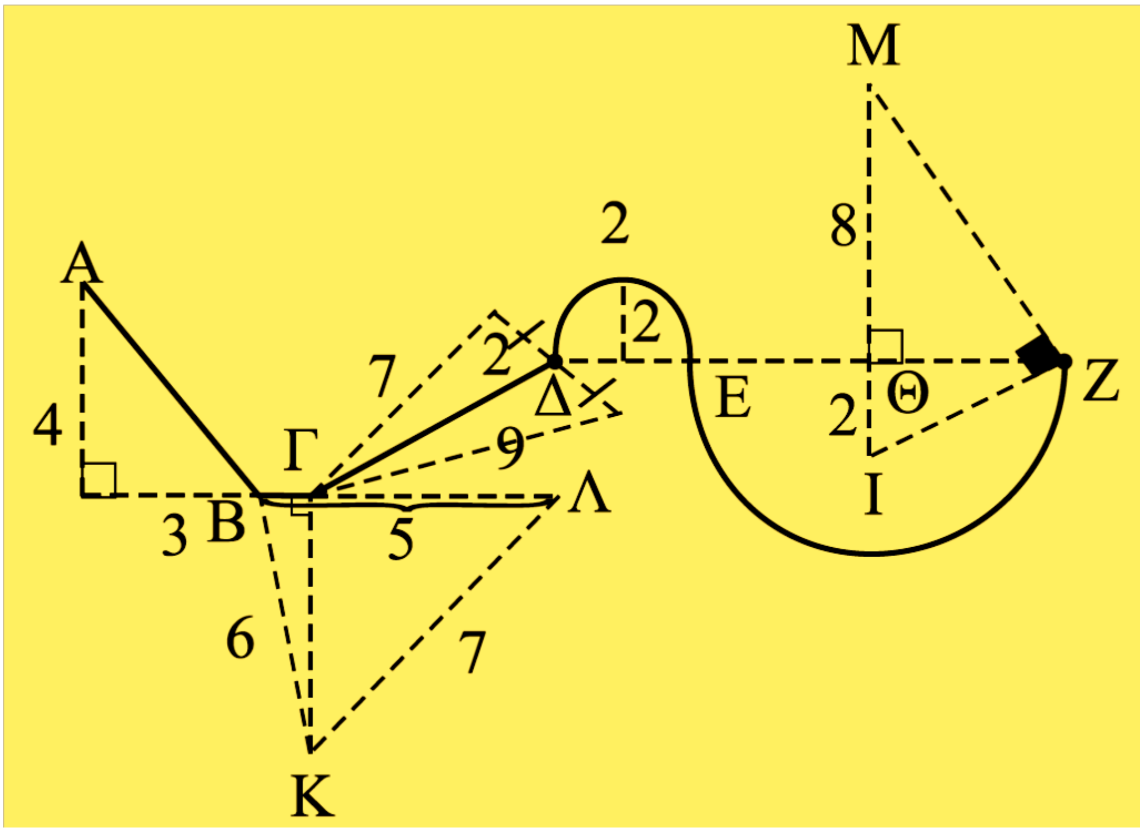
3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με
α = 13cm, β = 14cm και γ = 15cm. Να βρείτε το μήκος
i) του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου,
ii) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Σύνθετα Θέματα

1. Δίνεται ημικύκλιο (O,R) διαμέτρου ΑΒ. Με διαμέτρους τις ΑΟ και ΟΒ γράφουμε στο εσωτερικό του πρώτου ημικύκλια. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου, ο οποίος εφάπτεται των τριών αυτών ημικυκλίων, ως συνάρτηση του R.

2. Δίνεται τεταρτοκύκλιο $\overset{\frown}{ΟΑΒ}$. Με διάμετρο την ΟΑ γράφουμε στο εσωτερικό του τεταρτοκυκλίου, ημικύκλιο και στη συνέχεια γράφουμε κύκλο (Κ) που εφάπτεται στο ημικύκλιο, στην πλευρά ΟΒ και στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$. Να αποδείξετε ότι το μήκος του κύκλου (Κ) ισούται με το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$.

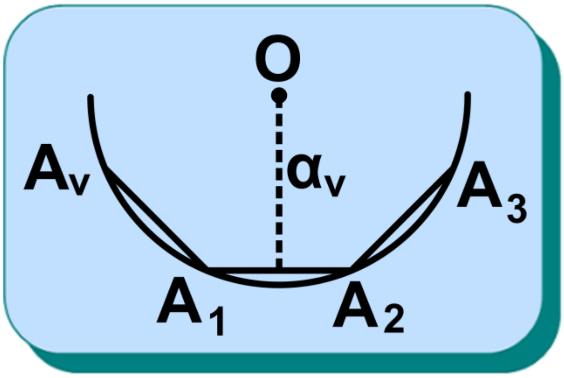
3. Να βρείτε το μήκος της γραμμής ΑΒΓΔΕΖ του παρακάτω σχήματος.



Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

11.6 Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα

Έστω ένας κύκλος (Ο,R). Ο κύκλος μαζί με τα εσωτερικά του σημεία αποτελούν τον **κυκλικό δίσκο** με κέντρο Ο και ακτίνα R. Στην παράγραφο 11.4 είδαμε ότι τα εγγεγραμμένα ή τα περιγεγραμμένα σε έναν κύκλο κανονικά



Σχήμα 17

πολύγωνα τείνουν να ταυτισθούν με τον κύκλο, καθώς το πλήθος των πλευρών τους διπλασιάζεται. Ο μοναδικός θετικός αριθμός Ε προς τον οποίο πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο, τα εμβαδά των εγγεγραμμένων και των περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων, λέγεται **εμβαδόν του κυκλικού δίσκου** ή απλούστερα **εμβαδόν του κύκλου**. Επειδή ο Ε προσεγγίζεται από το εμβαδόν εγγεγραμμένων ή περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων, ας θεωρήσουμε ένα κανονικό ν-γωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο,R). Τότε το εμβαδόν E_ν δίνεται από τον τύπο

$$E_\nu = \frac{1}{2}P_\nu \alpha_\nu \qquad (1).$$

Από το σχ.17 φαίνεται ότι καθώς το ν διπλασιάζεται το α_ν προσεγγίζει την ακτίνα R και επειδή το P_ν προσεγγίζει το μήκος L του κύκλου, από την (1) προκύπτει ότι το E_ν προσεγγίζει το

$$\frac{1}{2}L \cdot R = \frac{1}{2}2\pi R \cdot R = \pi R^2$$

Έτσι έχουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

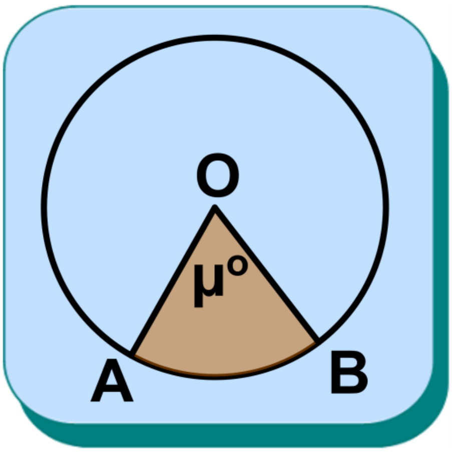
Το εμβαδόν Ε ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R δίνεται από τη σχέση $E = \pi R^2$.

11.7 Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

● Κυκλικός Τομέας

Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο,R) και μία επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ (σχ.18).

Το σύνολο των κοινών σημείων της επίκεντρης γωνίας $A\hat{O}B$ και του κυκλικού δίσκου (Ο,R) λέγεται **κυκλικός τομέας** κέντρου Ο και ακτίνας R. Ο κυκλικός αυτός τομέας συμβολίζεται ΟΑΒ . Αν η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ είναι μ^o, λέμε ότι και ο κυκλικός τομέας ΟΑΒ είναι μ^o.



Σχήμα 18

Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ορίζεται ανάλογα με το

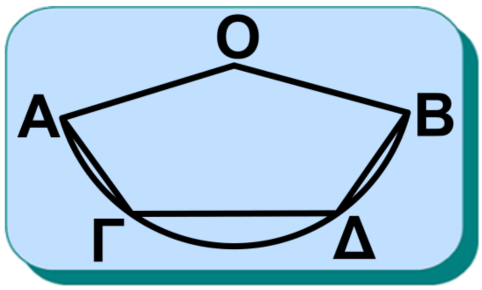
εμβαδόν του κύκλου και συμβολίζεται (ΟΑΒ).
Επειδή ο κυκλικός δίσκος είναι κυκλικός τομέας 360^o με εμβαδόν πR^2, ο κυκλικός τομέας 1° έχει εμβαδό $\frac{\pi R^2}{360}$ και άρα ένας τομέας μ^o θα έχει εμβαδόν $\frac{\pi R^2 \mu}{360}$.

Ώστε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα ΟΑΒ μ^o και ακτίνας R δίνεται από την ισότητα:

$$(OAB)=\frac{\pi R^2 \mu}{360}.$$

Επίσης, επειδή ο κυκλικός δίσκος (Ο, R) είναι τομέας 2π rad με εμβαδόν πR^2, ένας τομέας α rad θα έχει εμβαδόν

$$\frac{\pi R^2}{2\pi}\cdot \alpha=\frac{1}{2}\alpha R^2.$$



Σχήμα 19

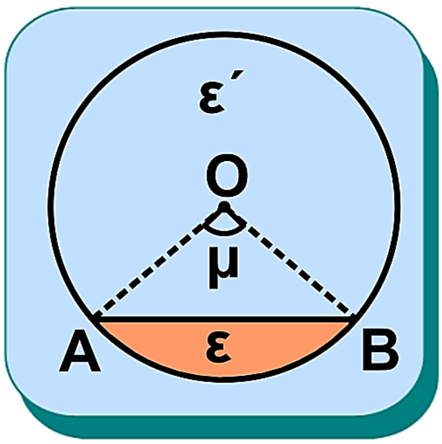
Επομένως, το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα ΟΑΒ α rad και ακτίνας R δίνεται από την ισότητα

$$(OAB)=\frac{1}{2}\alpha R^2$$

- **Κυκλικό τμήμα**

Έστω ένας κύκλος (Ο,R) και μια χορδή του ΑΒ (σχ.20). Η ΑΒ χωρίζει τον κυκλικό δίσκο σε δύο μέρη που βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής.

Καθένα από αυτά τα μέρη λέγεται **κυκλικό τμήμα.** Το εμβαδόν ε του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ υπολογίζεται με τη βοήθεια της ισότητας,



Σχήμα 20

$$\varepsilon=(OAB)-(OAB)$$

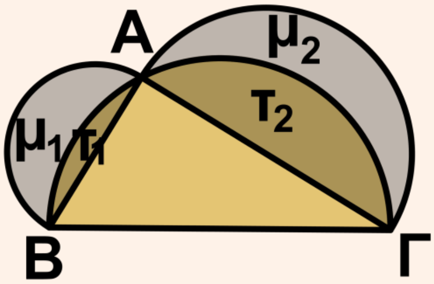
δηλαδή αφαιρώντας από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΒ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η (Μηνίσκοι του Ιπποκράτη)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°). Με διαμέτρους ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ γράφουμε ημικύκλια στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α). Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων μηνίσκων είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μηνίσκος είναι το σχήμα που «περικλείεται» από δύο τόξα που έχουν κοινή χορδή και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της).

Απόδειξη



Σχήμα 21

Συμβολίζουμε με μ_1, μ_2 τα εμβαδά των σχηματιζόμενων μηνίσκων, τ_1, τ_2 τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων με χορδές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, στο ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ. Έχουμε

$$\mu_1 = (\mu_1 + \tau_1) - \tau_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \tau_1 = \frac{1}{8}\pi AB^2 - \tau_1 = \text{και}$$

$$\mu_2 = (\mu_2 + \tau_2) - \tau_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{A\Gamma}{2}\right)^2 - \tau_2 = \frac{1}{8}\pi AB^2 - \tau_2 =,$$

από τις οποίες, χρησιμοποιώντας και τη σχέση $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ βρίσκουμε

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{8}\pi\left(AB^2 + A\Gamma^2\right) - \tau_2 = \frac{1}{8}\pi\left(B\Gamma^2\right) - (\tau_1 + \tau_2) =$$

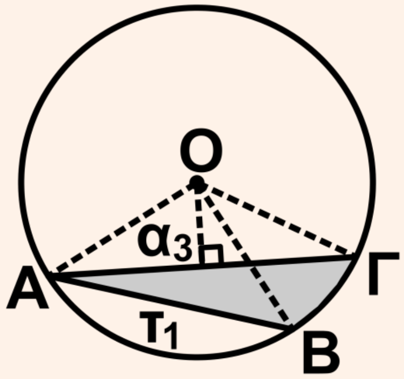
$$= \frac{1}{8}\pi\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 - (\tau_1 + \tau_2) = (AB\Gamma).$$

ΣΧΟΛΙΟ

Επειδή $\mu_1 + \mu_2 =$ (ΑΒΓ) και κάθε τρίγωνο τετραγωνίζεται, προκύπτει ότι το άθροισμα $\mu_1 + \mu_2$ τετραγωνίζεται. Οι μηνίσκοι αυτοί αποτελούν το πρώτο μη ευθύγραμμο σχήμα, το οποίο τετραγωνίσθηκε από τον Ιπποκράτη τον Χίο (γεννήθηκε περί το 470 π.Χ.). Ο Ιπποκράτης επίσης πέτυχε τον τετραγωνισμό και άλλων δύο περιπτώσεων μηνίσκων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δίνεται κύκλος (O,R) και δυο χορδές του $AB = R\sqrt{2}$ και $A\Gamma = R\sqrt{3}$ (σχ.22). Να υπολογισθεί η περίμετρος και το εμβαδόν Ε του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, ως συνάρτηση του R.



Σχήμα 22

Λύση

● Επειδή $AB = R\sqrt{2}$ και $A\Gamma = R\sqrt{2}$, έχουμε αντίστοιχα ΑΒ=λ_4 και ΑΓ=λ_3, οπότε $A\hat{O}B = 90°$ και $A\hat{O}\Gamma = 120°$ και επομένως $B\hat{O}\Gamma = 30°$. Έτσι το μήκος ℓ του τόξου ΒΓ είναι $\ell = \frac{\pi R \cdot 30}{180} = \frac{\pi R}{6}$. Άρα η περίμετρος S του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$S = R\sqrt{2} + R\sqrt{3} + \frac{\pi R}{6} = R(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}).$$

● Για το εμβαδόν Ε έχουμε: $E = (OA\Gamma) - (OA\Gamma) - \tau_1$ (1), όπου τ_1 το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος με χορδή ΑΒ. Έχουμε: $(OA\Gamma) = \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$,

$$(OA\Gamma) = \frac{1}{2}\lambda_3\alpha_3 = \frac{1}{2}R\sqrt{3}\frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

και $\tau_1 = (OAB) - (OAB) = \dfrac{\pi R^2 \cdot 90}{360} - \dfrac{1}{2}\lambda_4\alpha_4 =$

$$= \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2}R\sqrt{2}\frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2}R\sqrt{2}\frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2},$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε ότι $E = \dfrac{R^2}{12}(\pi + 6 - 3\sqrt{3})$.

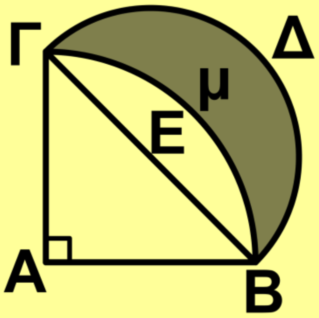
11.8 Τετραγωνισμός κύκλου

Τετραγωνισμός κύκλου λέγεται η κατασκευή, με κανόνα και διαβήτη, ενός τετραγώνου ισοδύναμου με το δοσμένο κύκλο. Έστω R η ακτίνα ενός κύκλου και E το εμβαδόν του. Επειδή $E = \dfrac{1}{2}L \cdot R$, όπου L το μήκος του κύκλου, προκύπτει ότι ο κύκλος είναι ισοδύναμος με τρίγωνο, που έχει βάση L και ύψος R. Κάθε τρίγωνο όμως είναι ισοδύναμο με τετράγωνο. Επομένως ο τετραγωνισμός του κύκλου ανάγεται στην κατασκευή του L, αφού το R είναι ένα δοσμένο τμήμα. Επειδή όμως L=2πR, η κατασκευή του ανάγεται στην κατασκευή τμήματος μήκους π (αφού για $R = \dfrac{1}{2}$ είναι L = π). Για να είναι η κατασκευή αυτή δυνατή, όπως έχει αποδειχθεί, θα έπρεπε ο π να είναι ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές, δηλαδή αλγεβρικός αριθμός, βαθμού 2^{ν}, όπου ν φυσικός.

Όμως, ο Γερμανός Μαθηματικός Lindemann, το 1882, (ιστορικό σημείωμα, σελ. 254) απέδειξε ότι ο π δεν είναι αλγεβρικός αριθμός αλλά υπερβατικός και επομένως δεν κατασκευάζεται γεωμετρικά. Αποδείχθηκε έτσι το αδύνατο της γεωμετρικής λύσης του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου.

Δραστηριότητα

Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, το ΔΒΓ ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ και το ΓΕΒ τόξο του κύκλου (Α, ΑΒ). Να αποδείξετε ότι ο σχηματιζόμενος μηνίσκος τετραγωνίζεται.
(Απάντηση: (μ)= (ΑΒΓ))



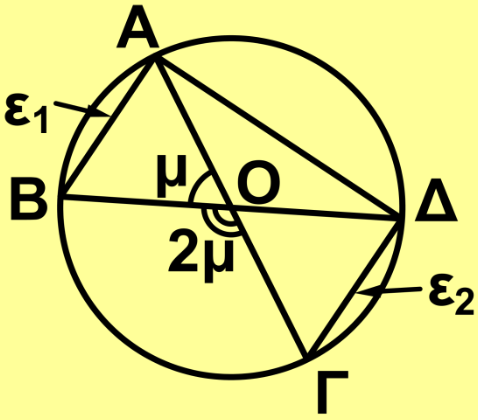
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Αντιστοιχίστε κάθε μέγεθος της στήλης Α με την τιμή του στη στήλη Β.

Α	Β
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R	$2\pi R^2$
	$\pi R^2 \frac{\mu}{180}$
Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° (σε κύκλο ακτίνας R)	πR^2
	$\frac{1}{2}\alpha R^2$
Εμβαδόν κυκλικού τομέα α rad (σε κύκλο ακτίνας R)	$\pi R^2 \frac{\mu}{360}$

2. Με βάση το παρακάτω σχήμα χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



i) $(ΟΑΒ) = (ΟΓΔ)$ Σ Λ

ii) $(ΟΒΓ) = (ΟΔΑ)$ Σ Λ

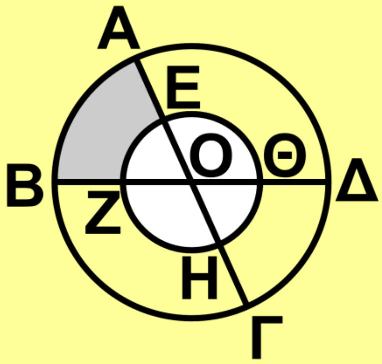
iii $(ΟΒΓ) = 2(ΟΑΒ)$ Σ Λ

iv) $(ΟΑΔ) = 2(ΟΑΒ)$ Σ Λ

v) $ε_1 = ε_2$ Σ Λ

vi) $ΑΒ = λ_6$ Σ Λ

3. Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν δύο ομόκεντροι κύκλοι με ακτίνες ΟΕ=R και ΟΑ=2R. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



i) $\ell_{ΑΒ} = \ell_{ΓΔ}$ Σ Λ

ii) $\ell_{ΑΒ} = \ell_{ΕΖ}$ Σ Λ

iii $\ell_{ΑΒ} = 2\ell_{ΓΔ}$ Σ Λ

iv) $(ΑΒΖΕ) = (ΓΔΘΗ)$ Σ Λ

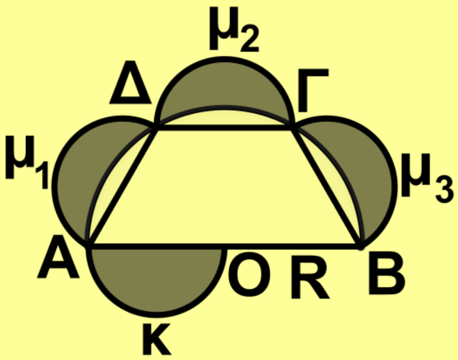
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε αυτόν. Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

2. Δίνεται κύκλος (Κ) και τόξο του $AB = 60°$. Αν το τόξο ΑΒ έχει μήκος 4π cm, να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου (Κ).

3. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Γράφουμε τα τόξα των κύκλων (Α, α), (Β, α) και (Γ, α) που περιέχονται στις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

4. Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιαστεί ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ=2R και εξωτερικά του τα ίσα ημικύκλια με διαμέτρους ΟΑ, ΑΔ, ΔΓ και ΓΒ.



Αν (μ_1), (μ_2), (μ_3) είναι τα εμβαδά των τριών σχηματιζόμενων μηνίσκων και (κ) το εμβαδόν του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι $(\mu_1)+(\mu_2)+(\mu_3)+(\kappa) = (ΑΒΓΔ)$.

5. Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο στα σημεία Α, Β και Γ. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, ως συνάρτηση του R.

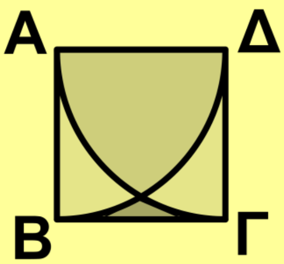
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ακτίνα του ΟΑ. Στην προέκταση της ΟΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Β, ώστε ΟΑ = ΑΒ. Αν ΒΓ είναι το εφαπτόμενο τμήμα που

άγεται από το Β προς τον κύκλο, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

2. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και τα τόξα ΒΔ και ΑΓ των κύκλων (Α,α) και (Δ,α) αντίστοιχα.

Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου.



3. Δυο ίσοι κύκλοι ακτίνας R έχουν διάκεντρο ίση με R $\sqrt{2}$. Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.

4. Δίνεται ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και στο εσωτερικό του τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΓ και ΓΒ, όπου Γ σημείο της διαμέτρου ΑΒ. Η κάθετος της ΑΒ στο Γ τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων **(άρβηλος του Αρχιμήδη)** είναι ίσο με το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου ΓΔ.

5. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και τόξο του $AB = 60°$. Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου στον κυκλικό τομέα ΟΑΒ.

Σύνθετα θέματα

1. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι αντίστοιχα πλευρές κανονικού εξαγώνου και ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο .Να υπολογισθούν:

i) το μήκος της πλευράς ΑΓ,

ii) ο λόγος των εμβαδών του τριγώνου ΑΒΓ και του κύκλου (Ο,R)

iii) το εμβαδόν των τριών κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ και περιέχονται στις αντίστοιχες κυρτές γωνίες.

2. Δίνεται κύκλος (O,R). Με κέντρο τυχαίο σημείο του και ακτίνα την πλευρά του τετραγώνου του εγγεγραμμένου σε αυτόν, γράφουμε κύκλο. Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κυκλικών δίσκων.
3. Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας R έχουν διάκεντρο ίση με R $\sqrt{3}$. Να βρείτε, ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.
4. Δίνεται κύκλος (O, R) και μια διάμετρός του ΑΒ. Με κέντρο το μέσο Γ του ενός ημικυκλίου και ακτίνα ΓΑ γράφουμε κύκλο, ο οποίος ορίζει με το άλλο ημικύκλιο τον μηνίσκο, έστω μ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του μ ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

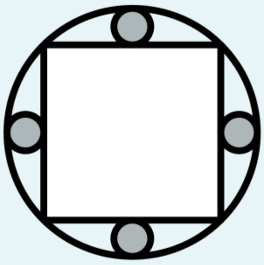
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω Κ, Λ, Μ, Ν, Ρ, Σ τα μέσα των πλευρών του.
i) Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝΡΣ είναι κανονικό εξάγωνο με κέντρο το O.
ii) Να αποδείξετε ότι
(ΚΛΜΝΡΣ) = $\frac{3}{4}$(ΑΒΓΔΕΖ).
iii) Να βρεθεί, ως συνάρτηση του R, το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου στο ΚΛΜΝΡΣ.
2. Έστω κύκλος (O, R) και μία χορδή του ΑΒ=λ_ν. Αν ο κύκλος (O, α_4) τέμνει τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ στα Α΄ και Β΄ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι
i) το εμβαδόν ε του μικτόγραμμου τετραπλεύρου ΑΒΒ΄Α΄ (με δύο πλευρές τόξα) ισούται με το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑ΄Β΄ και
ii) $2\nu\varepsilon=\pi R^2$.
3. Με βάσεις τις πλευρές ενός ν-γώνου και στο εξωτερικό του κατασκευάζουμε ν ορθογώνια με το ίδιο

ύψος υ. Συνδέουμε τις εξωτερικές πλευρές τους με τόξα κύκλων που γράφουμε με κέντρα τις κορυφές και ακτίνα υ. Να βρεθεί το άθροισμα των εμβαδών των ν κυκλικών τομέων που σχηματίζονται.

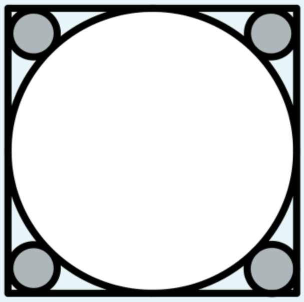
4. Στο εσωτερικό τετραγώνου γράφουμε τέσσερις ίσους κύκλους που εφάπτονται μεταξύ τους εξωτερικά και εφάπτονται των πλευρών του τετραγώνου. Να υπολογισθεί, ως συνάρτηση της πλευράς α του τετραγώνου το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τους τέσσερις κύκλους.

5. Στο κυκλικό οικόπεδο ακτίνας R = 40m, του παρακάτω σχήματος, το εγγεγραμμένο τετράγωνο έχει το μέγιστο δυνατό εμβαδόν και πρόκειται να πλακοστρωθεί. Στα τέσσερα κυκλικά τμήματα θα τοποθετηθούν ισάριθμες κυκλικές γλάστρες με το μέγιστο δυνατό εμβαδόν επίσης, ενώ το υπόλοιπο θα φυτευθεί με γκαζόν. Να βρεθεί το εμβαδόν:



i) του μέρους που θα πλακοστρωθεί, ii) του μέρους που θα καλύπτουν οι γλάστρες, iii) του μέρους που θα φυτευθεί με γκαζόν.

6. Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο έχει πλευρά α = 50 m.



Να βρεθεί:

i) το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου,

ii) το εμβαδόν καθενός από τους τέσσερις κύκλους που εφάπτονται εσωτερικά του τετραγώνου και εξωτερικά του εγγεγραμμένου κύκλου.

7. Να βρεθεί η μικρότερη γωνία που σχηματίζουν οι προεκτάσεις των πλευρών ενός κανονικού δεκαπενταγώνου.

8. Θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και σημείο της Γ. Μεταβλητή ημιευθεία Γx κάθετη στην ΑΒ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Σ. Πάνω στη Γx παίρνουμε σημείο Μ, ώστε να ισχύει $AM^2 = 2A\Sigma^2$ και φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΜ στο Μ, που τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Δ. Τότε

i) να αποδείξετε ότι ΑΔ=2ΑΒ,

ii) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ, καθώς η ημιευθεία Γx μεταβάλλεται,

iii) να αποδείξετε ότι το μήκος της γραμμής που γράφει το Μ ισούται με το μήκος του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ.

9. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΒΟΓ=2R, τυχαίο σημείο του Δ και το μέσο Α του τόξου ΒΔ.

i) Αν ε_1, ε_2 είναι τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων των χορδών ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (O\Gamma\Delta)$, όπου $(O\Gamma\Delta)(O\Gamma C\Delta)$ το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΓΔ.

ii) Να αποδείξετε ότι ο μέγιστος κύκλος που εγγράφεται στο κυκλικό τμήμα χορδής ΑΓ (δηλαδή βρίσκεται στο εσωτερικό του κυκλικού τμήματος και εφάπτεται στο τόξο και τη χορδή), είναι αυτός που εφάπτεται στο μέσο της χορδής ΑΓ.

iii) Έστω E_1, E_2 τα εμβαδά των μέγιστων κύκλων των εγγεγραμμένων στα κυκλικά τμήματα χορδών ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα,

α) Να αποδείξετε ότι $E_1 + E_2 \le \dfrac{\pi R^2}{4}$.

β) Αν $B\Delta = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι

$$E_1 + \left(7 + 4\sqrt{3}\right)E_2 = \frac{\pi R^2}{8}.$$

10. **Δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα Ο και Ο΄ αντίστοιχα εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Φέρουμε δύο ακτίνες ΟΒ και Ο΄Β΄ παράλληλες μεταξύ τους και στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΟΟ΄. Κατασκευάζουμε εξωτερικά από τους δύο κύκλους το ημικύκλιο διαμέτρου ΒΒ΄. Να αποδείξετε ότι:**

(i) $\left(\text{ΟΑΒ}\right)=\left(\text{ΟΒ΄Α΄}\right)$**, όπου Α΄ το αντιδιαμετρικό του Α στον Ο΄,**

(ii) $\left(\text{ΟΑΒ}\right)+\left(\text{Ο΄ΑΒ΄}\right)=\left(\text{Ο΄ΑΑ΄}\right)$**,**

(iii) $\left(\text{ΟΑΒ}\right)+\left(\text{Ο΄ΑΒ΄}\right)=\left(\text{ΚΒΒ΄}\right)$**, όπου Κ το μέσο του ΒΒ΄,**

(iv) το εμβαδόν ε του καμπυλόγραμμου σχήματος με πλευρές τα τόξα ΑΒ, ΒΒ΄ και ΑΒ΄ είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΟΒΒ΄Ο΄. Αν τα Β,Β΄ κινούνται πάνω στους κύκλους, ώστε οι ακτίνες ΟΒ και Ο΄Β΄ να διατηρούν τις αρχικές ιδιότητες, σε ποια θέση των Β,Β΄ το εμβαδόν ε γίνεται μέγιστο;

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας

Τον 5ο αι. διατυπώθηκαν στην αρχαία Ελλάδα τρία προβλήματα που έμελλε να γίνουν πασίγνωστα. Πρόκειται για το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, της τριχοτόμησης γωνίας και του τετραγωνισμού του κύκλου. Η ιστορία των προβλημάτων αυτών είναι πολύ μεγάλη. Αρκεί να σκεφτεί κανείς ότι τα δύο πρώτα λύθηκαν στις αρχές μόνον του περασμένου αιώνα, ενώ το τρίτο στα τέλη του. Αποδείχθηκε ότι και τα τρία προβλήματα δεν είναι επιλύσιμα με τα μέσα που ορίζονται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, δηλαδή με κανόνα και διαβήτη. Η ιστορική σημασία αυτών των προβλημάτων συνίσταται στο ότι ήταν οι πρώτες αποδείξεις μη επιλυσιμότητας στα μαθηματικά. Αποδείχθηκε ότι ορισμένες κατασκευές ήταν αδύνατον να πραγματοποιηθούν με ορισμένα μέσα (τον κανόνα και το διαβήτη).

Ο διπλασιασμός του κύβου. **Αν συμβολίσουμε με α την ακμή ενός κύβου, τότε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου συνίσταται στο να βρεθεί η ακμή κύβου που να έχει όγκο διπλάσιο από το δεδομένο κύβο, δηλαδή ζητείται να βρεθεί το μέγεθος x, για το οποίο να ισχύει $x^3 = 2α^3$. Η προέλευση του προβλήματος δεν είναι ιστορικά εξακριβωμένη. Σύμφωνα με έναν θρύλο που αναφέρει ο Πλούταρχος, το πρόβλημα ετέθη σε ένα χρησμό που απαιτούσε από τους κατοίκους της Δήλου να διπλασιάσουν το βωμό του Απόλλωνα προκειμένου να σταματήσει η επιδημία που είχε εξαπλωθεί στο νησί. Γι. αυτό ονομάζεται και Δήλιο πρόβλημα. Ο πρώτος που το μελέτησε ήταν ο Ιπποκράτης ο Χίος, που το ανήγαγε στην εύρεση δύο μέσων αναλόγων σε συνεχή αναλογία μεταξύ δύο δοσμένων μεγεθών, δηλαδή στην**

εύρεση δύο μεγεθών x, y, τέτοιων, ώστε $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2\alpha}$.
Αργότερα, ο Αρχύτας ο Ταραντίνος έδειξε ότι το μέγεθος x μπορεί να βρεθεί ως τομή, ενός κώνου, ενός κυλίνδρου και της επιφάνειας που λαμβάνεται από την περιστροφή μιας περιφέρειας περί την εφαπτομένη της, δηλ. της επιφάνειας «κρίκου» (torus) μηδενικού ανοίγματος. Η λύση του Αρχύτα αποδείκνυε την ύπαρξη δύο μέσων αναλόγων μεταξύ δύο οιωνδήποτε μεγεθών, ωστόσο η μέθοδός του ξέφευγε από τα καθιερωμένα μέσα του κανόνα και του διαβήτη.
Οι μεταγενέστερες αναζητήσεις στράφηκαν στην εύρεση εναλλακτικών τρόπων κατασκευής των μέσων αναλόγων των δύο δεδομένων μεγεθών που απαιτούνται από την αναλογία του Ιπποκράτη:

$$\alpha y = x^2 \text{ και } xy = \alpha(2\alpha) \text{ ή } y^2 = (2\alpha)x$$

Η κατασκευή των συντεταγμένων του σημείου τομής των δύο αυτών γεωμετρικών τόπων δίνει τη λύση του προβλήματος. Όμως η μελέτη τέτοιων τόπων δεν ήταν απλό πράγμα στην αρχαιότητα. Πρώτα απ. όλα έπρεπε να αποδειχθεί ότι οι τόποι αυτοί ήταν συνεχείς καμπύλες, προκειμένου να μιλήσουμε για σημείο τομής. Μόνον ο Μέναιχμος (δεύτερο ήμισυ του 4ου αι.) μπόρεσε να παραστήσει τους τόπους αυτούς ως επίπεδες τομές κώνων εκ περιστροφής. Είναι πιθανό ο στερεομετρικός αυτός προσδιορισμός του σημείου τομής, όπως και στην περίπτωση του Αρχύτα, να έπαιζε ρόλο απόδειξης της ύπαρξης και της συνέχειας των υπό μελέτη γεωμετρικών τόπων. Οι αρχαίοι Έλληνες αντιμετώπισαν τον πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου από διάφορες σκοπιές. Ο Ευτόκιος αναφέρει περί τις 12 προτεινόμενες λύσεις. Από τις λύσεις αυτές ορισμένες είναι μηχανικές, όπως π.χ. του Ερατοσθένη (3ος αι. π.Χ.) που

πραγματοποιείται με τη βοήθεια ενός μηχανικού οργάνου, του «μεσολάβου», ή η λύση που αποδίδεται στον Πλάτωνα. Άλλες πάλι γίνονται με την εισαγωγή νέων καμπυλών, όπως οι λύσεις του Διοκλή και του Νικομήδη, που πραγματοποιούνται με τη βοήθεια των φερώνυμων καμπυλών. Πάντως μέχρι την εποχή του Ευκλείδη (τέλη του 4ου αι.) πρέπει να είχε εδραιωθεί η πεποίθηση ότι το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου δεν είναι επιλύσιμο με κανόνα και διαβήτη.

Η πρώτη προσπάθεια να αποδειχθεί η μη επιλυσιμότητα της ειδικής περίπτωσης κυβικής εξίσωσης $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, με τη βοήθεια των τετραγωνικών αρρήτων του Βιβλίου Χ των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, έγινε από το Λεονάρδο της Πίζας. Μετά από αυτόν πέρασαν τετρακόσια περίπου χρόνια μέχρι που ο Ντεκάρτ να διατυπώσει το γενικό κριτήριο επιλυσιμότητας μιας κυβικής εξίσωσης: οι ρίζες μιας κυβικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές μπορούν να κατασκευασθούν με κανόνα και διαβήτη, όταν η εξίσωση είναι αναγώγιμη,δηλαδή έχει τουλάχιστον μία ρητή ρίζα (ο Ντεκάρτ υπέθετε ότι όλες οι ρίζες είναι πραγματικές). Το 1637 διατύπωσε την υπόθεση ότι η κατασκευή τμήματος ίσου με $\sqrt[3]{2}$, δηλαδή της λύσης της εξίσωσης $x^3 = 2α^3$ για $α = 1$, δεν είναι δυνατή με κανόνα και διαβήτη.

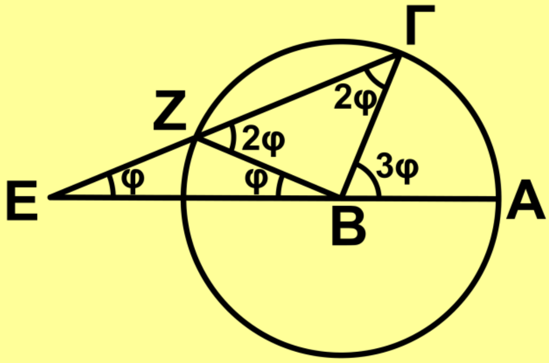
Όμως τη μη επιλυσιμότητα του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου με κανόνα και διαβήτη απέδειξε το 1837 ο Π. Βάντσελ (Pierre Laurent Wantzell, 1814-1848).

Η τριχοτόμηση γωνίας. Στο πρόβλημα αυτό ζητείται να διαιρεθεί μια γωνία σε τρία ίσα μέρη. Συνυφασμένες με τη λύση του προβλήματος αυτού είναι η εφαρμογή από τον Αρχιμήδη της μεθόδου της νεύσης και η εισαγωγή μιας νέας καμπύλης, της τετραγωνίζουσας. Η μέθοδος

της νεύσης συνίσταται στην τοποθέτηση ενός ευθύγραμμου τμήματος ορισμένου μήκους μεταξύ δύο δεδομένων γραμμών έτσι, ώστε τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος να βρίσκονται πάνω στις γραμμές και το ίδιο το τμήμα ή η προέκτασή του να διέρχεται από δεδομένο σημείο.

Οι δεδομένες γραμμές που εξέταζαν οι αρχαίοι γεωμέτρες ήταν συνήθως η ευθεία και η περιφέρεια. Ωστόσο, αν ένα πρόβλημα λύνεται με τη μέθοδο της νέυσης, τότε η φύση του προβλήματος παραμένει ασαφής. Αν το ευθύγραμμο τμήμα κινείται έτσι ώστε το ένα άκρο του να βρίσκεται στη μία από τις δεδομένες γραμμές, ενώ η προέκτασή του διέρχεται από το δεδομένο σημείο, τότε το δεύτερο άκρο θα γράψει καμπύλη (Κ). Η εφαρμογή της μεθόδου της νεύσης ισοδυναμεί με την εύρεση του σημείου τομής της καμπύλης (Κ) με τη δεύτερη δεδομένη γραμμή. Όμως η μέθοδος της νεύσης δεν δίνει καμιά πληροφορία για τη φύση της καμπύλης (Κ), η οποία μπορεί να είναι απλή, ή αρκετά πολύπλοκη. Ίσως για το λόγο αυτό οι αρχαίοι γεωμέτρες απέφευγαν την μέθοδο αυτή.

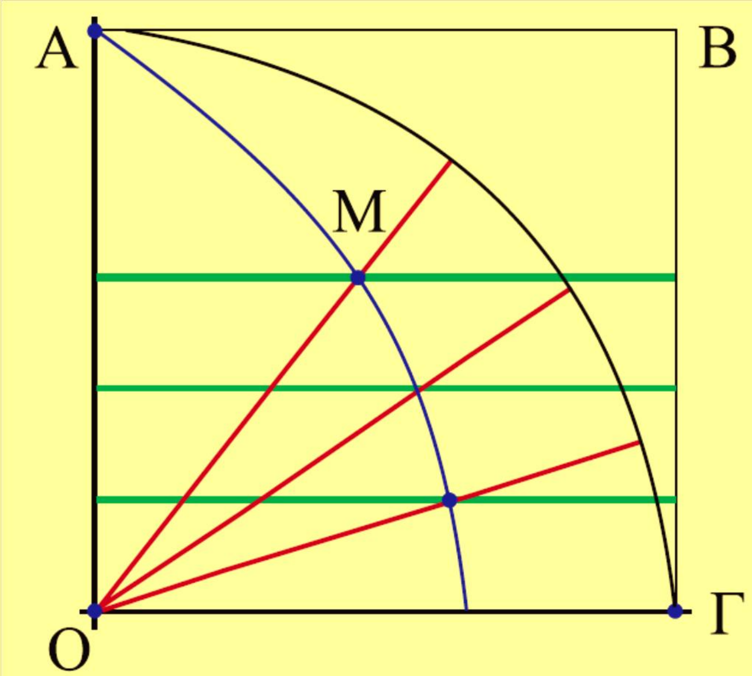
Η τριχοτόμηση γωνίας με τη μέθοδο της **νεύσης** γίνεται ως εξής: Έστω η γωνία $A\hat{B}\Gamma=3\varphi$ (Σχ. 1) που πρέπει να διαιρεθεί σε τρία ίσα μέρη. Γράφουμε κύκλο κέντρου Β, και



Σχ.1

προεκτείνουμε την ΑΒ προς την άλλη μεριά από το κέντρο Β.

Μεταξύ της ευθείας ΒΕ και του κύκλου τοποθετούμε το τμήμα ΕΖ μήκους R, έτσι, ώστε η προέκτασή του να διέρχεται από το σημείο Γ (το σημείο τομής της πλευράς ΒΓ με το κύκλο). Τότε ΖΕ̂Δ = 1/3 ΓΒ̂Α.



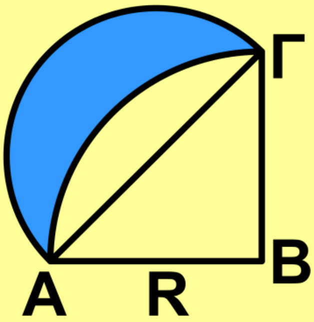
Σχ. 2

Τον 5ο αι. π.Χ. ο Ιππίας ο Ηλείος εισήγαγε με κινηματικό ορισμό μία νέα καμπύλη, την οποία ο Λάιμπνιτς ονόμασε αργότερα τετραγωνίζουσα. Έστω ότι τα τμήματα ΟΑ και ΑΒ (Σχ. 2) αρχίζουν να κινούνται ταυτόχρονα, ώστε το ΟΑ να περιστρέφεται περί το Ο ομοιόμορφα κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου και το ΑΒ να κατέρχεται ομοιόμορφα παραμένοντας παράλληλο προς τον εαυτό του, μέχρις ότου τα δύο τμήματα να καταλήξουν στη θέση ΟΓ ταυτόχρονα. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής Μ των δύο τμημάτων γράφει την τετραγωνίζουσα. Από τον ορισμό της καμπύλης προκύπτει άμεσα ότι οι τεταγμένες της καμπύλης είναι ανάλογες των αντίστοιχων γωνιών $y:y_1 = φ:φ_1$. Με τη βοήθεια της ίδιας καμπύλης μπορεί να λυθεί και το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Τον 10ο αι. ο Θαμπίτ Ιμπν Κούρρα στην πραγματεία του «Διαίρεση της ορθής γωνίας σε τρία ίσα μέρη», ακολουθώντας την παράδοση του Αρχιμήδη, ανάγει το πρόβλημα σε κατασκευή με τη βοήθεια της

νεύσης. Στη μεσαιωνική Αραβική γραμματεία επιχειρείται η σύνδεση του προβλήματος της τριχοτόμησης γωνίας με την άλγεβρα και την τριγωνομετρία. Το 15ο αι. ο αλ-Κασί στην απολεσθείσα «Πραγματεία περί χορδής και ημίτονου» προτείνει μια πρωτότυπη αναδρομική μέθοδο για τη λύση της εξίσωσης της τριχοτόμησης γωνίας, δηλ. της κυβικής εξίσωσης της μορφής $x^3 + q = px$, όπου x=ημ φ, p=3/4, q=(1/4)ημ3φ. Η μέθοδος του αλ-Κασί μας είναι μας είναι γνωστή από την «Πραγματεία» του αλ-Ρουμί (14ος-15ος αι.) και τα σχόλια του Μιρίτ Τσελεμπί στους αστρονομικούς πίνακες του Ούλουγκμπεκ.
Στα τέλη του 16ου αι. ο Φ. Βιέτ στο «Συμπλήρωμα της Γεωμετρίας» απέδειξε ότι η λύση οποιασδήποτε κυβικής εξίσωσης οδηγεί είτε σε νεύση είτε σε τριχοτόμηση γωνίας, και με τη βοήθεια τριγωνομετρικών μέσων βρήκε τη λύση της κυβικής εξίσωσης στη λεγόμενη «μη αναγώγιμη» περίπτωση (ο όρος αυτός εισήχθηκε από τον Καρντάνο για να υποδηλώσει την περίπτωση που η κυβική εξίσωση έχει τρεις πραγματικές λύσεις που εμφανίζονται ως άθροισμα ή διαφορά των αριθμών που σήμερα ονομάζουμε μιγαδικούς). Ο Βιέτ γνώριζε επίσης τις αλγεβρικές εξισώσεις που αντιστοιχούν στη διαίρεση γωνίας όχι μόνο σε τρία, αλλά και σε πέντε ή επτά ίσα μέρη. Πρώτος ο Ντεκάρτ το 1637 εξέφρασε τη γνώμη ότι ο κανόνας και ο διαβήτης είναι ανεπαρκή για τη λύση του προβλήματος αυτού στη γενική περίπτωση. Όμως ολοκληρωμένη απόδειξη της υπόθεσης του Ντεκάρτ δόθηκε μόνον το 1837 από τον Π. Βάντσελ.
Ο τετραγωνισμός του κύκλου. Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου συνίσταται στην κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου με δεδομένο κύκλο. Αν το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου και της τριχοτόμησης γωνίας ανάγεται σε πρόβλημα λύσης

κυβικής εξίσωσης, το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου ανάγεται στην κατασκευή ενός τμήματος ίσου με π. Ο Ιπποκράτης ο Χίος προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα αυτό με τον τετραγωνισμό μηνίσκων.

Ο Ιπποκράτης βρήκε τρία είδη τέτοιων μηνίσκων. Ένας από αυτούς είναι ο μηνίσκος που περικλείεται από το τεταρτοκύκλιο ΒΑΓ και του ημικυκλίου με διάμετρο τη χορδή ΑΓ (σχ. 3). Το εμβαδόν του μηνίσκου αυτού είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 3

Η ιστορία των μηνίσκων είναι αρκετά μεγάλη. Το 1840 ο Κλάουζεν βρήκε άλλους δύο μηνίσκους, αλλά το 1930-40 οι Ρώσοι μαθηματικοί Ν.Γ. Τσεμποταριόφ και ο Α.Β. Ντοροντνόφ, χρησιμοποιώντας μεθόδους της θεωρίας Γκαλουά, απέδειξαν ότι υπάρχουν πέντε είδη μηνίσκων αλλά κανένας δεν τετραγωνίζει τον κύκλο.

Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι συνυφασμένος με την αριθμητική φύση του αριθμού π. Βασιζόμενος στη θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου και κάνοντας χρήση της μεθόδου της εξάντλησης ο Αρχιμήδης στο έργο του «Κύκλου μέτρηση» αποδεικνύει ότι το εμβαδόν κύκλου είναι ισοδύναμο με το εμβαδόν ορθογώνιου τριγώνου, η μία κάθετος του οποίου είναι η ακτίνα της περιφέρειας και η άλλη το μήκος της περιφέρειας.

Αυτό δίνει τη δυνατότητα να αναχθεί το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου στην εύρεση του μήκους της περιφέρειας. Στα τέλη του 18ου αι. ο Ι. Λάμπερτ και ο Α. Λεζάντρ απέδειξαν ότι ο π είναι άρρητος.

Μόλις ο 1882 ο Λίντεμαν (K.L.F. von Lindemann) και ο Σ. Ερμίτ (Charles Hermite, 1822-1901) απέδειξαν ότι ο

αριθμός π είναι υπερβατικός, δηλ. δεν ικανοποιεί καμιά αλγεβρική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές.
Κατά συνέπεια, το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου δεν μπορεί να αναχθεί σε αλγεβρική εξίσωση.
Το θεώρημα του Λίντεμαν αποδεικνύει τη μη επιλυσιμότητα του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Μέτρηση Κύκλου

Κανονικά πολύγωνα

- Όλες οι πλευρές και οι γωνίες του ίσες.
- Εγγράψιμο και περιγράψιμο σε κύκλο
- $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$, $E_\nu = \frac{1}{2}P_\nu \alpha_\nu$ $P_\nu = \nu\lambda_\nu$
- $\omega_\nu = \frac{180^\circ}{\nu}$, $\varphi_\nu = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu}$
- Κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.

ν	3	4	6
λ_ν	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R
α_ν	$\frac{R}{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$

Κύκλος

- Μήκος κύκλου: $L=2\pi R$.
- Μήκος τόξου: $\ell = \frac{\pi R \mu}{180} = \alpha R$
- Εμβαδόν κυκλικού δίσκου: $E=\pi R^2$
- Εμβαδόν κυκλικού τομέα: $(OAB) = \frac{\pi R^2 \mu}{360} = \frac{1}{2}\alpha R^2$

«Διαλογιζόμενος Δάσκαλος» Μ. Γκατζώνης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 4ου τόμου