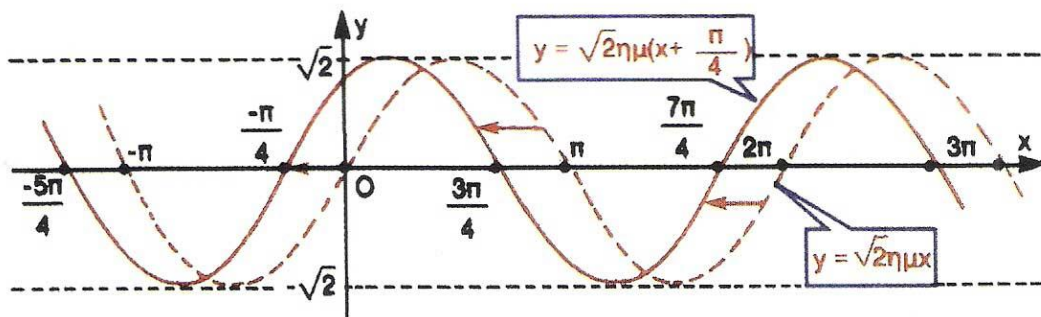


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

# ΑΛΓΕΒΡΑ



Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ  
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ  
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ  
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ  
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ  
ΔΩΡΕΑΝ



# Άλγεβρα

**Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Τόμος 2ος**

**1η ΕΚΔΟΣΗ**



## **Συγγραφική ομάδα:**

- **Ανδρεαδάκης Στυλιανός**  
**Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών**  
**Κατσαργύρης Βασίλειος**
- **Καθηγητής μαθηματικών**  
**Βαρβακείου Πειραμ. Λυκείου**
- **Παπασταυρίδης Στάυρος**  
**Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας**
- **Πολύζος Γεώργιος**  
**Καθηγητής μαθηματικών Β' Λυκείου**  
**Αμαρουσίου**
- **Σβέρκος Ανδρέας**  
**Καθηγητής μαθηματικών Β' Λυκείου**  
**Αγ. Παρασκευής**

**Α' ΕΚΔΟΣΗ: 1991**

**ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ:**

**1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997,  
1998, 2012**

**Η προσαρμογή του βιβλίου στο  
νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε  
από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.**

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ  
ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

**Ομάδα Εργασίας του  
Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής  
Πολιτικής**

**ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ-ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ**

**Γραμμένος Νικόλαος,  
Εκπαιδευτικός**

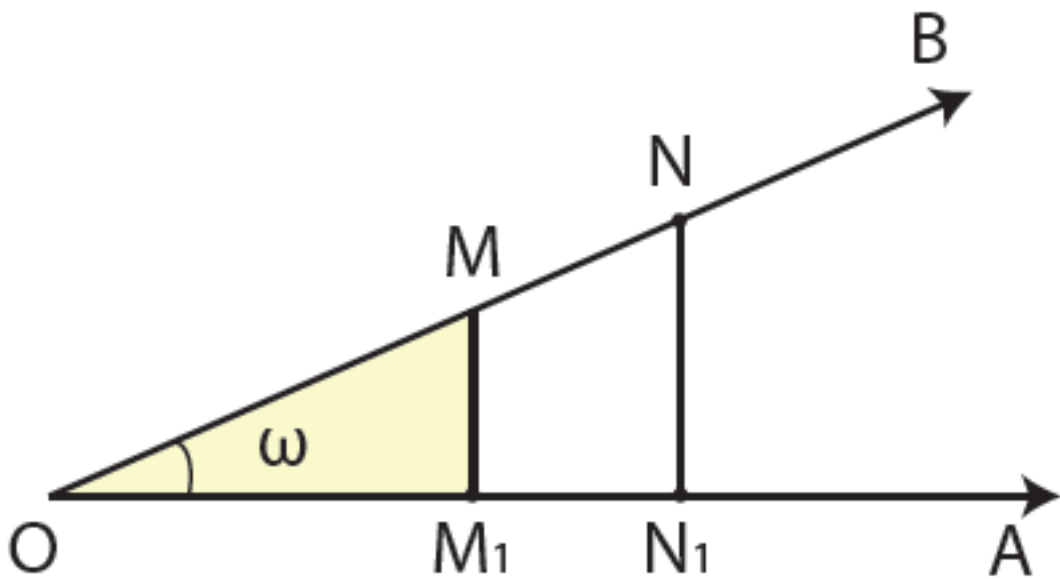
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup> – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

## 3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Έστω οξεία γωνία  $\omega$ . Αν πάνω στη μία από τις δύο πλευρές της γωνίας πάρουμε τυχαία σημεία  $M$  και  $N$  και φέρουμε τις κάθετες  $MM_1$  και  $NN_1$  προς την άλλη πλευρά της γωνίας,

τότε τα τρίγωνα  $\triangle OMM_1$  και  $\triangle ONN_1$  θα είναι όμοια, οπότε θα ισχύει:



$$\frac{(MM_1)}{(OM)} = \frac{(NN_1)}{(ON)}, \quad \frac{(OM_1)}{(OM)} = \frac{(ON_1)}{(ON)} \quad \text{και}$$

$$\frac{(MM_1)}{(OM_1)} = \frac{(NN_1)}{(ON_1)}$$

Επομένως, για τη γωνία  $\omega$  τα πηλίκα

$$\frac{(MM_1)}{(OM)}, \frac{(OM_1)}{(OM)} \quad \text{και}$$



$$\frac{(MM_1)}{(OM_1)}$$

είναι σταθερά, δηλαδή ανεξάρτητα της θέσης του σημείου M πάνω στην πλευρά της γωνίας. Τα πηλίκα αυτά, όπως γνωρίζουμε από Γυμνάσιο, ονομάζονται ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$  και συμβολίζονται με  $\eta\omega$ ,  $\sigma\omega$  και  $\epsilon\omega$ , αντιστοίχως. Δηλαδή, στο ορθογώνιο τρίγωνο

$\triangle M_1 \hat{O} M$ , ισχύει:

$$\eta\omega = \frac{(MM_1)}{(OM)} \left( \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \right)$$

$$\sigma\omega = \frac{(OM_1)}{(OM)} \left( \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \right)$$

$$\varepsilon_{\varphi\omega} = \frac{(MM_1)}{(OM_1)} \left( \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} \right)$$

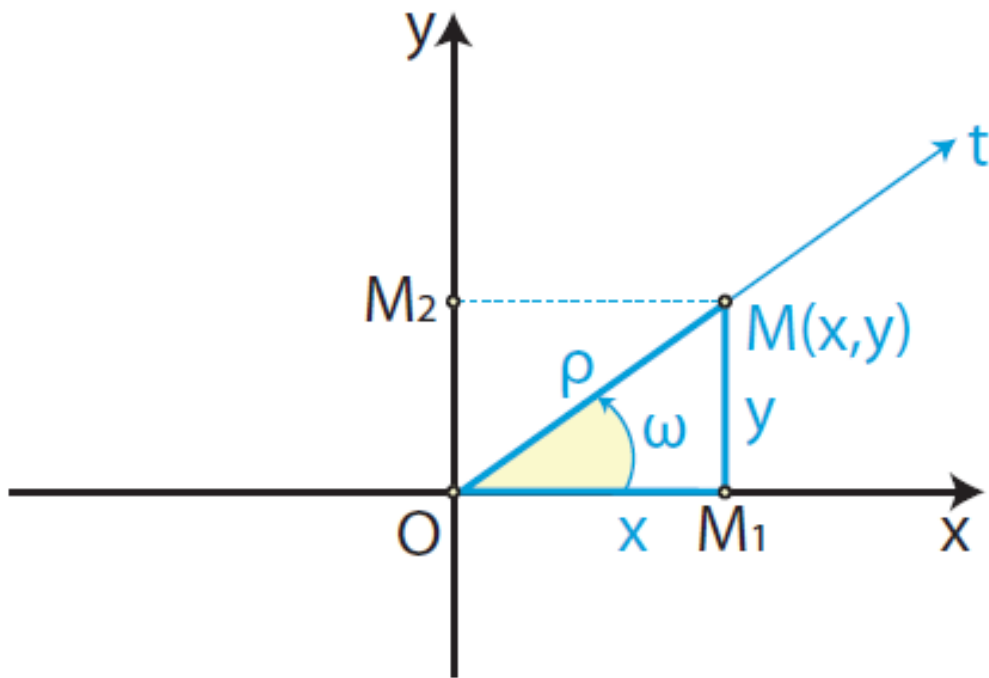
Ορίζουμε ακόμα ως  
 συνεφαπτομένη της οξείας γωνίας  
 $\omega$ , την οποία συμβολίζουμε με  
 $\sigma_{\varphi\omega}$ , το σταθερό πηλίκο

$$\sigma_{\varphi\omega} = \frac{(OM_1)}{(MM_1)} \left( \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}} \right)$$

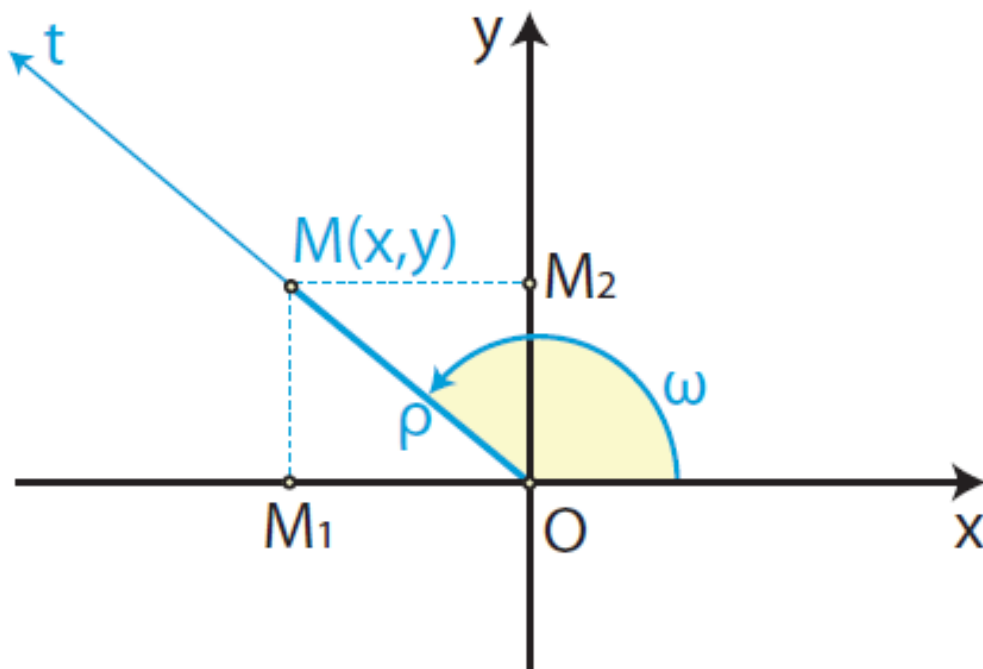
**Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας  $\omega$ ,**  
**με  $0^0 \leq \omega \leq 360^0$**

Έστω  $Oxy$  ένα σύστημα  
 συντεταγμένων στο επίπεδο,  $Ox$  μία  
 ημιευθεία αυτού και  $\omega$  η γωνία που  
 παράγεται από τον ημιάξονα  $Ox$  αν  
 περιστραφεί κατά τη θετική φορά  
 γύρω από το  $O$  μέχρι να συμπίσει  
 για πρώτη φορά με την ημιευθεία  
 $Ot$  (Σχ.  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ). Ο θετικός ημιάξονας  
 $Ox$  λέγεται αρχική πλευρά

της γωνίας  $\omega$ , ενώ η ημιευθεία  $Ot$  λέγεται τελική πλευρά της  $\omega$ .



Σχήμα α'



Σχήμα β'

Πάνω στην τελική πλευρά της γωνίας  $\omega$  παίρνουμε τυχαίο σημείο  $M(x, y)$  και φέρνουμε την κάθετη  $MM_1$  στον άξονα  $x'x$  (Σχ.  $\alpha'$  και  $\beta'$ ). Αν η γωνία  $\omega$  είναι οξεία (Σχ.  $\alpha'$ ), τότε, όπως είδαμε παραπάνω, ισχύουν οι ισότητες:

$$\eta\mu\omega = \frac{(MM_1)}{(OM)}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{(OM_1)}{(OM)},$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{(MM_1)}{(OM_1)} \quad \text{και} \quad \sigma\phi\omega = \frac{(OM_1)}{(MM_1)}$$

Όμως  $(OM_1) = x$ ,  $(M_1M) = y$  και

$(OM) = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho > 0$ . Επομένως, οι παραπάνω ισότητες γράφονται:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho},$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \quad \text{και} \quad \sigma\phi\omega = \frac{x}{y},$$

όπου  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ .

Γενικεύοντας τα παραπάνω,  
ορίζουμε με τον ίδιο τρόπο τους  
τριγωνομετρικούς αριθμούς  
οποιασδήποτε γωνίας  $\omega$  (Σχήμα  
 $\beta'$ ).

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho},$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \text{ (εφόσον } x \neq 0 \text{)}$$

$$\text{, όπου } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho},$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} \text{ (εφόσον } y \neq 0 \text{)}$$

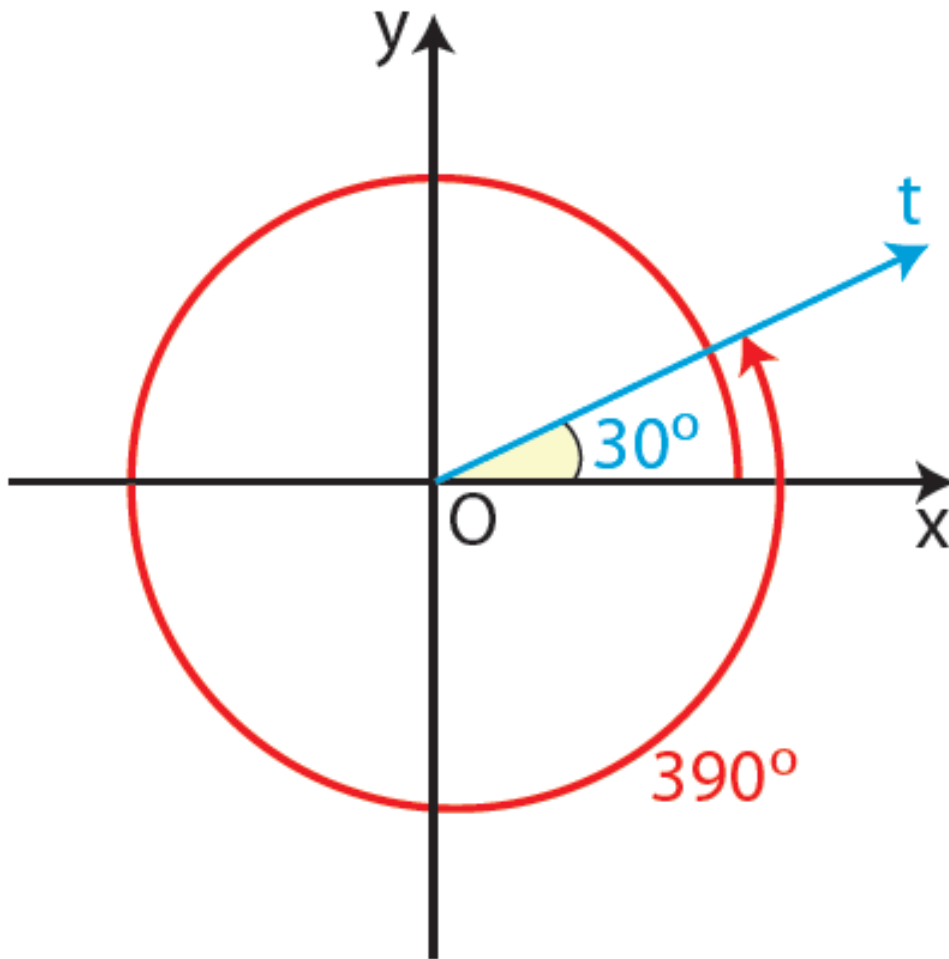
όπου  $(x, y)$  οι συντεταγμένες  
οποιοδήποτε σημείου  $M$   
(διαφορετικού του  $O$ ) της τελικής  
πλευράς της γωνίας  $\omega$  και

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$  η απόσταση του  $M$   
από το  $O$ .

**Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών  
μεγαλύτερων των  $360^\circ$  και  
αρνητικών γωνιών**

Ας υποθέσουμε ότι ο ημιάξονας  $Ox$   
ενός συστήματος συντεταγμένων  
 $Oxy$  περιστρέφεται γύρω από το  $O$   
κατά τη θετική φορά. Αν  
πραγματοποιήσει μια πλήρη  
περιστροφή και περιστραφεί  
επιπλέον και κατά γωνία μέτρου  
 $30^\circ$ , τότε λέμε ότι ο  $Ox$  έχει διαγρά-  
ψει γωνία

$$\omega = 360^\circ + 30^\circ = 390^\circ .$$



Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι γωνίες που είναι μεγαλύτερες των  $360^\circ$ , δηλαδή οι γωνίες της μορφής:

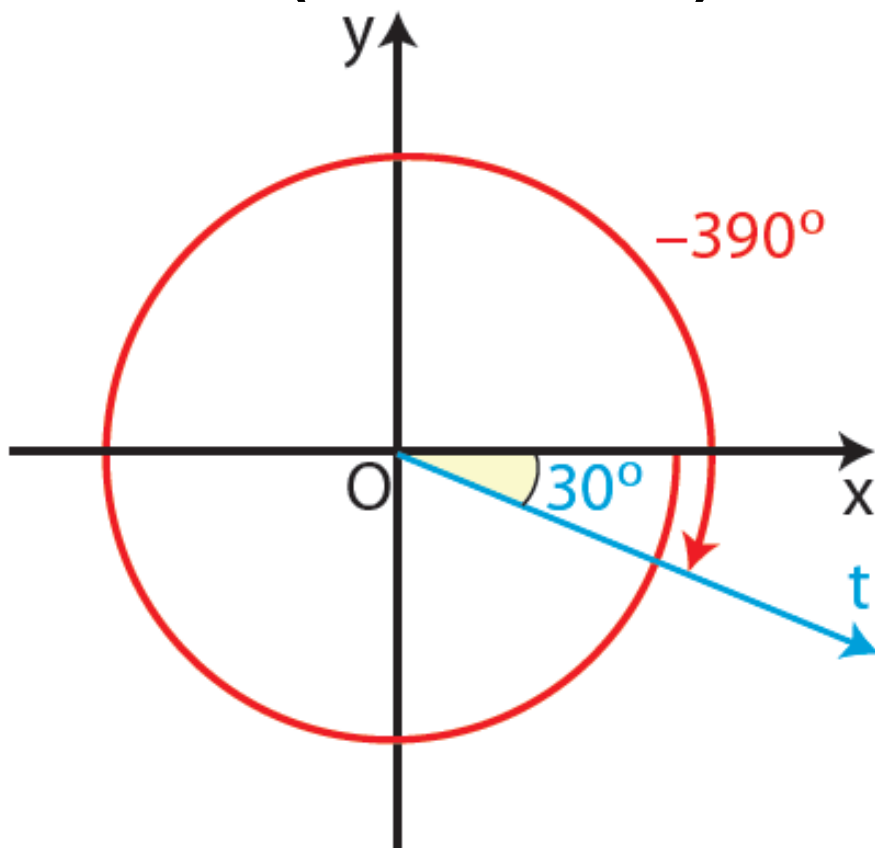
$$\omega = \nu \cdot 360^\circ + \mu^\circ,$$

όπου  $\nu \in \mathbb{N}^*$  και

$$0^\circ \leq \mu < 360^\circ$$

Αν τώρα ο ημιάξονας  $Ox$  ,  
στρεφόμενος γύρω από το  $O$  κατά  
την αρνητική φορά,  
πραγματοποιήσει μια πλήρη  
περιστροφή και στη συνέχεια  
διαγράψει γωνία μέτρου  $30^\circ$  ,  
τότε λέμε ότι ο ημιάξονας  $Ox$  έχει  
διαγράψει αρνητική γωνία  
 $360^\circ + 30^\circ = 390^\circ$   
ή αλλιώς γωνία:

$$\omega = -(360^\circ + 30^\circ) = -390^\circ.$$





Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι αρνητικές γωνίες δηλαδή οι γωνίες της μορφής:

$$\omega = -(v \cdot 360^0 + \mu^0), \text{ όπου } v \in \mathbb{N}^* \text{ και } 0 \leq \mu < 360^0$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που είναι μεγαλύτερες από 3600 , καθώς και των αρνητικών γωνιών, ορίζονται όπως και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών από 00 μέχρι 3600 .

Δηλαδή, για κάθε γωνία  $\omega$ , θετική ή αρνητική, ορίζουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho},$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \text{ (εφόσον } x \neq 0 \text{),}$$

$$\acute{\omicron}\pi\upsilon\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho},$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{x}{y} \text{ (εφόσον } y \neq 0 \text{)}$$

όπου  $(x, y)$  οι συντεταγμένες  
οποιοδήποτε σημείου  $M$  της  
τελικής πλευράς της γωνίας  $\omega$   
(διαφορετικού του  $O$ ) και

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$  η απόσταση του  $M$   
από το  $O$ .

Ας θεωρήσουμε τώρα μια γωνία  $\omega$   
(θετική ή αρνητική) με αρχική  
πλευρά

τον ημιάξονα  $Ox$  .

Αν ο ημιάξονας  $Ox$  , στρεφόμενος γύρω από το  $O$  κατά τη θετική φορά, συμπληρώσει  $n$  πλήρεις στροφές και στη συνέχεια διαγράψει τη γωνία  $\omega$ , τότε

θα έχει διαγράψει γωνία  $n \cdot 360^{\circ} + \omega$  , που έχει την ίδια τελική πλευρά με την  $\omega$ .

Αν όμως ο ημιάξονας  $Ox$  , στρεφόμενος γύρω από το  $O$  κατά την αρνητική φορά, συμπληρώσει  $n$  πλήρεις στροφές και στη συνέχεια διαγράψει τη γωνία  $\omega$ , τότε θα έχει διαγράψει γωνία  $-n \cdot 360^{\circ} + \omega$  , που έχει και αυτή την ίδια τελική πλευρά με την  $\omega$ .

Οι παραπάνω γωνίες, που είναι της μορφής  $k \cdot 360^{\circ} + \omega$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , επειδή

έχουν την ίδια τελική πλευρά θα έχουν και τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Επομένως, για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$ , θα ισχύει:

$$\eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega,$$

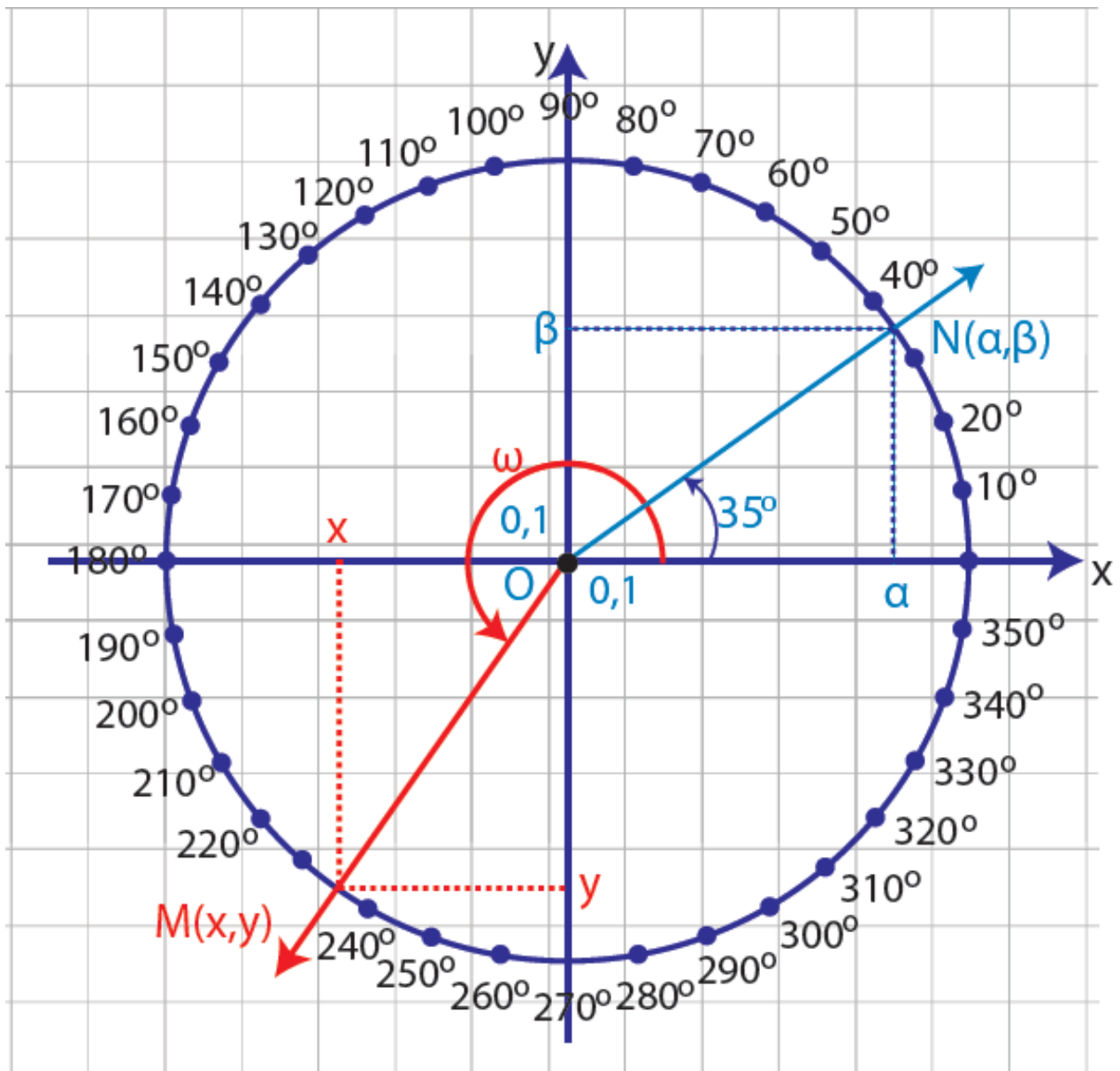
$$\epsilon\varphi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega,$$

$$\sigma\varphi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

## **Ο τριγωνομετρικός κύκλος**

**Για έναν κατά προσέγγιση, αλλά σύντομο, υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών, χρησιμοποιούμε τον λεγόμενο τριγωνομετρικό κύκλο. Ο τριγωνομετρικός κύκλος θα μας εξυπηρετήσει και σε άλλους σκοπούς, όπως θα φανεί στις επόμενες παραγράφους.**



Με κέντρο την αρχή  $O(0,0)$  ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτίνα  $\rho = 1$  γράφουμε έναν κύκλο. Ο κύκλος αυτός λέγεται **τριγωνομετρικός κύκλος**.

Έστω τώρα ότι η τελική πλευρά μιας γωνίας, π.χ. της γωνίας  $\omega = 35^\circ$ , τέμνει τον κύκλο αυτό στο σημείο  $N(\alpha, \beta)$ .

Επειδή  $\eta\mu 35^\circ = \frac{\beta}{\rho}$  και  $\rho = 1$  θα

ισχύει  $\eta\mu 35^\circ = \beta \approx 0,57$ . Ομοίως, επειδή  $\sigma\upsilon\nu 35^\circ = \frac{\alpha}{\rho}$  και  $\rho = 1$ , θα

ισχύει  $\sigma\upsilon\nu 35^\circ = \alpha \approx 0,82$ .

Γενικότερα, αν η τελική πλευρά μιας γωνίας  $\omega$  τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο  $M(x, y)$ , τότε ισχύει:

$\sigma\upsilon\nu\omega = x =$  τετμημένη του σημείου  $M$   
,  
 $\eta\mu\omega = y =$  τεταγμένη του σημείου  $M$

Για το λόγο αυτό ο άξονας  $x$  λέγεται και άξονας των συνημίτονων, ενώ ο άξονας  $y$  λέγεται και άξονας των ημίτονων. Άμεσες συνέπειες του παραπάνω συμπεράσματος είναι οι εξής:

1. Οι τιμές του  $\cos \omega$  και του  $\sin \omega$  μιας γωνίας  $\omega$  δεν μπορούν να υπερβούν κατ' απόλυτη τιμή την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου, που είναι ίση με 1. Δηλαδή ισχύει:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos \omega \leq 1 \text{ και} \\ -1 &\leq \sin \omega \leq 1 \end{aligned}$$

2. Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας  $\omega$ , ανάλογα με



το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας αυτής, είναι όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας.

|      | 1ο | 2ο | 3ο | 4ο |
|------|----|----|----|----|
| ημω  | +  | +  | -  | -  |
| συνω | +  | -  | -  | +  |
| εφω  | +  | -  | +  | -  |
| σφω  | +  | -  | +  | -  |

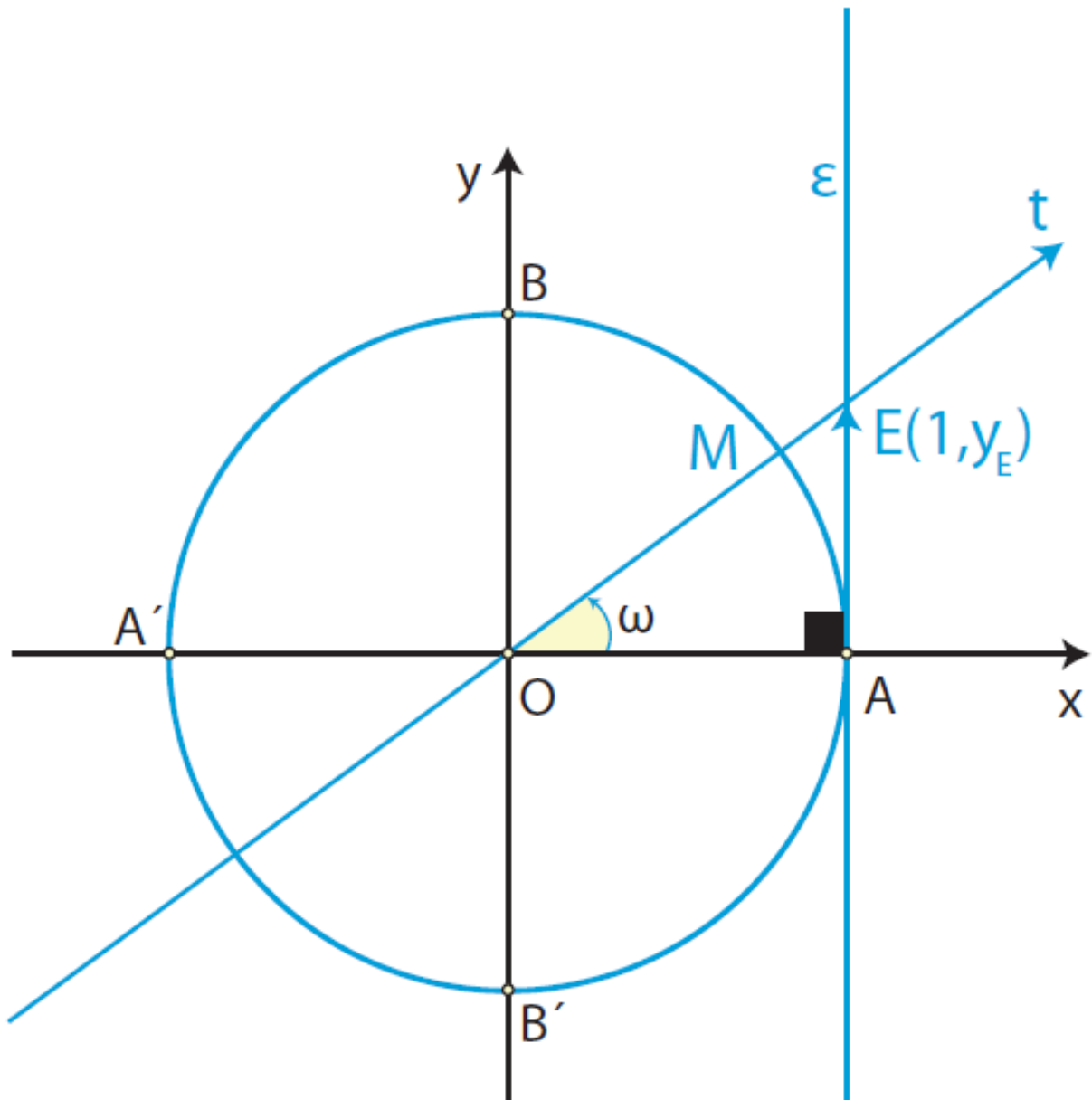
## Ο άξονας των εφαπτομένων

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μια γωνία  $\omega$  που η τελική της πλευρά τον τέμνει στο σημείο  $M(x, y)$ . Φέρνουμε την εφαπτομένη  $\varepsilon$  του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο  $A$ .

Αν η τελική πλευρά της γωνίας βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο και

η ευθεία  $OM$  τέμνει την  $\varepsilon$  στο  $E$ ,  
τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο

$\triangle$   
 $AOE$  θα έχουμε



$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{(AE)}{(OA)} = \frac{(AE)}{1} = (AE)$$

Αν με  $y_E$  παραστήσουμε την τεταγμένη του  $E$ , τότε θα ισχύει  $(AE) = y_E$ , οπότε θα είναι

$$\varepsilon\varphi\omega = y_E .$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και όταν η τελική πλευρά της γωνίας  $\omega$  βρίσκεται σε οποιοδήποτε άλλο τεταρτημόριο.

Επομένως σε κάθε περίπτωση ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\omega = y_E = \text{τεταγμένη του σημείου } E$$

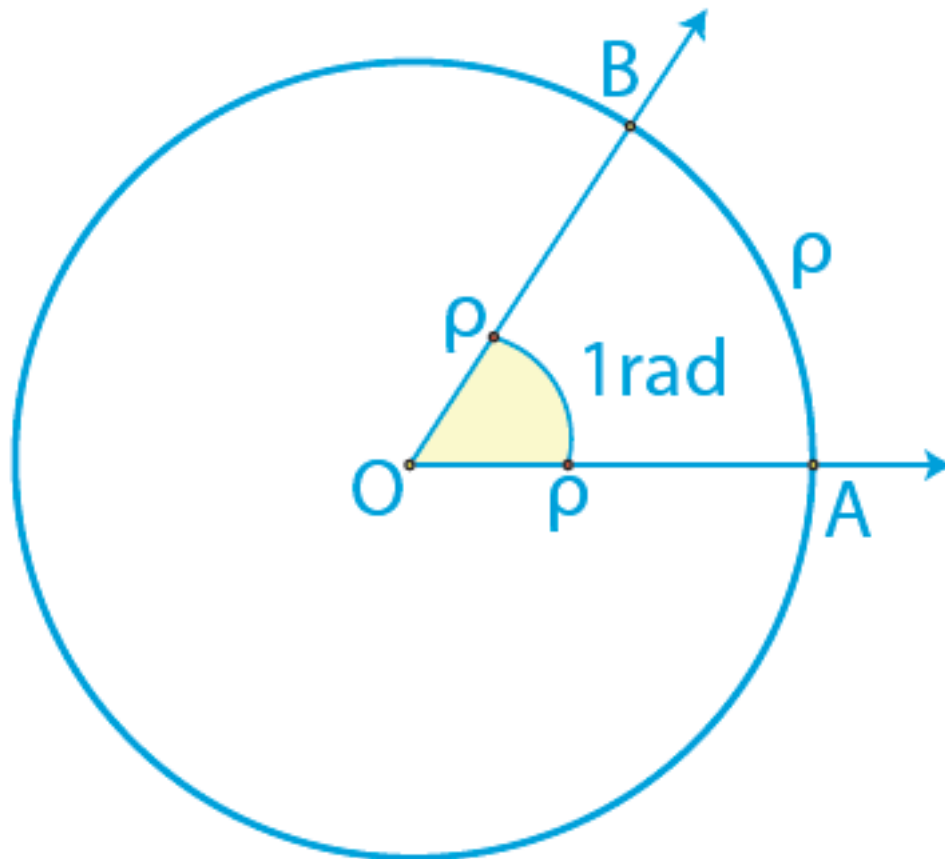
Για το λόγο αυτό η ευθεία  $\varepsilon$ , που έχει εξίσωση  $x = 1$ , λέγεται άξονας των εφαπτομένων.

## Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Έχουμε γνωρίσει στο Γυμνάσιο το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης τόξων.

Συγκεκριμένα, ένα τόξο  $AB$  ενός κύκλου  $(O, \rho)$  λέγεται τόξο ενός ακτινίου (ή  $1\text{rad}$ ), αν το τόξο αυτό έχει μήκος ίσο με την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου. Επομένως, το τόξο  $\alpha$  ακτινίων (ή  $\alpha\text{ rad}$ ) έχει μήκος  $S = \alpha \cdot \rho$ .

Ορίζουμε τώρα το ακτίνιο και ως μονάδα μέτρησης των γωνιών ως εξής:



## ΟΡΙΣΜΟΣ

**Ακτίνιο (ή 1 rad ) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad ).**

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει και η σχέση μοίρας και ακτινίου ως μονάδων μέτρησης γωνιών, ως εξής:

Έστω ότι μια γωνία  $\omega$  είναι  $\mu^\circ$  και  $\alpha$  rad . Επειδή το μήκος ενός κύκλου ακτίνας  $\rho$  είναι  $2\pi\rho$ , η γωνία  $360^\circ$  είναι ίση με  $2\pi$  rad .

Οπότε, η γωνία 1 rad είναι ίση με  $\frac{360}{2\pi}$  μοίρες,

Επομένως, η γωνία  $\alpha$  rad είναι ίση με  $\alpha \cdot \frac{180}{\pi}$  μοίρες.

Επειδή όμως η γωνία  $\omega$  είναι  $\mu^\circ$ , θα ισχύει  $\mu = \alpha \cdot \frac{180}{\pi}$ , οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

Για παράδειγμα:

✓ Για να εκφράσουμε τη γωνία  $60^\circ$  σε ακτίνια, θέτουμε στον τύπο

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \text{ όπου } \mu = 60^\circ \text{ και έχουμε}$$

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Άρα είναι  $60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$

✓ Για να εκφράσουμε τη γωνία  $\frac{5\pi}{6}$

rad σε μοίρες, θέτουμε στον τύπο

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \text{ όπου } \alpha = \frac{5\pi}{6} \text{ και έχουμε}$$

$$\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{6}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 150$$

$$\text{Άρα } \frac{5\pi}{6} \text{ rad} = 150^\circ.$$

**Στον παρακάτω πίνακα επαναλαμβάνουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μερικών γωνιών που είχαμε υπολογίσει στο Γυμνάσιο και οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στις διάφορες εφαρμογές.**



| Γωνία $\omega$ |                 | Τριγωνομετρικοί αριθμοί |                      |                      |                      |
|----------------|-----------------|-------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| σε μοίρες      | σε rad          | ημ $\omega$             | συν $\omega$         | εφ $\omega$          | σφ $\omega$          |
| $0^\circ$      | 0               | 0                       | 1                    | 0                    | Δεν ορίζεται         |
| $30^\circ$     | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$           | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$           |
| $45^\circ$     | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$    | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1                    | 1                    |
| $60^\circ$     | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$    | $\frac{1}{2}$        | $\sqrt{3}$           | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $90^\circ$     | $\frac{\pi}{2}$ | 1                       | 0                    | Δεν ορίζεται         | 0                    |

## ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Στη συνέχεια, επειδή στον τριγωνομετρικό κύκλο το τόξο  $x$  rad έχει μήκος  $x$ , αντί να γράφουμε  $\eta\mu(x \text{ rad})$ ,  $\sigma\upsilon\nu(x \text{ rad})$ ,  $\epsilon\varphi(x \text{ rad})$  και  $\sigma\varphi(x \text{ rad})$ , θα γράφουμε απλά  $\eta\mu x$ ,  $\sigma\upsilon\nu x$ ,  $\epsilon\varphi x$  και  $\sigma\varphi x$ .

Για παράδειγμα, αντί να γράφουμε π.χ.  $\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} \text{ rad}\right)$  θα γράφουμε απλά  $\eta\mu\frac{\pi}{3}$  και αντί  $\eta\mu(100 \text{ rad})$  θα γράφουμε απλά  $\eta\mu 100$ .

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1η** Οι μετρήσεις που έκανε ένας μηχανικός για να βρει το ύψος  $h$

032 / 056-057

ενός καμπαναριού ΓΚ, φαίνονται  
στο παρακάτω σχήμα.

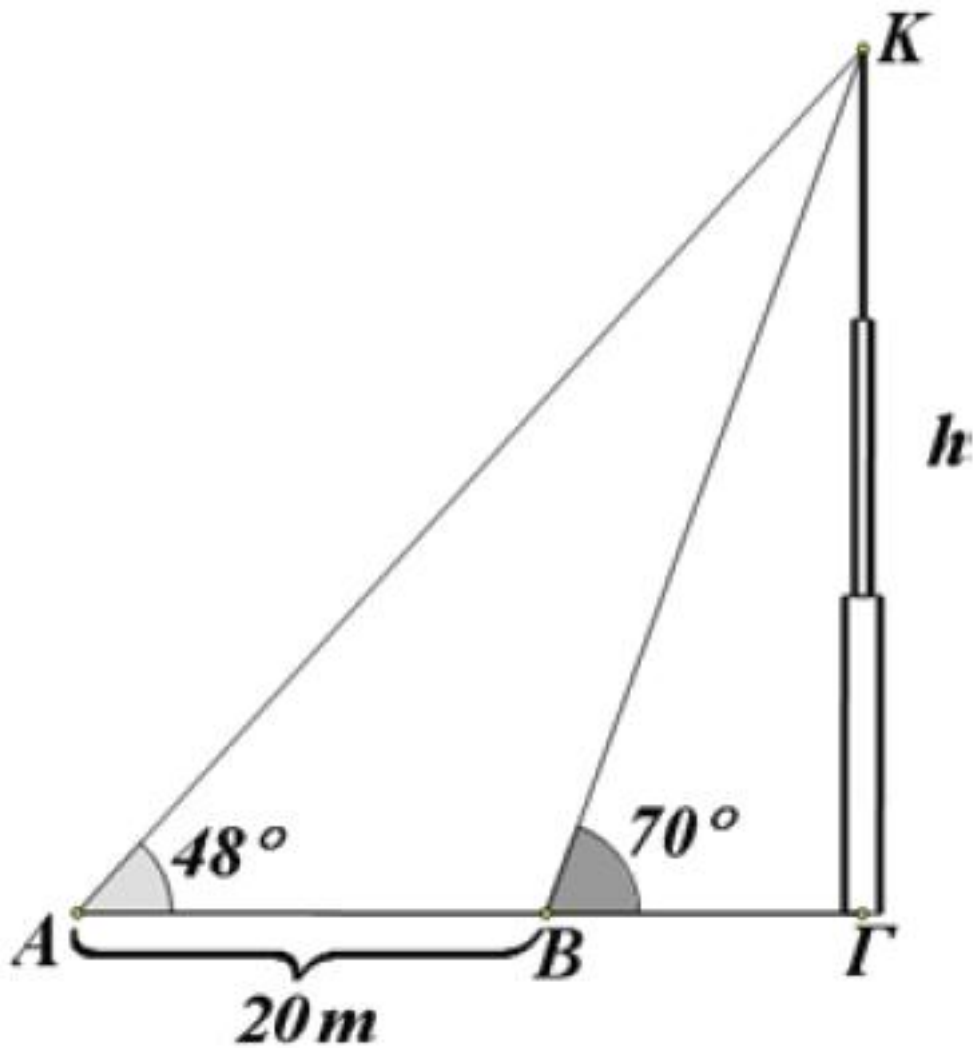
Να υπολογιστεί το ύψος του  
καμπαναριού σε μέτρα με  
προσέγγιση ακέραιας μονάδας.

## ΛΥΣΗ

Από το σχήμα έχουμε:

$$\epsilon\phi 48^\circ = \frac{h}{ΑΓ}, \text{ οπότε } ΑΓ = \frac{h}{\epsilon\phi 48^\circ}$$

$$\epsilon\phi 70^\circ = \frac{h}{ΒΓ}, \text{ οπότε } ΒΓ = \frac{h}{\epsilon\phi 70^\circ}$$



$$AG - BG = AB = 20\text{m}$$

$$\text{Επομένως } \frac{h}{\epsilon\varphi 48^\circ} - \frac{h}{\epsilon\varphi 70^\circ} = 20,$$

$$\text{οπότε } h = \frac{20\epsilon\varphi 70^\circ \cdot \epsilon\varphi 48^\circ}{\epsilon\varphi 70^\circ - \epsilon\varphi 48^\circ}.$$

Με τους τριγωνομετρικούς πίνακες ή με ένα κομπιουτεράκι βρίσκουμε ότι

$$\varepsilon\varphi 70^\circ \approx 2,75 \text{ και } \varepsilon\varphi 48^\circ \approx 1,11.$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε:

$$h \approx \frac{61,05}{1,64} \approx 37$$

Άρα το ύψος του καμπαναριού είναι περίπου 37m .

**2η** Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας  $750^\circ$  .

**ΛΥΣΗ**

Αν διαιρέσουμε το 750 με το 360 βρίσκουμε πηλίκο 2 και υπόλοιπο 30, έτσι έχουμε

$$750^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 30^\circ$$

**Επομένως**

$$\eta\mu 750^\circ = \eta\mu(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 750^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 750^\circ = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi 750^\circ = \sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3}$$

**3η** Να υπολογιστούν οι  
τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας  
 $\frac{79\pi}{3}$  rad .

**ΛΥΣΗ**

Είναι  $\frac{79\pi}{3} = \frac{79}{6} \cdot 2\pi$ . Αν τώρα

διαιρέσουμε τον 79 με τον 6  
βρίσκουμε πηλίκο 13 και υπόλοιπο

**1. Επομένως είναι**

$$\frac{79\pi}{3} = \frac{79}{6} \cdot 2\pi = \left(13 + \frac{1}{6}\right) 2\pi$$

$$= 13 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3},$$

**οπότε θα έχουμε:**

$$\eta\mu \frac{79\pi}{3} = \eta\mu \left(13 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

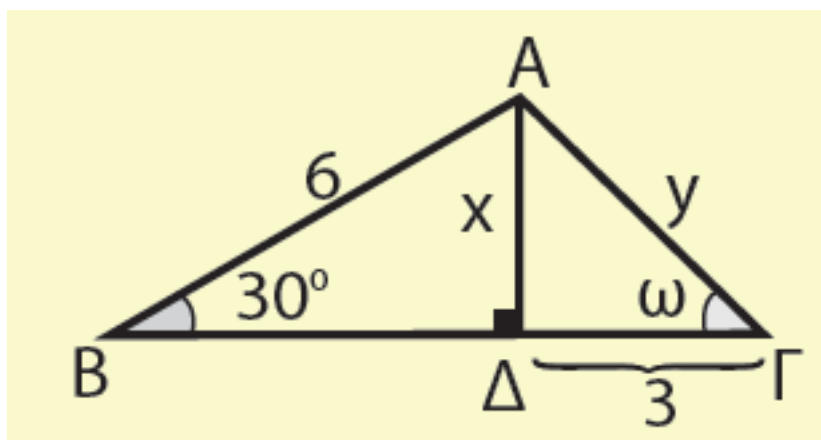
$$\sigma\upsilon\nu \frac{79\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon\phi \frac{79\pi}{3} = \epsilon\phi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

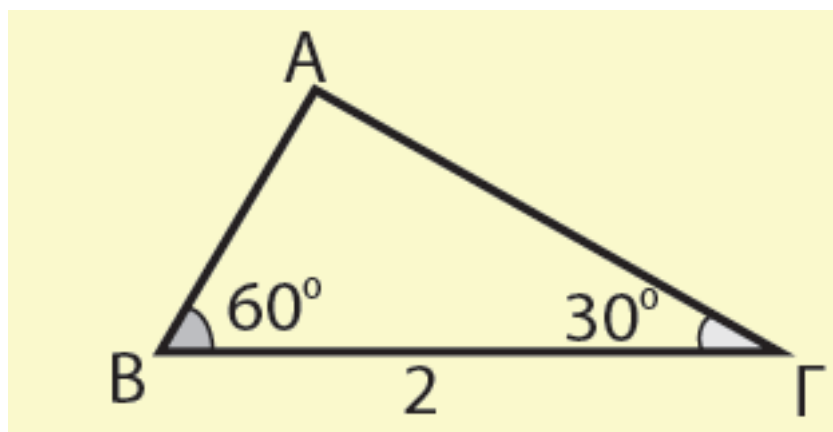
$$\sigma\phi \frac{79\pi}{3} = \sigma\phi \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη  $x$ ,  $y$  και τη γωνία  $\omega$ .



2. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου του παρακάτω σχήματος.





3. Μια επίκεντρη γωνία  $\omega$  βαίνει σε τόξο  $S = 6\text{cm}$ . Να εκφράσετε τη γωνία αυτή σε ακτίνια, αν η ακτίνα του κύκλου είναι:

i)  $\rho = 1\text{cm}$     ii)  $\rho = 2\text{cm}$

iii)  $\rho = 3\text{cm}$ .

4. Να εκφράσετε σε rad γωνία

i)  $30^\circ$     ii)  $120^\circ$

iii)  $1260^\circ$     iv)  $-1485^\circ$ .

5. Να μετατρέψετε σε μοίρες γωνία:

i)  $\frac{\pi}{10}$  rad    ii)  $\frac{5\pi}{6}$  rad

iii)  $\frac{91\pi}{3}$  rad    iv)  $100\text{rad}$  .

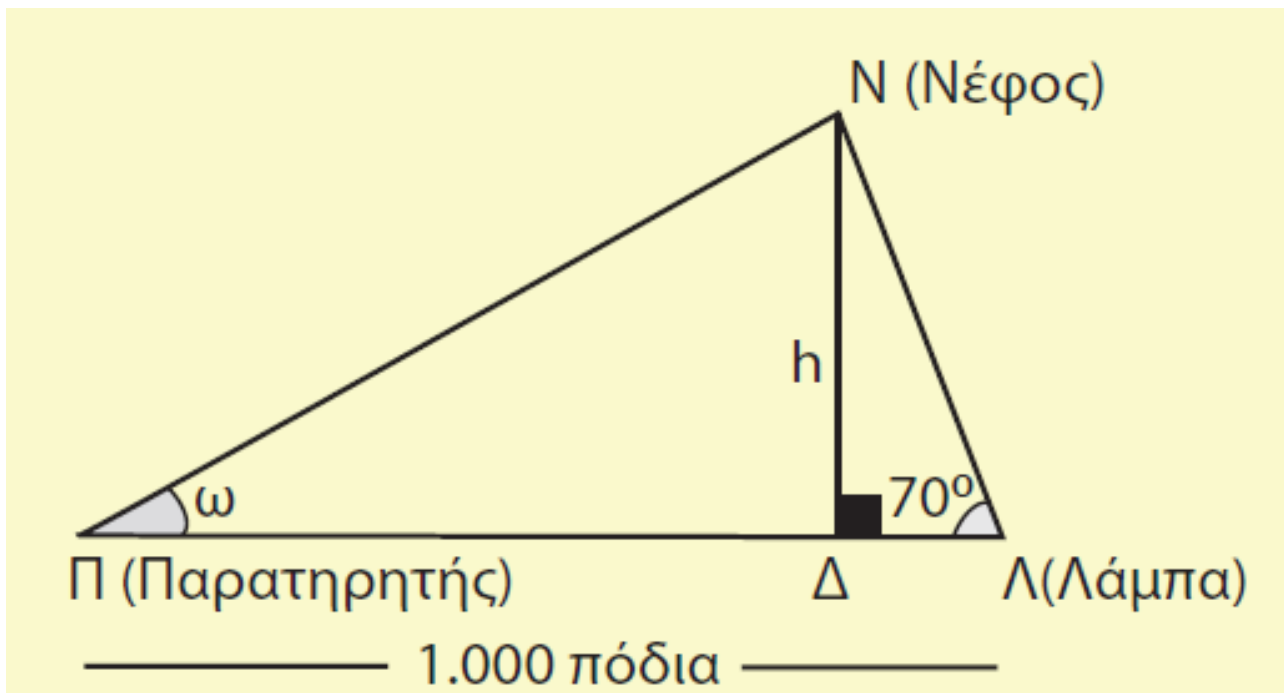
6. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας

i)  $1830^\circ$     ii)  $2940^\circ$

iii)  $1980^\circ$       iv)  $3600^\circ$ .

## **B' ΟΜΑΔΑΣ**

**1. Σε μικρά αεροδρόμια υπολογίζουν το ύψος των νεφών με τη βοήθεια μιας ισχυρής λάμπας εντός παραβολικού κατόπτρου, η οποία βρίσκεται σε απόσταση 1000 πόδια ( $1 \text{ πόδι} \approx 0,3 \text{ m}$ ) από το σημείο του παρατηρητή. Η λάμπα είναι τοποθετημένη υπό σταθερή γωνία και ο παρατηρητής στρέφει το όργανο παρατήρησης στο σημείο ανάκλασης του φωτός από τα νέφη.**



- i) Να προσδιορίσετε το ύψος  $h$  για  $\omega = 30^\circ, 45^\circ$  και  $60^\circ$ .
- ii) Πόση είναι η γωνία  $\omega$ , αν  $h = 1000$  πόδια;

2. Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος:

i) Να δείξετε ότι:

$$(ΑΓ) = (ΒΓ) = 2ημ45^\circ = \sqrt{2}.$$

ii) Να εξηγήσετε γιατί είναι

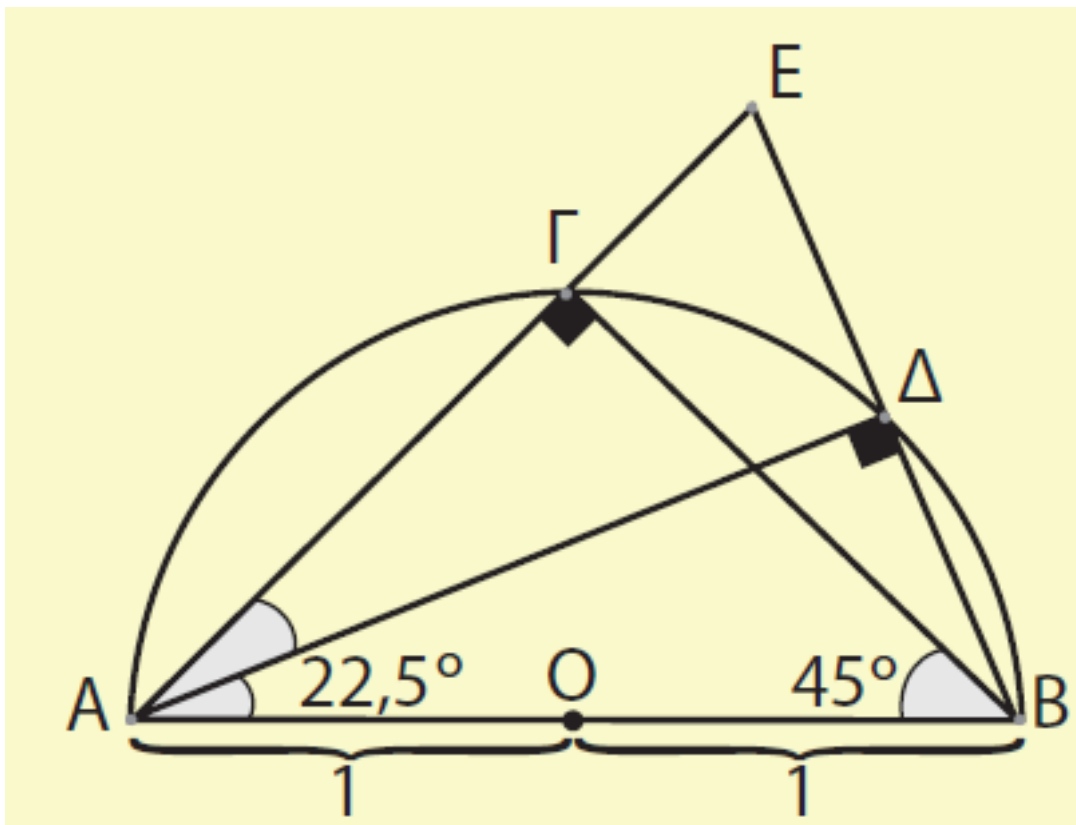
$$(EB) = 4 \cdot \eta\mu 22,5^{\circ}.$$

iii) Να υπολογίσετε το μήκος (ΓΕ) .

iv) Να δείξετε, χρησιμοποιώντας το

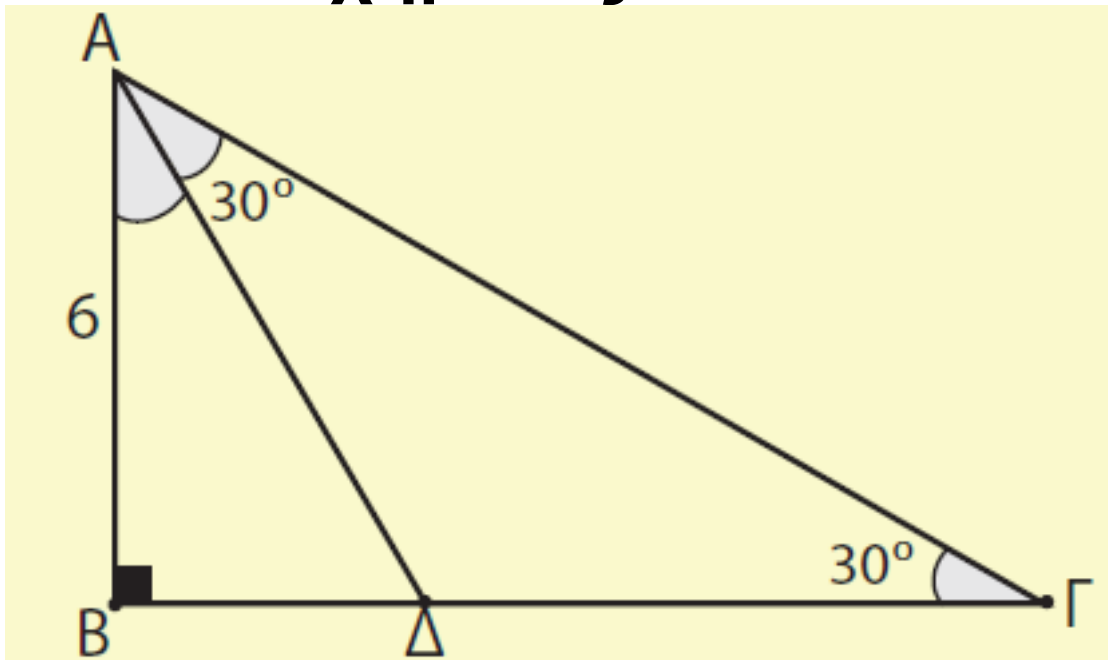
τρίγωνο  $\triangle BE\Gamma$ , ότι  $(EB) = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ .

v) Να υπολογίσετε το  $\eta\mu 22,5^{\circ}$ .



vi) Ποιων άλλων γωνιών μπορείτε να υπολογίσετε το ημίτονο και πώς πρέπει να συνεχιστεί η κατασκευή για το σκοπό αυτό;

3. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΔ του διπλανού σχήματος.



4. Η πιο αργή κίνηση που μπορεί να επισημάνει το ανθρώπινο μάτι είναι 1mm ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε πόσο μήκος πρέπει να έχει ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού για να

μπορούμε να επισημάνουμε την κίνηση του άκρου του.

---

## 3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

---

Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας  $\omega$  προκύπτουν ορισμένες σχέσεις που τους συνδέουν και είναι γνωστές ως τριγωνομετρικές ταυτότητες. Οι ταυτότητες αυτές είναι χρήσιμες στο λογισμό με παραστάσεις που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Συγκεκριμένα ισχύουν:

1.

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν  $M(x, y)$  είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας  $\omega$  τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι:

$x = \text{συν}\omega$  και  $y = \text{ημ}\omega$

Επειδή όμως,  $(OM) = 1$  και

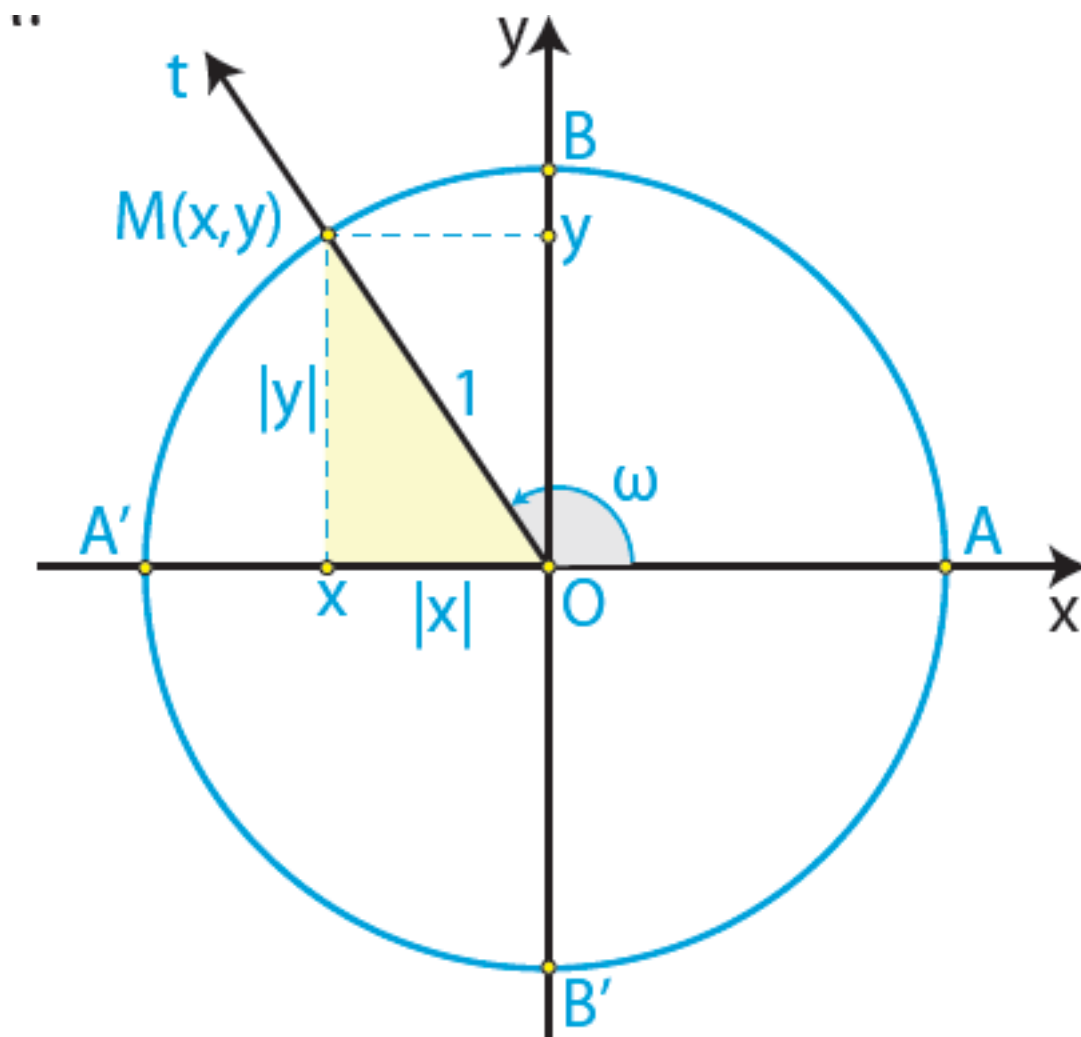
$$(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

θα ισχύει:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

οπότε θα έχουμε:

$$\text{συν}^2\omega + \text{ημ}^2\omega = 1$$



2.

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \text{και}$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στο ίδιο σχήμα έχουμε:



$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad (\epsilon\phi\acute{o}\sigma\sigma\omicron\nu$$

$$x = \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0)$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \quad (\epsilon\phi\acute{o}\sigma\sigma\omicron\nu$$

$$y = \eta\mu\omega \neq 0).$$

Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων (1) και (2), θα αποδείξουμε δύο επιπλέον χρήσιμες ταυτότητες.

3.  $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι:

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

$$(\epsilon\phi\acute{o}\sigma\sigma\omicron\nu \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \text{ και } \eta\mu\omega \neq 0)$$

Επομένως:

$$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$$

4. 
$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} \quad \text{και}$$

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$$

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ταυτότητας  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$  με  $\sigma\upsilon\nu^2\omega \neq 0$  και έχουμε:

$$\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega =$$

$$\frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$$

$$\text{Άρα } \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

ii) Αν στην ταυτότητα

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \text{ θέσουμε}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}, \text{ έχουμε:}$$

$$\eta\mu^2\omega + \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} = 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

$$\text{Άρα } \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1η** Αν  $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$  και  $90^\circ < \omega < 180^\circ$ ,

να βρεθούν οι άλλοι  
τριγωνομετρικοί αριθμοί  
της γωνίας  $\omega$ .

## ΛΥΣΗ

Από την ταυτότητα

$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$  προκύπτει ότι

$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$ . Αντικαθιστούμε

το  $\eta\mu\omega$  με  $\frac{5}{13}$  και έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{25}{169} =$$

$$\frac{169 - 25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Επειδή  $90^\circ < \omega < 180^\circ$ , είναι  $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$ , οπότε έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

Από τις ταυτότητες τώρα

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ και } \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega},$$

έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{12}} = -\frac{5}{12} \text{ και}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{-\frac{13}{12}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}.$$

**2η** Να αποδειχθεί ότι

i)  $\eta\mu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega$

ii)  $\eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = 2\eta\mu^2\omega - 1$

## **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

i) Έχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega$$

$$= (\eta\mu^2\omega)^2 + (\sigma\upsilon\nu^2\omega)^2$$

$$= (\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega)^2 - 2\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$= 1 - 2\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega,$$

$$(\text{εππειδή } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1)$$

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = (\eta\mu^2\omega)^2 - (\sigma\upsilon\nu^2\omega)^2$$

$$= (\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega)(\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega)$$

$$= \eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$(\text{εππειδή } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1)$$

$$= \eta\mu^2\omega - (1 - \eta\mu^2\omega) = 2\eta\mu^2\omega - 1.$$

## Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν  $\eta\mu\chi = \frac{3}{5}$  και  $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$ , να

βρείτε τους άλλους  
τριγωνομετρικούς αριθμούς  
της γωνίας  $\chi$  rad .

2. Αν  $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{2}{3}$  και  $\pi < \chi < \frac{3\pi}{2}$ , να

βρείτε τους άλλους  
τριγωνομετρικούς αριθ-  
μούς της γωνίας  $\chi$  rad .

3. Αν  $\epsilon\varphi\chi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  και  $\frac{3\pi}{2} < \chi < 2\pi$ ,

να βρείτε τους άλλους  
τριγωνομετρικούς  
αριθμούς της γωνίας  $\chi$  rad .



4. Αν  $\sigma\phi\chi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  και  $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$ , να

βρείτε τους άλλους  
τριγωνομετρικούς αριθ-  
μούς της γωνίας  $\chi$  rad .

5. Αν  $\sigma\phi\chi = -2$  και  $\frac{3\pi}{2} < \chi < 2\pi$ , να  
υπολογίσετε την τιμή της  
παράστασης  $\frac{2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi}{1 + \sigma\upsilon\nu\chi}$ .

6. Να εξετάσετε, αν υπάρχουν τιμές  
του  $\chi$  για τις οποίες:

i) Να ισχύει συγχρόνως  $\eta\mu\chi = 0$  και  
 $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$  .

ii) Να ισχύει συγχρόνως  $\eta\mu\chi = 1$  και  
 $\sigma\upsilon\nu\chi = 1$  .

iii) Να ισχύει συγχρόνως  $\eta\mu\chi = \frac{3}{5}$

και  $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{4}{5}$  .

7. Να αποδείξετε ότι, τα σημεία  $M (x, y)$  του επιπέδου με  $x = 3\sigma\upsilon\nu\theta$  και  $y = 3\eta\mu\theta$ , είναι σημεία κύκλου  $O(0,0)$  κέντρου και ακτίνας  $\rho = 3$ .

8. Αν ισχύει  $x = 2\sigma\upsilon\nu\theta$  και  $y = 3\eta\mu\theta$ , να δείξετε ότι  $9x^2 + 4y^2 = 36$ .

9. Αν είναι  $x = r \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi$ ,  $y = r \eta\mu\theta\eta\mu\varphi$  και  $z = r \sigma\upsilon\nu\theta$ , να δείξετε ότι  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

10. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} \quad \text{ii)}$$

$$\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$$

11. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \frac{\eta\mu\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{2}{\eta\mu\theta}$$

$$\text{ii)} \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1-\eta\mu\chi} + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\chi}.$$

12. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \frac{\epsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}{\epsilon\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha} = \frac{\epsilon\varphi\alpha}{\epsilon\varphi\beta}$$

$$\text{ii)} \epsilon\varphi^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \epsilon\varphi^2\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha.$$

13. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1-\epsilon\varphi\chi} + \frac{\eta\mu\chi}{1-\sigma\varphi\chi} = \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi$$

$$\text{ii)} (1-\sigma\upsilon\nu\chi) \left( 1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi} \right) = \eta\mu\chi \cdot \epsilon\varphi\chi$$

$$\text{iii)} \frac{1}{\epsilon\varphi\chi + \sigma\varphi\chi} = \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$$

$$\text{iv)} \left( \frac{1}{\eta\mu\chi} - \eta\mu\chi \right) \left( \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi} - \sigma\upsilon\nu\chi \right) \\ = \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi.$$

## Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \alpha$  , να υπολογίσετε ως συνάρτηση του  $\alpha$  τις παραστάσεις:

i)  $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

ii)  $\frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

iii)  $\epsilon\phi x + \sigma\phi x$

iv)  $\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x$ .

2. Να αποδείξετε ότι:

i)  $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$

ii)  $\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x = 1 - 3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$ .

iii) Η παράσταση

$$2(\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x) - 3(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x)$$

έχει τιμή ανεξάρτητη του  $x$  , δηλαδή είναι σταθερή.

3. Αν  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ , να αποδείξετε

ότι  $\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}} - \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}} = 2\varepsilon\varphi x.$

4. Αν  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , να αποδείξετε ότι

$$\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x} + \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x} - \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}} =$$

$$\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}.$$

---

## 3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1<sup>ο</sup> ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

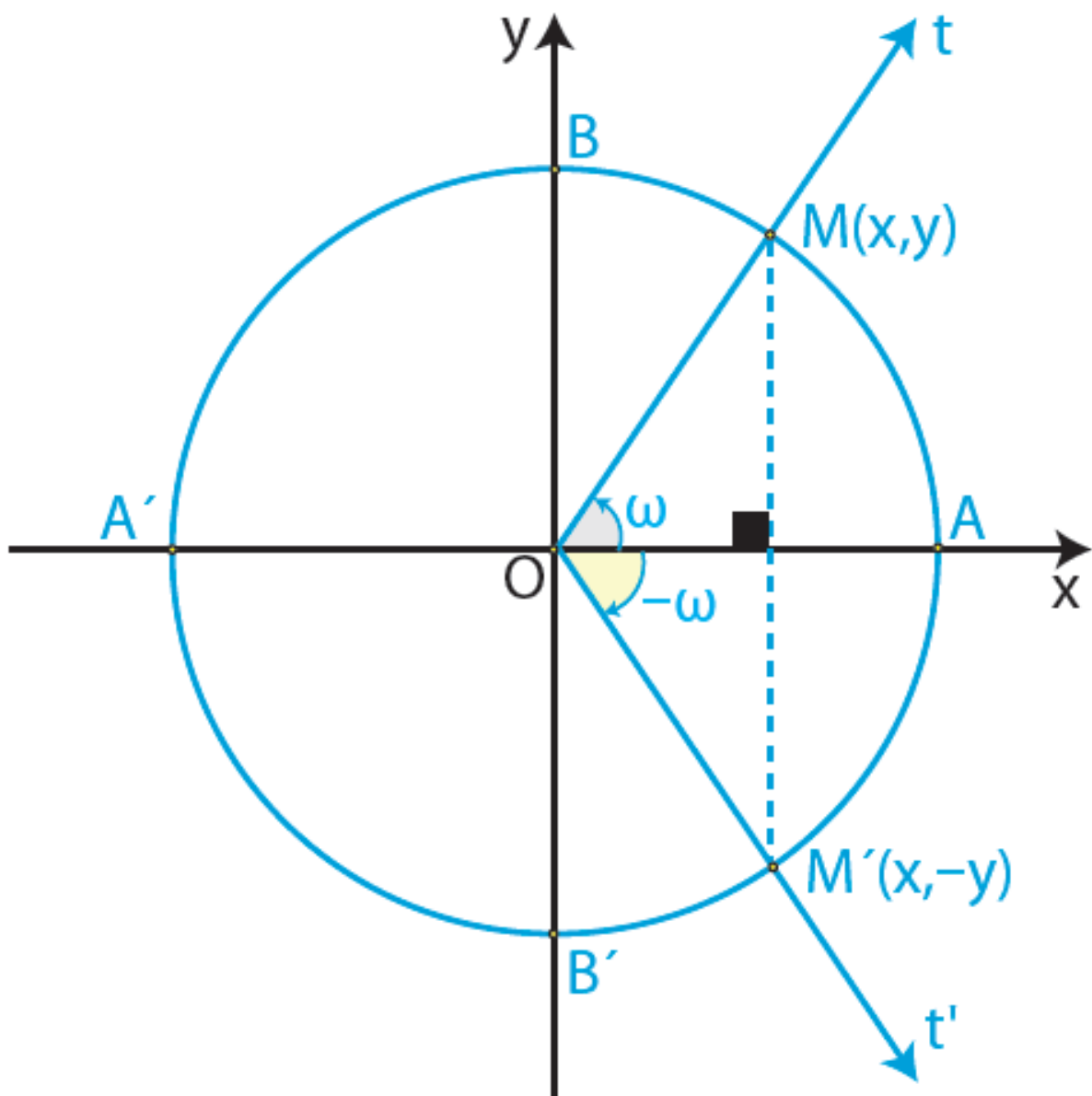
---

Ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας μπορεί να γίνει, όπως θα δούμε στη συνέχεια, με τη βοήθεια πινάκων που δίνουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών από 0<sup>ο</sup> μέχρι 90<sup>ο</sup>. Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  που οι τελικές πλευρές τους τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία M και M' αντιστοίχως.

### Γωνίες αντίθετες

Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  είναι αντίθετες, δηλαδή αν  $\omega' = -\omega$ , τότε, όπως

φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $x'x$ . Επομένως τα σημεία αυτά έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες.



Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των  
τριγωνομετρικών αριθμών,  
συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{array}{ll} \sin(-\omega) = \sin\omega & \eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega \\ \epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega & \sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega \end{array}$$

Δηλαδή:

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο  
συνημίτονο και αντίθετους τους  
άλλους τριγωνομετρικούς  
αριθμούς.

Για παράδειγμα:

✓ Έχουμε:

$$\eta\mu(-30^0) = -\eta\mu(30^0) = -\frac{1}{2}$$



$$\sigma\upsilon\nu(-30^{\circ}) = \sigma\upsilon\nu(30^{\circ}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi(-30^{\circ}) = -\varepsilon\varphi(30^{\circ}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi(-30^{\circ}) = -\sigma\varphi(30^{\circ}) = -\sqrt{3}$$

✓ Επίσης, έχουμε:

$$\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

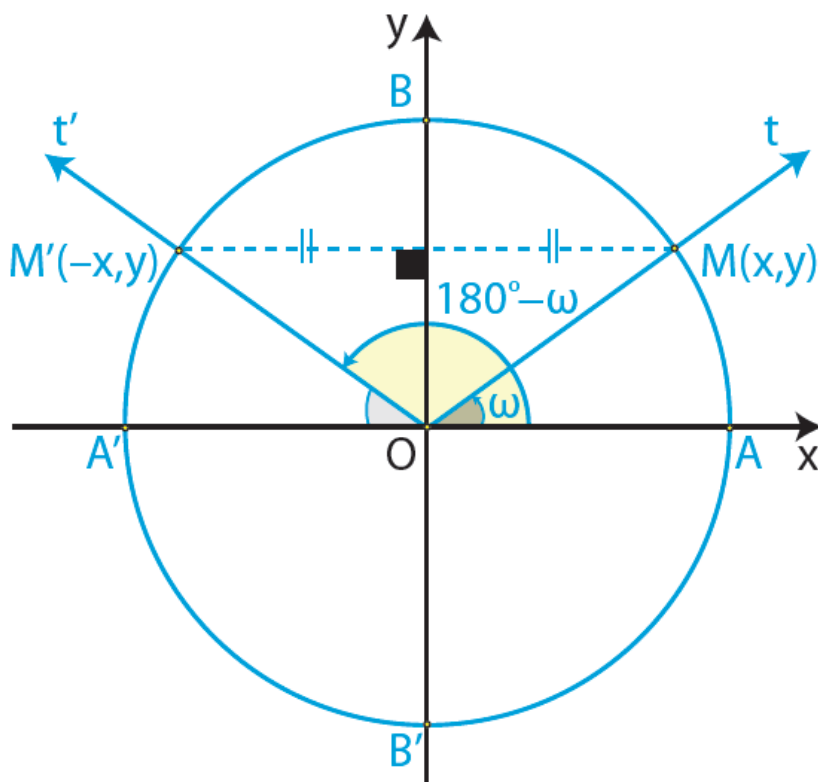
$$\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\varphi\frac{\pi}{4} = -1$$

## Γωνίες με άθροισμα $180^\circ$

Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  έχουν άθροισμα  $180^\circ$ , δηλαδή αν  $\omega' = 180^\circ - \omega$ , τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $y'y$ . Επομένως τα σημεία αυτά έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες.



Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi\omega$$

$$\sigma\phi(180^\circ - \omega) = -\sigma\phi\omega$$

Δηλαδή,

Οι γωνίες με άθροισμα  $180^\circ$  έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Για παράδειγμα:

✓ Επειδή  $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ ,  
έχουμε:

$$\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu 150^\circ &= \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = \\ &= -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon\varphi 150^\circ &= \epsilon\varphi(180^\circ - 30^\circ) = \\ &= -\epsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma\varphi 150^\circ &= \sigma\varphi(180^\circ - 30^\circ) = \\ &= -\sigma\varphi 30^\circ = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

✓ Επειδή  $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ , έχουμε:

$$\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\varphi\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

## Γωνίες που διαφέρουν κατά $180^\circ$

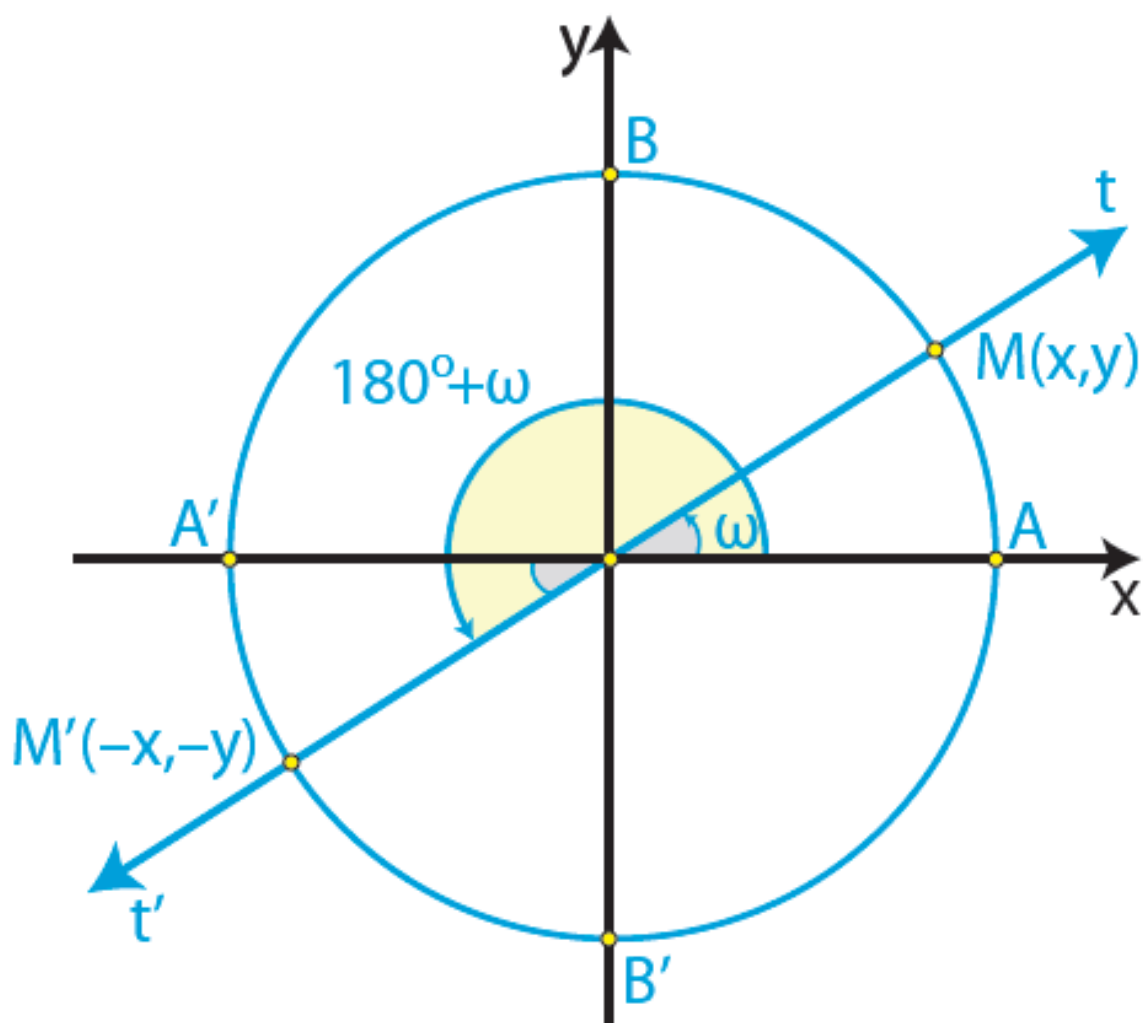
Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  διαφέρουν κατά  $180^\circ$ , δηλαδή αν

$\omega' = 180^\circ + \omega$ , τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.

Επομένως

τα σημεία αυτά έχουν αντίθετες τετμημένες και αντίθετες τεταγμένες.

Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$$\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\phi(180^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$$

$$\sigma\phi(180^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$$

Δηλαδή,

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά  $180^\circ$  έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.

Για παράδειγμα:

✓ Επειδή  $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$ ,  
έχουμε:

$$\eta\mu 210^\circ = \eta\mu(180^\circ + 30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 210^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 30^\circ) =$$

$$-\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\varphi 210^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ + 30^\circ) = \epsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi 210^\circ = \sigma\varphi(180^\circ + 30^\circ) = \sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3}$$

✓ Επειδή  $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ , έχουμε:

$$\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\epsilon\varphi\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \epsilon\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \epsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$



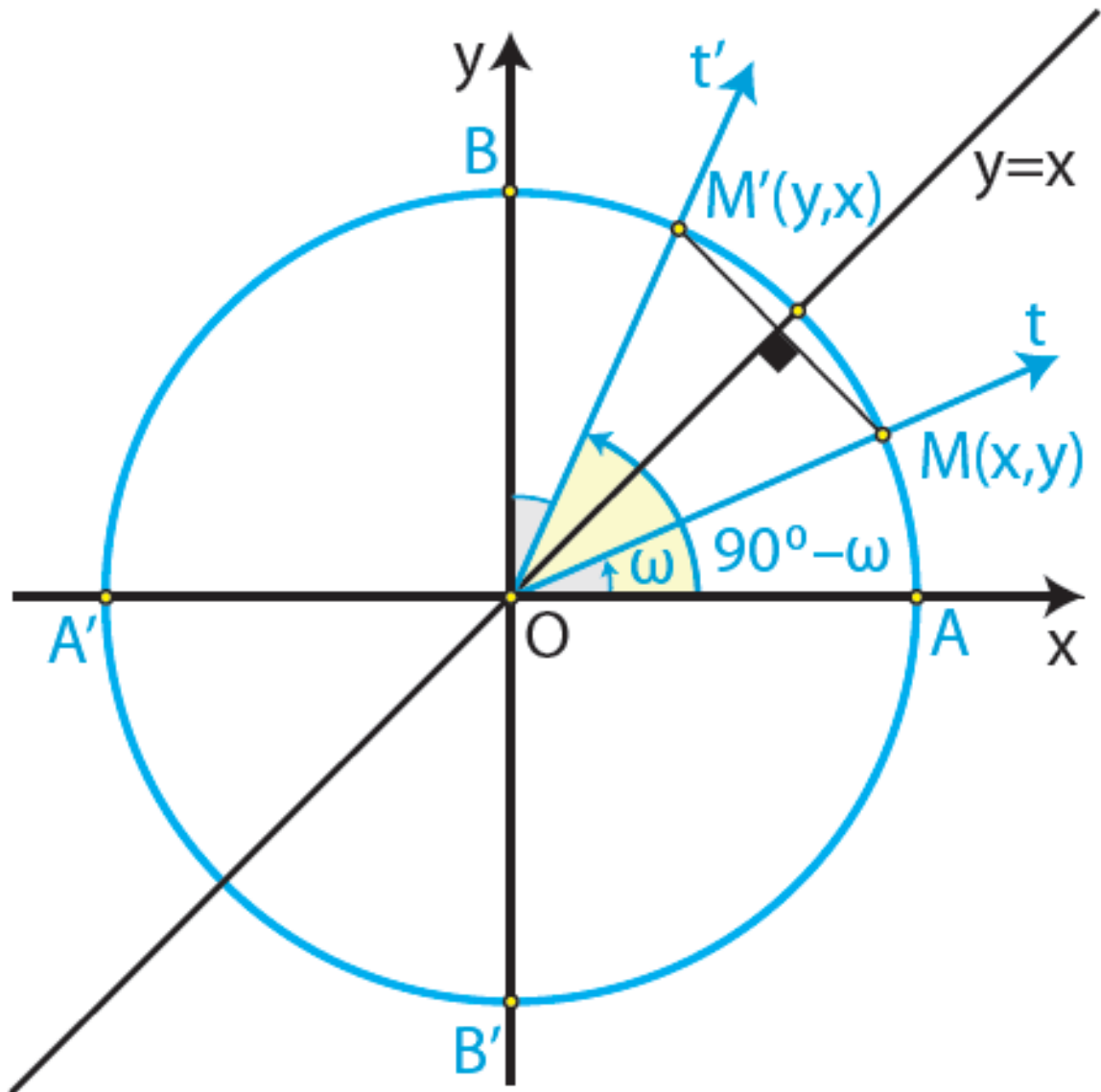
$$\sigma\varphi\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

## Γωνίες με άθροισμα $90^\circ$

Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  έχουν

άθροισμα  $90^\circ$ , δηλαδή  $\omega' = 90^\circ - \omega$ , τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{xOy}$ .

Επομένως η τετμημένη του καθενός ισούται με την τεταγμένη του άλλου.



**Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των  
τριγωνομετρικών αριθμών,  
συμπεραίνουμε ότι:**

$$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(90^\circ - \omega) = \epsilon\varphi\omega$$

Δηλαδή,

Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα  $90^\circ$ , τότε το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

Για παράδειγμα, επειδή

$$60^\circ = 90^\circ - 30^\circ, \text{ έχουμε:}$$

$$\eta\mu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\varepsilon\varphi 60^\circ = \sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3} \quad \text{και}$$

$$\sigma\varphi 60^\circ = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

## ΣΧΟΛΙΟ

Από τα προηγούμενα καταλαβαίνουμε ότι δεν χρειάζεται να έχουμε πίνακες τριγωνομετρικών αριθμών όλων των γωνιών, αλλά μόνο των γωνιών από  $0^\circ$  μέχρι  $90^\circ$ .

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1η** Δίνεται ότι  $\sigma\upsilon\nu 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ . Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $54^\circ$ .

## ΛΥΣΗ

Επειδή  $54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$ , έχουμε

$$\eta\mu 54^\circ = \sigma\upsilon\nu 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα

$$\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1 \text{ ισχύει}$$

$$\eta\mu^2 54^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 54^\circ = 1, \text{ οπότε:}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 54^\circ = 1 - \eta\mu^2 54^\circ =$$

$$1 - \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 =$$

$$1 - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} =$$

$$\frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}$$

οπότε

$$\sigma\upsilon\nu 54^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

Επομένως είναι:

$$\varepsilon\varphi 54^\circ = \frac{\eta\mu 54^\circ}{\sigma\upsilon\nu 54^\circ} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \quad \text{και}$$

$$\sigma\varphi 54^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu 54^\circ}{\eta\mu 54^\circ} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}}.$$

**2η** Να υπολογιστούν με τη βοήθεια της γωνίας  $\omega$  οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών:

α)  $90^\circ + \omega$ ,

β)  $270^\circ - \omega$  και

γ)  $270^\circ + \omega$

**ΛΥΣΗ**

i) Επειδή  $90^\circ + \omega = 90^\circ - (-\omega)$ ,  
έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ + \omega) = \eta\mu(90^\circ - (-\omega)) = \\ \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega.$$

Ομοίως υπολογίζονται οι  
υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί  
της γωνίας  $90^\circ + \omega$ .

ii) Επειδή

$$270^\circ - \omega = 180^\circ + (90^\circ - \omega), \text{έχουμε:}$$

$$\eta\mu(270^\circ - \omega) = \eta\mu(180^\circ + (90^\circ - \omega)) = \\ -\eta\mu(90^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

Ομοίως υπολογίζονται οι  
υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί  
της γωνίας  $270^\circ - \omega$ .

iii) Επειδή, έχουμε:

$$270^\circ + \omega = 360^\circ - 90^\circ + \omega = \quad , \text{έχουμε:}$$

$$360^\circ + (\omega - 90^\circ)$$

$$\varepsilon\varphi(270^\circ + \omega) = \varepsilon\varphi(\omega - 90^\circ) =$$

$$-\varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega$$

Ομοίως υπολογίζονται οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $270^\circ + \omega$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας:

i)  $1200^\circ$                       ii)  $-2850^\circ$ .

2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας



$$\text{i) } \frac{187\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\text{ii) } \frac{21\pi}{4} \text{ rad.}$$

3. Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma) \quad \text{ii)}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0$$

$$\text{iii) } \eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2} \quad \text{iv)}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \eta\mu \frac{B + \Gamma}{2}.$$

4. Να απλοποιήσετε την

$$\text{παράσταση } \frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha)}{\eta\mu(-\alpha) \cdot \eta\mu(90^\circ + \alpha)}.$$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\varepsilon\varphi(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)}{\eta\mu(13\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(-x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2} - x\right)} = -1$$

6. Να δείξετε ότι έχει σταθερή τιμή η παράσταση:

$$\eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x)\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

## **Β΄ ΟΜΑΔΑΣ**

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{\eta\mu 495^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\upsilon\nu 495^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu(-120^\circ)}{\epsilon\phi(-120^\circ) + \epsilon\phi 495^\circ}$$

**2. Να αποδείξετε ότι:**

$$\frac{\eta\mu(5\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\phi(5\pi + \omega) \cdot \eta\mu(7\pi - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)} = \eta\mu^2\omega - 1.$$

3. Αν  $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 5$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\epsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \epsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$0 < \frac{\epsilon\phi(\pi + x)}{\epsilon\phi x + \sigma\phi(\pi + x)} < 1.$$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

|  |     |
|--|-----|
| 1. Αν $\eta\mu\omega = 1$ , τότε υποχρεωτικά θα είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ .    | A Ψ |
| 2. Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ , τότε υποχρεωτικά θα είναι $\eta\mu\omega = 1$ .    | A Ψ |
| 3. Υπάρχει γωνία $\omega$ με $\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega = 2$ .             | A Ψ |
| 4. Για κάθε γωνία $\omega$ ισχύει $\eta\mu\omega = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}$ | A Ψ |
| 5. $\eta\mu^2 20^\circ + \eta\mu^2 70^\circ = 1$   | A Ψ |
| 6. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει  | A Ψ |

|  |     |
|--|-----|
| $\eta\mu(x - \pi) = -\eta\mu x$  |     |
| 7. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει<br>$\eta\mu^2 x = \eta\mu x^2$   | A Ψ |
| 8. Αν $\sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{2}) + \eta\mu x = 0$ ,<br>τότε $\eta\mu x = 0$                           | A Ψ |
| 9. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει<br>$\sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{6}) - \eta\mu(\frac{\pi}{3} + x) = 0$ | A Ψ |

II. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της Α΄ ομάδας με τον ίσο του από τη Β΄ ομάδα.

| <b>A'</b><br><b>ΟΜΑΔΑ</b> |   |
|---------------------------|---|
| <b>1</b>                  | <b><math>\eta\mu 120^\circ</math></b>           |
| <b>2</b>                  | <b><math>\sigma\upsilon\nu 150^\circ</math></b> |
| <b>3</b>                  | <b><math>\eta\mu 210^\circ</math></b>           |
| <b>4</b>                  | <b><math>\sigma\upsilon\nu 300^\circ</math></b> |
| <b>5</b>                  | <b><math>\epsilon\phi 210^\circ</math></b>      |
| <b>6</b>                  | <b><math>\sigma\phi 300^\circ</math></b>        |
| <b>7</b>                  | <b><math>\epsilon\phi 310^\circ</math></b>      |
| <b>8</b>                  | <b><math>\sigma\phi 210^\circ</math></b>        |

| <b>B'</b><br><b>ΟΜΑΔΑ</b> |   |
|---------------------------|---|
| <b>A</b>                  | <b><math>-\sqrt{3}</math></b>           |
| <b>B</b>                  | <b><math>-\frac{\sqrt{3}}{2}</math></b> |
| <b>Γ</b>                  | <b><math>-\frac{\sqrt{3}}{3}</math></b> |
| <b>Δ</b>                  | <b><math>-\frac{1}{2}</math></b>        |
| <b>E</b>                  | <b><math>\frac{1}{2}</math></b>         |
| <b>Z</b>                  | <b><math>\frac{\sqrt{3}}{3}</math></b>  |
| <b>H</b>                  | <b><math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math></b>  |
| <b>Θ</b>                  | <b><math>\sqrt{3}</math></b>            |

**III. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.**

**1. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ( $A = 90^\circ$ ) και όχι ισοσκελές, τότε:**

**A)  $\eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 1,$**

**B)  $\eta\mu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma = 1,$**

**Γ)  $\epsilon\phi B = 1.$**

**2. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο τότε:**

**A)  $\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = \sigma\upsilon\nu A ,$**

**B)  $\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu A ,$**

**Γ)  $\epsilon\phi(B + \Gamma) = \epsilon\phi A .$**

**3. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο τότε:**



$$A) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{B + \Gamma}{2}\right) = \eta\mu\frac{A}{2},$$

$$B) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{B + \Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2},$$

$$\Gamma) \varepsilon\varphi\left(\frac{B + \Gamma}{2}\right) = \varepsilon\varphi\frac{A}{2}.$$

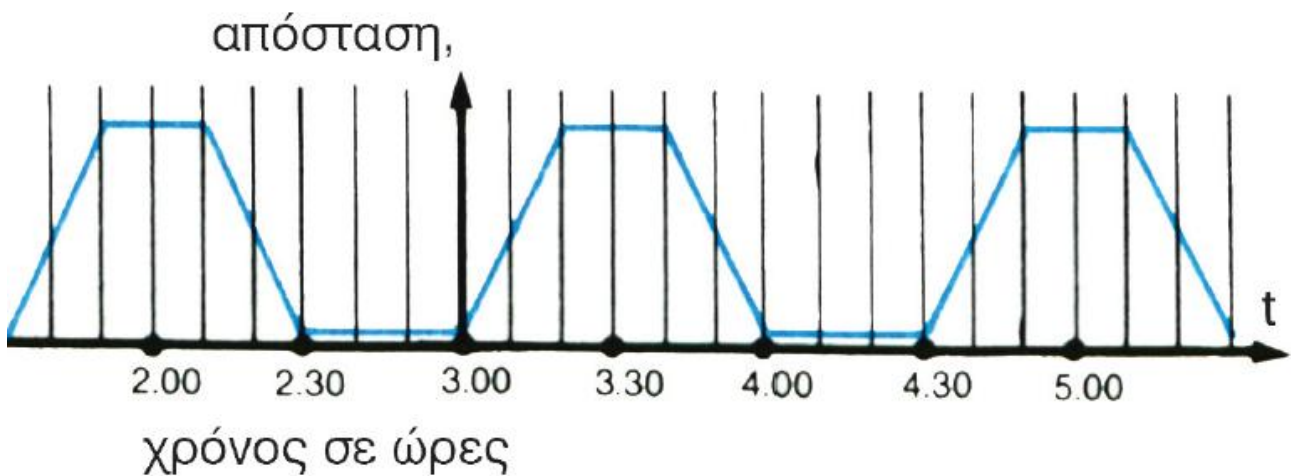
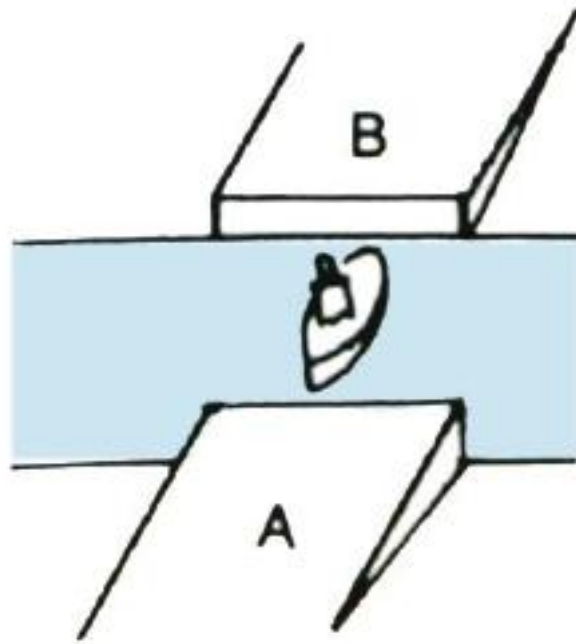
---

## 3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

---

### Περιοδικές συναρτήσεις

— Έστω ότι ένα φέρι-μποτ πηγαινοέρχεται μεταξύ δύο λιμανιών A και B και η γραφική παράσταση της απόστασης του από το λιμάνι A ως συνάρτηση του χρόνου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

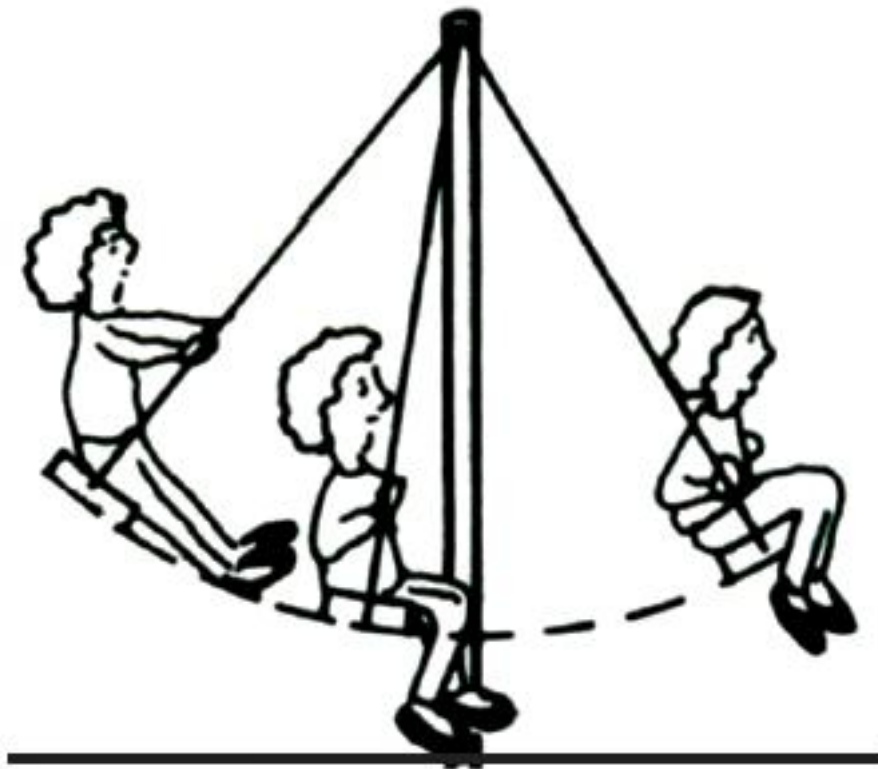
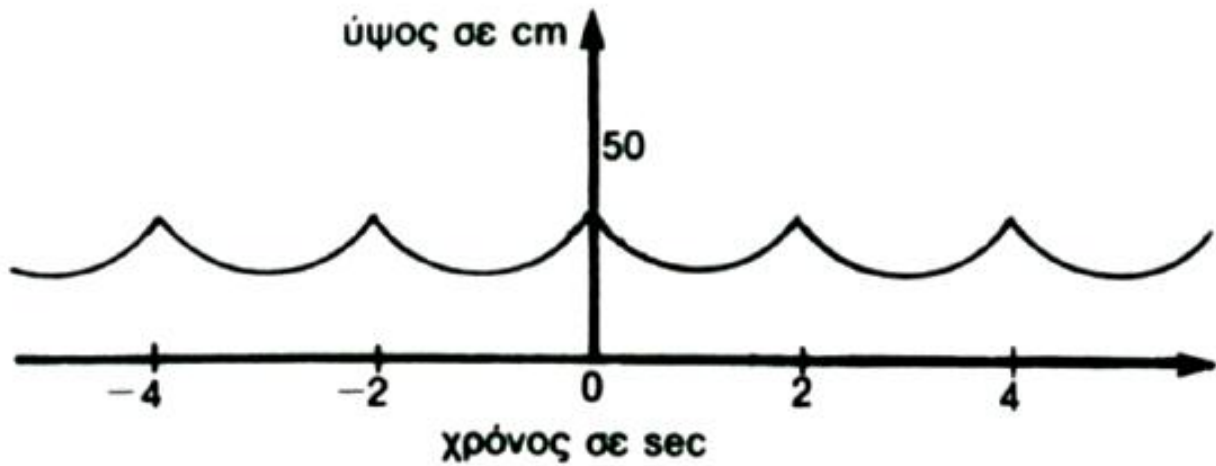


Παρατηρούμε ότι κάθε  $1\frac{1}{2}$  ώρα το φέρι-μπότ επαναλαμβάνει την ίδια ακριβώς κίνηση. Αυτό σημαίνει ότι σε όποια απόσταση βρίσκεται από το λιμάνι A σε κάποια χρονική

στιγμή  $t$ , στην ίδια απόσταση θα βρίσκεται και τη χρονική στιγμή  $t + 1\frac{1}{2}$  ώρες και στην ίδια απόσταση βρισκόταν και τη χρονική στιγμή  $t - 1\frac{1}{2}$  ώρες.

Επομένως η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση του φέριμπότ από το λιμάνι Α, με τη βοήθεια του χρόνου  $t$ , έχει τις ίδιες τιμές τις χρονικές στιγμές  $t$ ,  $t + 1\frac{1}{2}$ ,  $t - 1\frac{1}{2}$ .  
Λέμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο  $1\frac{1}{2}$  ώρες.

— Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του ύψους μιας κούνιας ως συνάρτηση του χρόνου  $t$ .



Παρατηρούμε ότι, όποιο ύψος έχει η κούνια σε κάποια χρονική στιγμή  $t$ , το

ίδιο ύψος θα έχει και τη χρονική στιγμή  $t + 2 \text{ sec}$  και το ίδιο ύψος είχε και τη χρονική στιγμή  $t - 2 \text{ sec}$ .

Λέμε πάλι ότι η συνάρτηση (που εκφράζει το ύψος της κούνιας με τη βοήθεια του χρόνου  $t$ ) είναι περιοδική με περίοδο  $2 \text{ sec}$ .

Γενικότερα:

Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός  $T > 0$  τέτοιος, ώστε για κάθε  $x \in A$  να ισχύει:

$$\text{i) } x + T \in A, x - T \in A$$

και

$$\text{ii) } f(x + T) = f(x - T) = f(x)$$

Ο πραγματικός αριθμός  $T$  λέγεται περίοδος της συνάρτησης  $f$ .

## Τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικών αριθμών

Όπως γνωρίζουμε, για κάθε γωνία  $\omega$  υπάρχει μία μόνο τιμή του  $\eta\mu\omega$ , με  $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$ . Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση με την οποία κάθε γωνία  $\omega$  αντιστοιχίζεται στο ημίτονό της. Ομοίως ορίζονται και οι άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις γωνιών.

Πολλές εφαρμογές όμως των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν περιέχουν γωνίες, αλλά πραγματικούς αριθμούς, όπως, π.χ, ο τύπος της αρμονικής ταλάντωσης  $f(t) = \alpha \cdot \eta\mu\omega t$ , στον οποίο τα  $\alpha$  και  $\omega$  είναι σταθερές και  $t$  είναι ένας πραγματικός αριθμός που παριστάνει το χρόνο.

Για το λόγο αυτό ορίζουμε στη συνέχεια τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής.

Συγκεκριμένα:

— Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός  $x$  αντιστοιχίζεται στο  $\eta\mu(x \text{ rad})$  λέγεται συνάρτηση ημίτονο και συμβολίζεται με  $\eta\mu$ .

Ορίζουμε δηλαδή ότι  
 $\eta\mu x = \eta\mu(x \text{ rad})$

Επειδή

$$\eta\mu(\omega + 360^\circ) = \eta\mu(\omega - 360^\circ) = \eta\mu\omega,$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  θα ισχύει:

$$\eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu(x - 2\pi) = \eta\mu x$$

Άρα η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .

— Ομοίως ορίζουμε και τη συνάρτηση συνημίτονο που συμβολίζεται με  $\text{συν}$ .

Ορίζουμε δηλαδή ότι  $\text{συν}x = \text{συν}(x \text{ rad})$ .

Και η συνάρτηση συνημίτονο είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .

— Η συνάρτηση εφαπτομένη που συμβολίζεται με  $\text{εφ}$ , ορίζεται ως εξής:

$$\text{εφ}x = \frac{\eta\mu x}{\text{συν}x}$$

Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $\text{εφ}$  είναι το σύνολο:

$$\mathbb{R}^1 = \{x \mid \text{συν}x \neq 0\}$$

Επειδή για κάθε  $x \in \mathbb{R}^1$  ισχύει



$\varepsilon\varphi(x + \pi) = \varepsilon\varphi(x - \pi) = \varepsilon\varphi x$ ,  
η συνάρτηση εφαπτομένη είναι  
περιοδική με περίοδο  $\pi$ .

— Η συνάρτηση συνεφαπτομένη,  
που συμβολίζεται με  $\sigma\varphi$ , ορίζεται  
ως εξής:

$$\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού  
της συνάρτησης  $\sigma\varphi$  είναι το  
σύνολο:

$$\mathbb{R}^2 = \{x \mid \eta\mu x \neq 0\}$$

Και η συνάρτηση συνεφαπτομένη  
είναι περιοδική με περίοδο  $\pi$ .

**Μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu x$**

Επειδή η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  είναι  
περιοδική με περίοδο  $2\pi$ , αρκεί να

τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους  $2\pi$ , π.χ το  $[0, 2\pi]$ . Έχουμε αναφέρει όμως ότι το  $\eta_{\mu\chi}$  είναι η τεταγμένη του σημείου  $M$  στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας  $\chi$  rad τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο. Επομένως αρκεί να εξετάσουμε πώς μεταβάλλεται η τεταγμένη του  $M$ , όταν αυτό περιφέρεται στον τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη θετική φορά, ξεκινώντας από το  $A$ .

Παρατηρούμε ότι:

- Όταν το  $\chi$  μεταβάλλεται από το 0 μέχρι το  $\frac{\pi}{2}$ ,

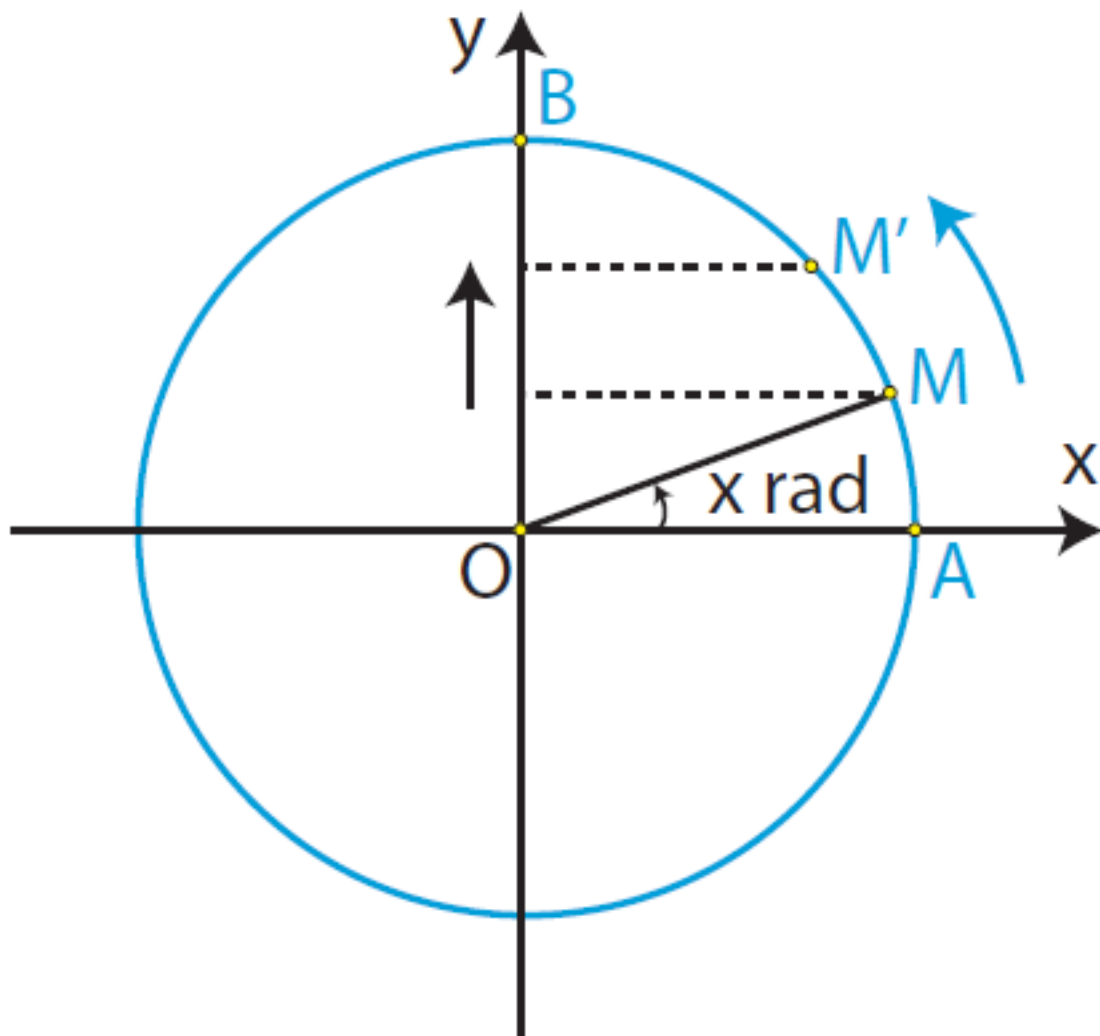
το  $M$  κινείται από το  $A$  μέχρι το  $B$ .

Άρα η τεταγμένη του αυξάνει, που σημαίνει ότι η συνάρτηση  $f(\chi) = \eta_{\mu\chi}$

είναι γνησίως αύξουσα στο

διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Ομοίως βρίσκουμε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  είναι:



— γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

— γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

$$\left[ \pi, \frac{3\pi}{2} \right] \text{ και}$$

— γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$$\left[ \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$$

• Η συνάρτηση παρουσιάζει

— μέγιστο για  $x = \frac{\pi}{2}$ , το  $\eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$  και

— ελάχιστο για  $x = \frac{3\pi}{2}$ , το

$$\eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1.$$

Τα συμπεράσματα αυτά  
συνοψίζονται ως εξής:

|     |   |                 |       |                  |        |
|-----|---|-----------------|-------|------------------|--------|
| x   | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| ημx | 0 | 1<br>μεγ.       | 0     | -1<br>ελαχ.      | 0      |

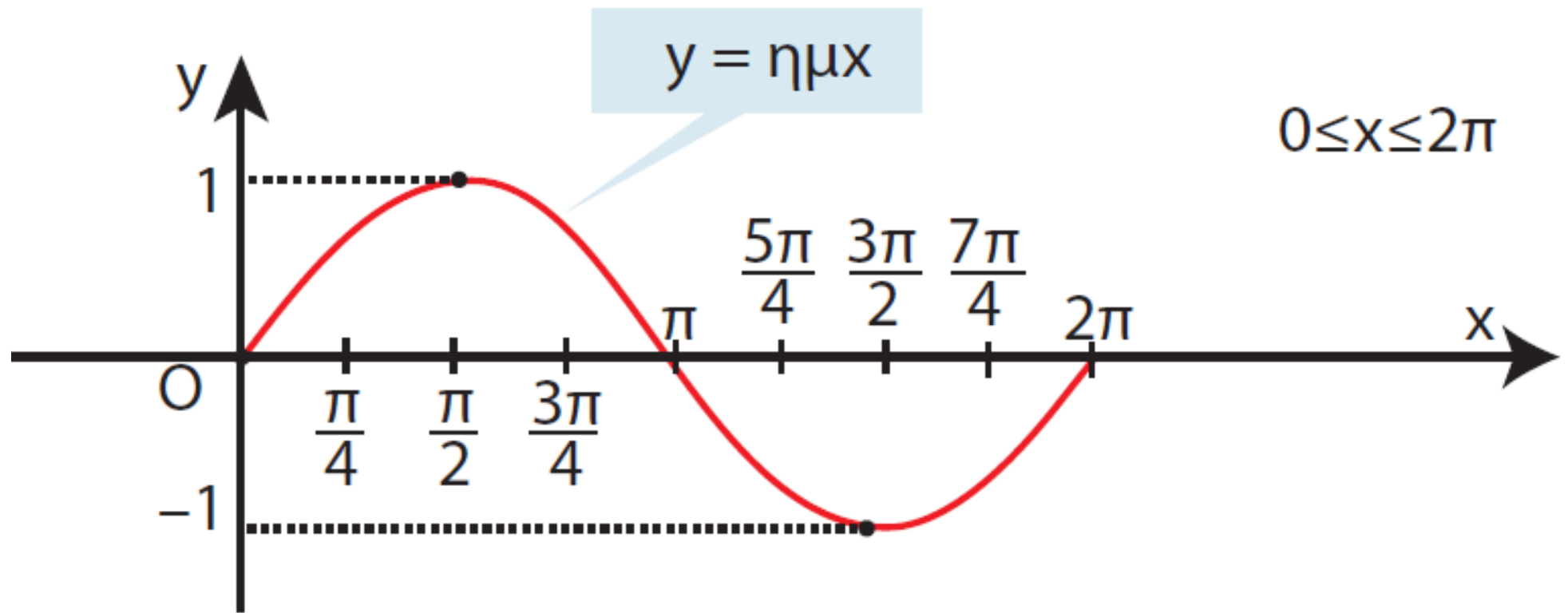
**Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης χρειαζόμαστε έναν πίνακα τιμών της.**

**Κατά τα γνωστά έχουμε:**

|            |          |                                   |                 |                  |          |                  |                  |                  |           |
|------------|----------|-----------------------------------|-----------------|------------------|----------|------------------|------------------|------------------|-----------|
| <b>x</b>   | <b>0</b> | $\frac{\pi}{4}$                   | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$    | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | <b>2π</b> |
| <b>ημx</b> | <b>0</b> | $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$ | <b>1</b>        | <b>0,71</b>      | <b>0</b> | <b>-0,71</b>     | <b>-1</b>        | <b>-0,71</b>     | <b>0</b>  |

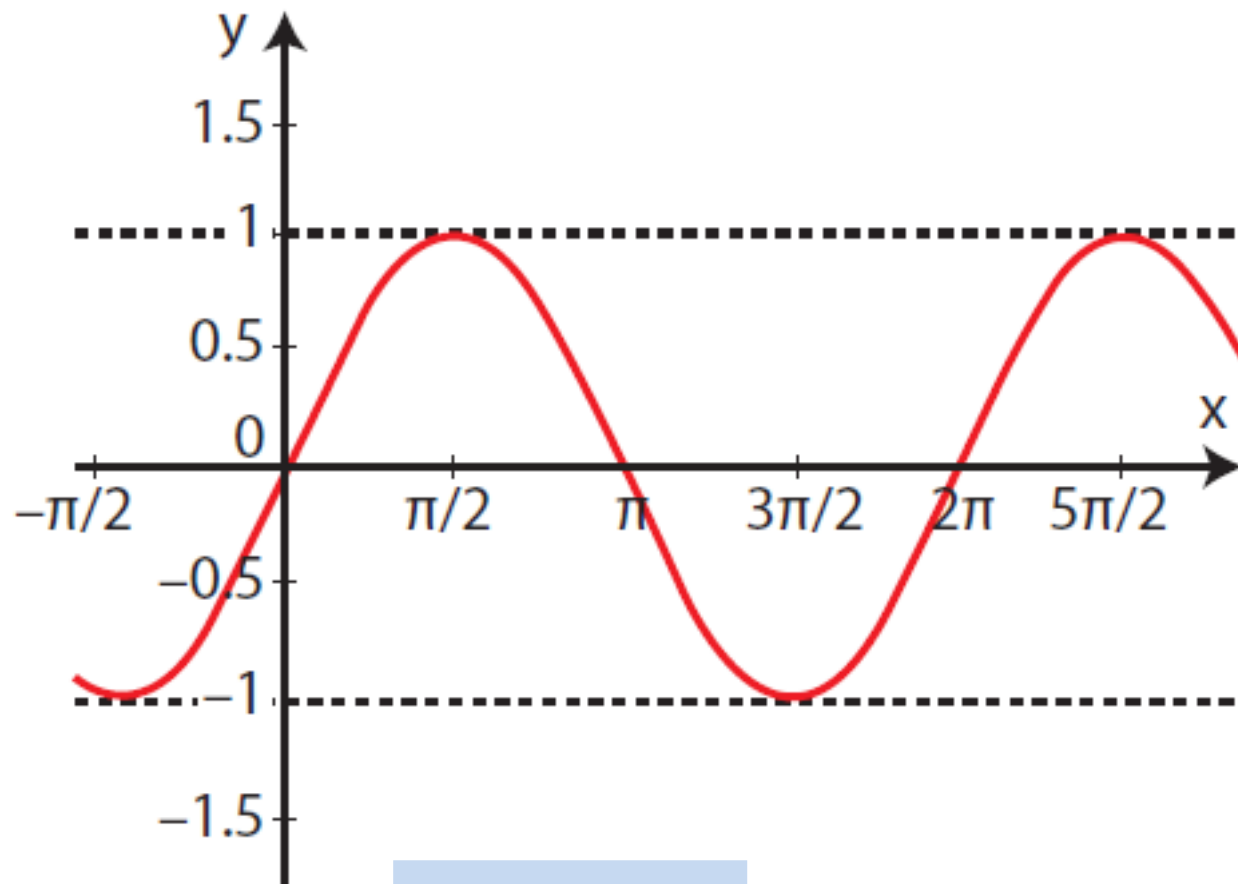
**Παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη αυτά των αντίστοιχων τιμών και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή.**

**Έτσι προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ :**



Επειδή η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  είναι περιοδική, με περίοδο  $2\pi$ , η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή στα διαστήματα  $[2\pi, 4\pi]$ ,  $[4\pi, 6\pi]$  κτλ. καθώς και στα διαστήματα  $[-2\pi, 0]$ ,  $[-4\pi, -2\pi]$  κτλ.

Έτσι έχουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο, η οποία λέγεται ημιτονοειδής καμπύλη.





Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν αντίθετα ημίτονα. Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$ . Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  είναι περιττή και επομένως η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή  $0(0,0)$  των αξόνων.

## Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Επειδή η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ , αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους  $2\pi$ , π.χ. το  $[0, 2\pi]$ .

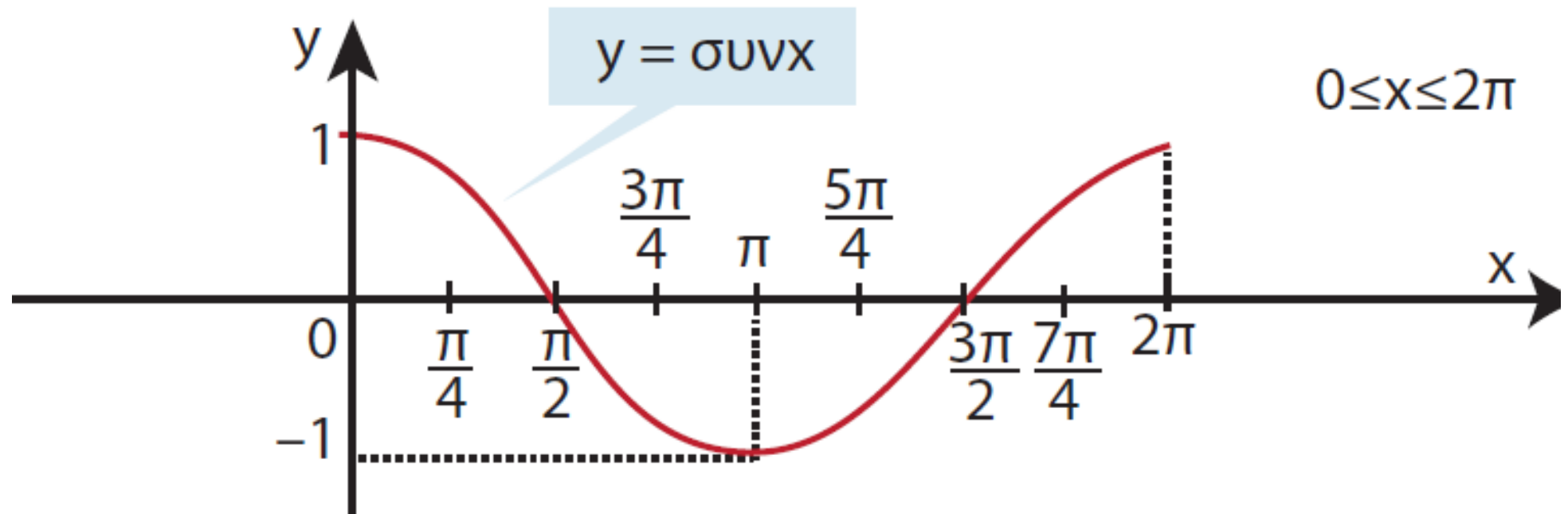
Από τη μελέτη αυτή προκύπτουν τα συμπεράσματα του επόμενου πίνακα:

|      |           |                 |             |                  |           |
|------|-----------|-----------------|-------------|------------------|-----------|
| $x$  | $0$       | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$       | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$    |
| συνx | 1<br>μεγ. | 0               | -1<br>ελαχ. | 0                | 1<br>μεγ. |

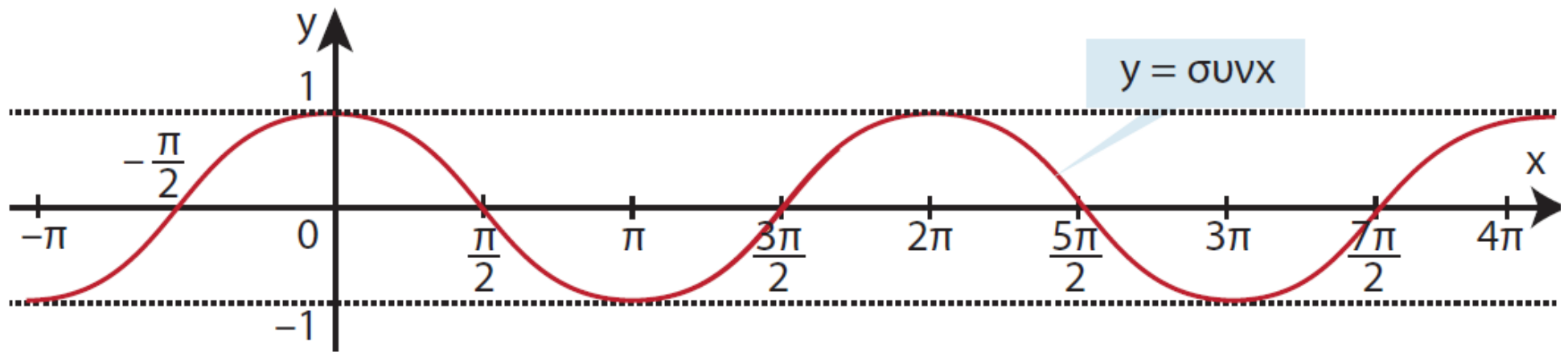
Συντάσσουμε τώρα κατά τα γνωστά και τον ακόλουθο πίνακα τιμών της συνάρτησης συνημίτονο:

|      |     |                 |                 |                  |       |                  |                  |                  |        |   |
|------|-----|-----------------|-----------------|------------------|-------|------------------|------------------|------------------|--------|---|
| $x$  | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |   |
| συνx | 1   | $\frac{2}{2}$   | 0,71            | 0                | -0,71 | -1               | -0,71            | 0                | 0,71   | 1 |

Έτσι μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της  $y = \sigma\upsilon\nu x$  για  $0 \leq x \leq 2\pi$ .



Επειδή η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ , η γραφική της παράσταση στο  $\mathbb{R}$  είναι η ακόλουθη:



**Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο. Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\cos(-x) = \cos x$ .**

**Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση  $f(x) = \cos x$  είναι άρτια και επομένως η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα  $y'y$ .**

## Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \varepsilon\varphi x$

Επειδή η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\varphi x$  είναι περιοδική με περίοδο  $\pi$ , αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα

πλάτους  $\pi$ , π.χ. το  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

(Το διάστημα είναι ανοικτό, αφού η συνάρτηση  $\varepsilon\varphi$  δεν ορίζεται στα

$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ ).

Ας υποθέσουμε ότι η τελική πλευρά της γωνίας  $x$  rad τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο  $M$  και την ευθεία των εφαπτομένων στο σημείο  $E$ .

Όπως έχουμε αναφέρει η  $\varepsilon\varphi x$  ισούται με την τεταγμένη του σημείου  $E$ .

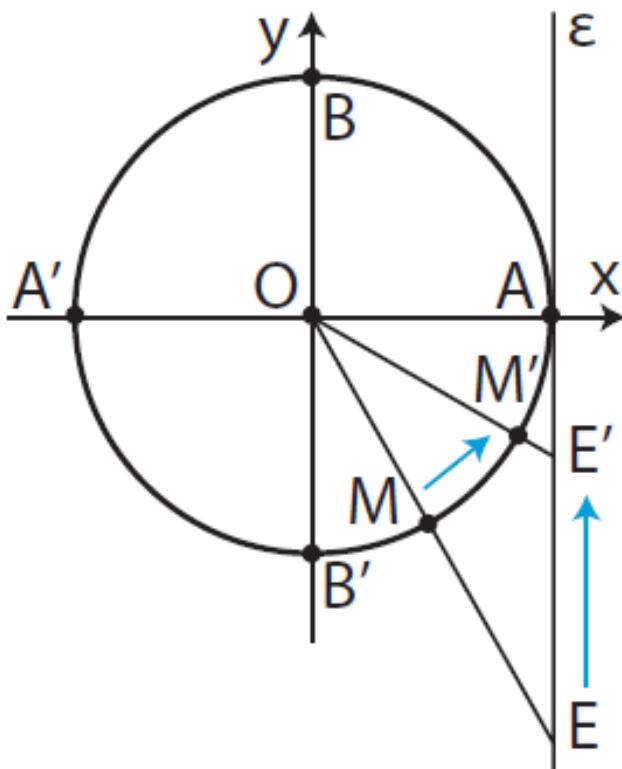
**Επομένως:**

• Όταν ο  $x$  παίρνει τιμές από  $-\frac{\pi}{2}$

προς το  $\frac{\pi}{2}$  το  $M$  κινείται στον

τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη θετική φορά από το  $B'$  προς το  $B$ , οπότε η τεταγμένη του σημείου  $E$  αυξάνει. Αυτό σημαίνει ότι η  $f(x) = \varepsilon \varphi x$  είναι γνησίως αύξουσα στο

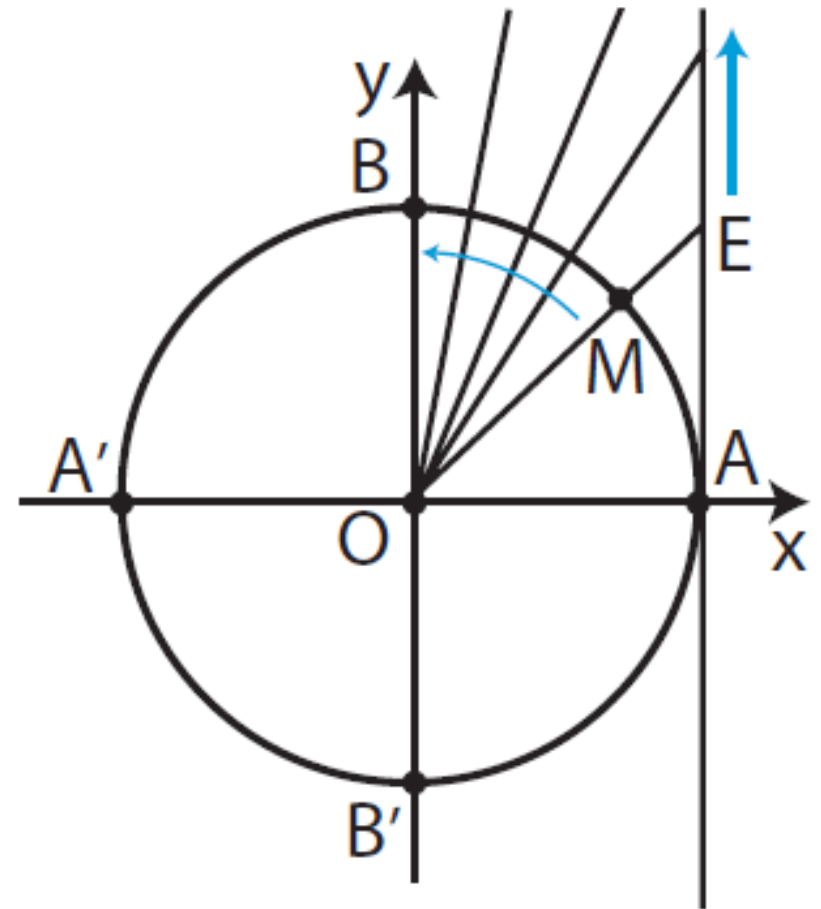
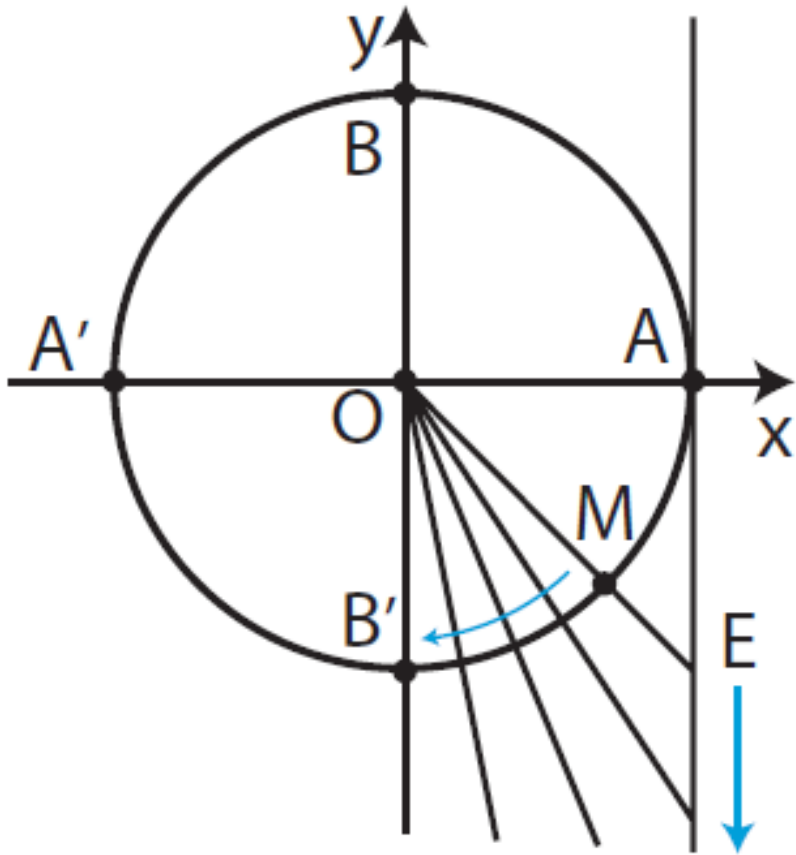
διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .



• Όταν ο  $x$  «τείνει» στο  $-\frac{\pi}{2}$  από μεγαλύτερες τιμές η  $\varepsilon\phi x$  «τείνει» στο  $-\infty$ .

Γι' αυτό λέμε ότι η ευθεία  $x = -\frac{\pi}{2}$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ .

Επίσης όταν ο  $x$  «τείνει» στο  $\frac{\pi}{2}$  από μικρότερες τιμές η  $\varepsilon\phi x$  τείνει στο  $+\infty$ . Γι' αυτό λέμε ότι και η ευθεία  $x = \frac{\pi}{2}$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ .

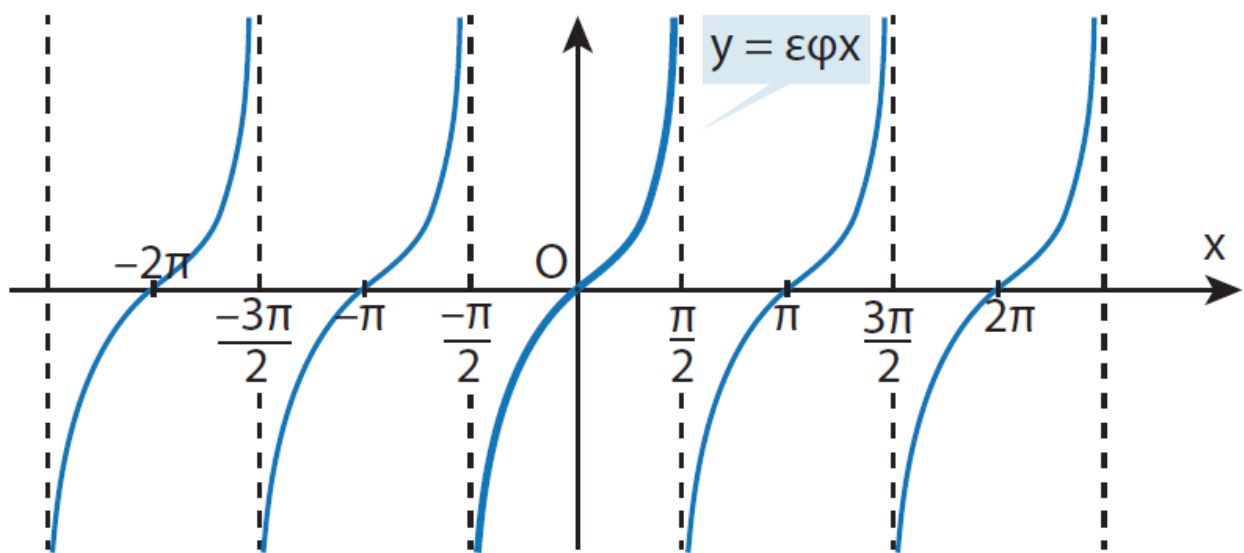




Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της  $f(x)=\varepsilon\varphi x$  συντάσσουμε, με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών πινάκων ή με επιστημονικό κομπιουτεράκι, έναν πίνακα τιμών της:

|  |                     |                  |                  |   |          |                                       |                 |                             |                     |
|--|---------------------|------------------|------------------|---|----------|---------------------------------------|-----------------|-----------------------------|---------------------|
| <b>x</b>                                 | $-\frac{\pi}{2}$    | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$                        | <b>0</b> | $\frac{\pi}{6}$                       | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$             | $\frac{\pi}{2}$     |
| <b><math>\varepsilon\varphi x</math></b> | <b>Δεν ορίζεται</b> | $-\sqrt{3}$      | $-1$             | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$<br>$\approx -0,6$ | <b>0</b> | $\frac{\sqrt{3}}{3}$<br>$\approx 0,6$ | <b>1</b>        | $\sqrt{3}$<br>$\approx 1,7$ | <b>Δεν ορίζεται</b> |

Στη συνέχεια παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη αυτά των αντίστοιχων τιμών και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή. Η γραφική παράσταση της  $f(x)=\epsilon\phi x$  φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Είναι φανερό ότι η γραφική παράσταση της  $f(x)=\epsilon\phi x$  έχει κέντρο συμμετρίας το  $O$ , αφού (§ 5.3:  $\epsilon\phi(-x) = -\epsilon\phi x$  είναι περιττή συνάρτηση.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση  $f(x)=3\eta\mu x$

### ΛΥΣΗ

Οι τιμές της συνάρτησης  $f(x)=3\eta\mu x$  είναι προφανώς τριπλάσιες από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης  $\varphi(x)=\eta\mu x$ . Εξάλλου και η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο

$2\pi$ , αφού ισχύει:

$$f(x + 2\pi) = 3 \cdot \eta\mu(x + 2\pi) = 3 \cdot \eta\mu x = f(x)$$

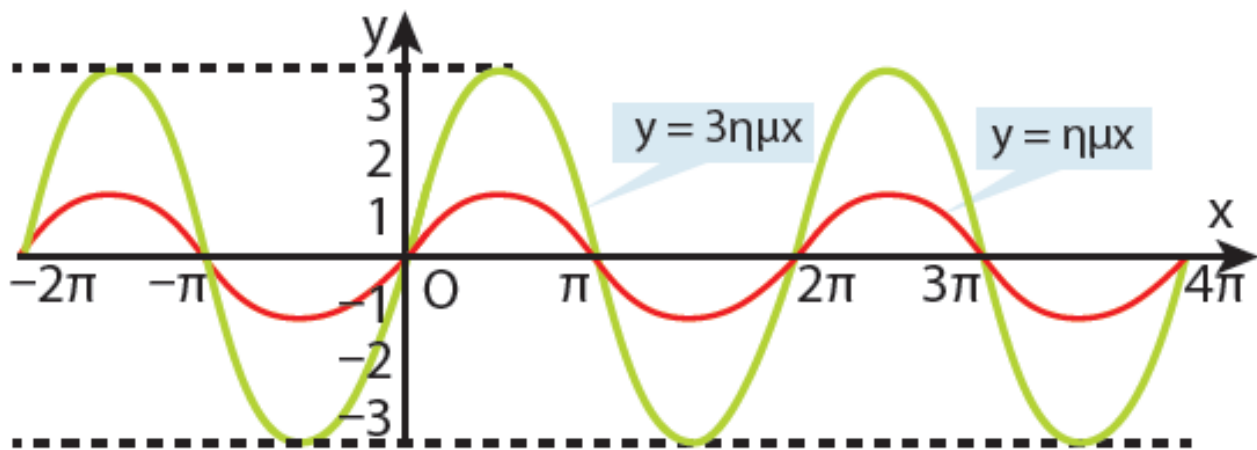
, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και

$$f(x - 2\pi) = 3 \cdot \eta\mu(x - 2\pi) = 3 \cdot \eta\mu x = f(x),$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Έχοντας υπόψιν τα στοιχεία αυτά και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της  $f(x)=3\eta\mu x$ .

|                                |          |                                   |                         |                                    |                          |
|--------------------------------|----------|-----------------------------------|-------------------------|------------------------------------|--------------------------|
| <b>x</b>                       | <b>0</b> | <b><math>\frac{\pi}{2}</math></b> | <b><math>\pi</math></b> | <b><math>\frac{3\pi}{2}</math></b> | <b><math>2\pi</math></b> |
| <b><math>\eta\mu x</math></b>  | <b>0</b> | <b>1</b>                          | <b>0</b>                | <b>-1</b>                          | <b>0</b>                 |
| <b><math>3\eta\mu x</math></b> | <b>0</b> | <b>3</b>                          | <b>0</b>                | <b>-3</b>                          | <b>0</b>                 |



**2. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση  $f(x)=\eta\mu 2x$**

**ΛΥΣΗ**

**Κάθε τιμή της συνάρτησης  $f(x)=\eta\mu 2x$  επαναλαμβάνεται, όταν το  $2x$  αυξηθεί κατά  $2\pi$ , που σημαίνει ότι η τιμή αυτή επαναλαμβάνεται, όταν το  $x$  αυξηθεί**

κατά  $\pi$ . Επομένως, η συνάρτηση  $f(x)=\eta\mu 2x$  είναι περιοδική με

περίοδο  $\pi$ . Πράγματι:

$$f(x + \pi) = \eta\mu 2(x + \pi) =$$

$$\eta\mu(2x + 2\pi) = \eta\mu 2x = f(x), \quad \text{για}$$

κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

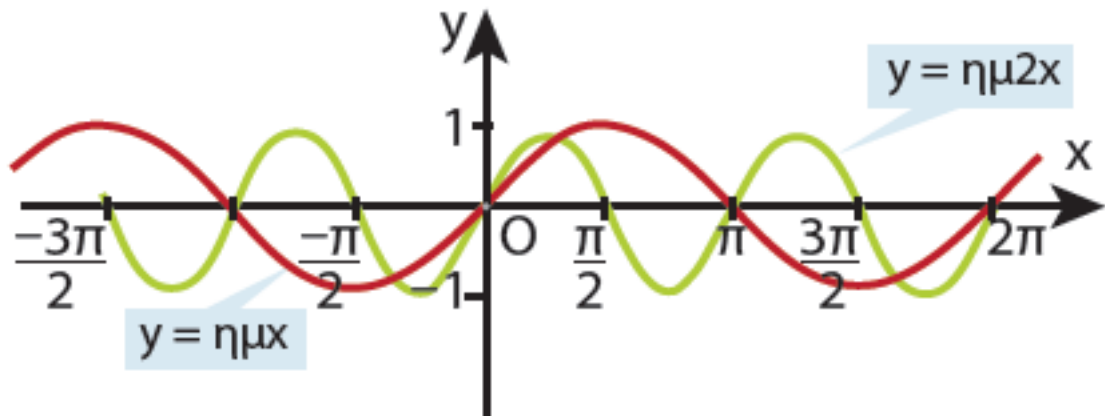
$$\text{και } f(x - \pi) = \eta\mu 2(x - \pi) =$$

$$\eta\mu(2x - 2\pi) = \eta\mu 2x = f(x), \quad \text{για}$$

κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Έχοντας υπόψη το στοιχείο αυτό και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της  $f(x)=\eta\mu 2x$ .

|              |     |                 |       |                  |        |
|--------------|-----|-----------------|-------|------------------|--------|
| $x$          | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $2\pi$ |
| $\eta\mu 2x$ | $0$ | $1$             | $0$   | $-1$             | $0$    |



3. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση  $f(x)=3\eta\mu 2x$

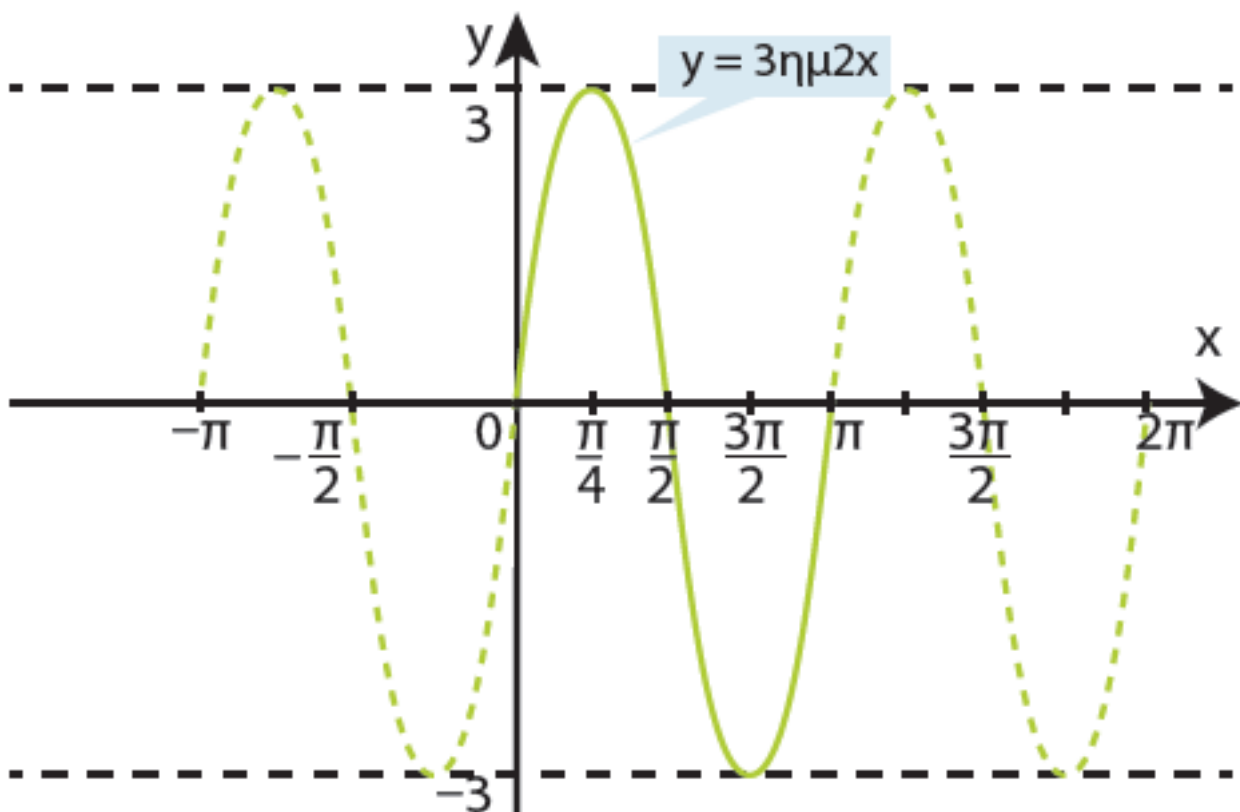
**ΛΥΣΗ**

Σύμφωνα με τα προηγούμενα παραδείγματα η συνάρτηση αυτή έχει μέγιστο 3, ελάχιστο -3 και είναι περιοδική με περίοδο  $\pi$ .

Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης  $f(x)=3\eta\mu 2x$  είναι ο εξής:

|               |     |                 |                 |                  |       |
|---------------|-----|-----------------|-----------------|------------------|-------|
| $x$           | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
| $3\eta\mu 2x$ | $0$ | $3$             | $0$             | $-3$             | $0$   |

Με τη βοήθεια του πίνακα αυτού σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.



## Σχόλιο

Από τα προηγούμενα παραδείγματα γίνεται φανερό ότι, σε μια συνάρτηση της μορφής  $f(x)=\rho \eta\mu\omega x$ , όπου  $\rho, \omega > 0$ :

(i) Το  $\rho$  καθορίζει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με  $\rho$  και την ελάχιστη τιμή

της που είναι ίση με  $-\rho$ .

(ii) Το  $\omega$  καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης που είναι ίση με  $\frac{2\pi}{\omega}$ .

Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για μια συνάρτηση της μορφής  $f(x)=\rho \sigma\upsilon\nu\omega x$ , όπου  $\rho, \omega > 0$



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, κάθε φορά στο ίδιο σύστημα αξόνων

i)  $f(x) = 2\eta\mu x,$   
 $g(x) = 0,5 \cdot \eta\mu x,$   
 $h(x) = -2 \cdot \eta\mu x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

ii)  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x,$   
 $g(x) = 0,5 \cdot \sigma\upsilon\nu x,$   
 $h(x) = -2 \cdot \sigma\upsilon\nu x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

2. Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu x$  και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = 1 + \eta\mu x \quad \text{και}$$

$$h(x) = -1 + \eta\mu x$$

3. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \eta\mu x \quad \text{και} \quad g(x) = \eta\mu 3x,$$

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

4. Ομοίως των συναρτήσεων

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad \text{και} \quad g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x,$$

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

5. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{2}$ .

Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της εν λόγω συνάρτησης; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

6. Ομοίως για τη συνάρτηση

$$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$$

**7. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων**

**i)  $f(x) = \varepsilon\varphi x$**

**ii)  $g(x) = 1 + \varepsilon\varphi x$  και**

**iii)  $h(x) = -1 + \varepsilon\varphi x$**

**στο ίδιο σύστημα αξόνων.**

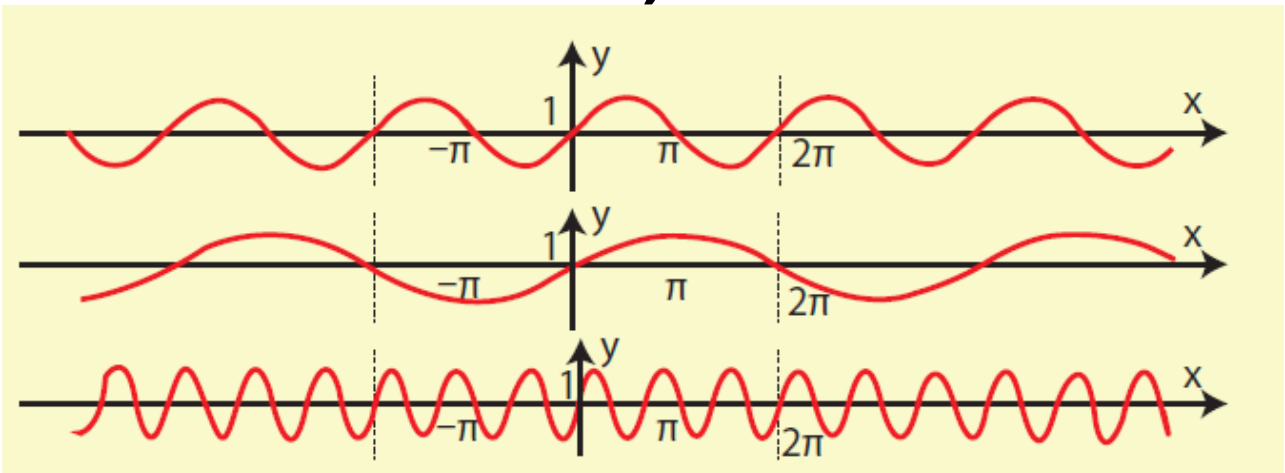
**8. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\varphi 2x$ .**

**9. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x) = \sigma\varphi x$ .**

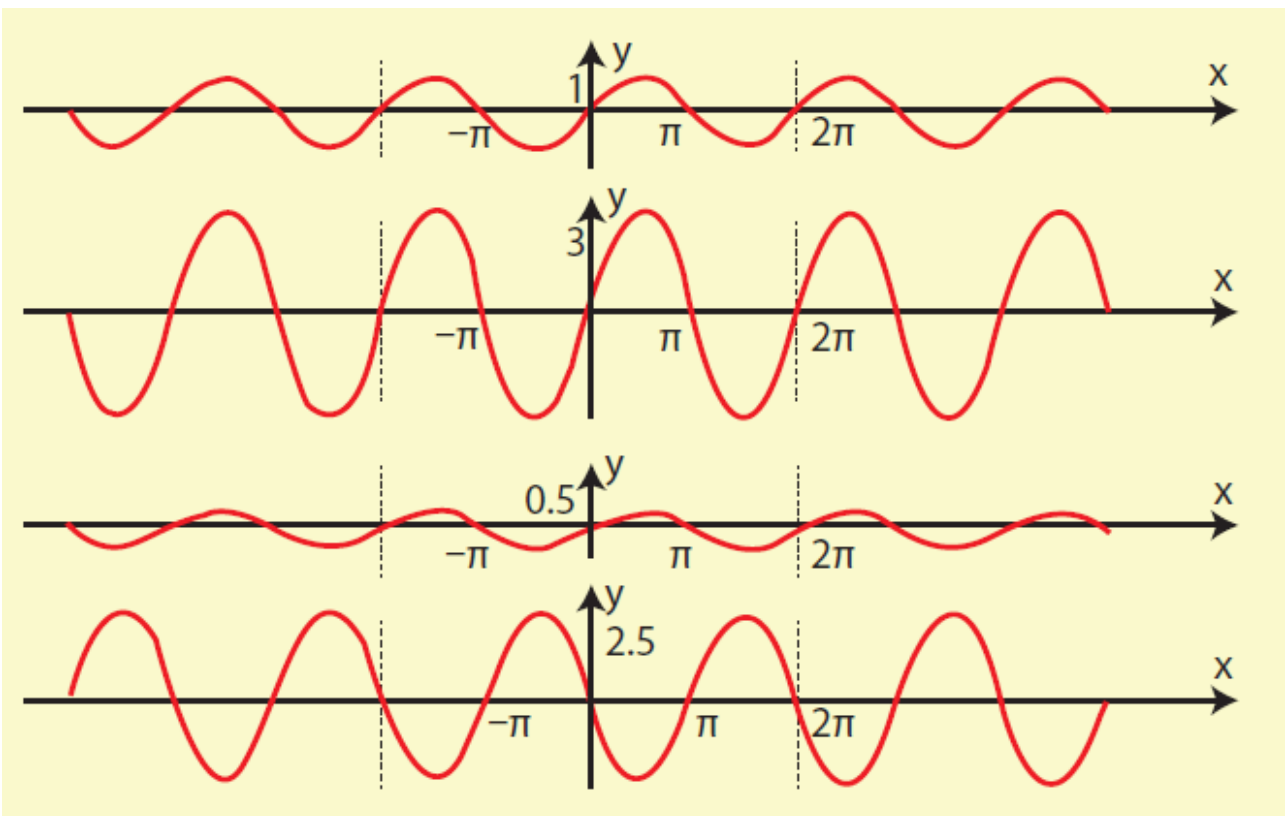
## **B' ΟΜΑΔΑΣ**

**1. Να βρείτε τις εξισώσεις των ημιτονοειδών καμπύλων:**

i)



ii)



**2. Η παλίρροια σε μια θαλάσσια περιοχή περιγράφεται κατά προσέγγιση με τη συνάρτηση**

$$y = 3 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right), \text{ όπου } y \text{ το ύψος της}$$

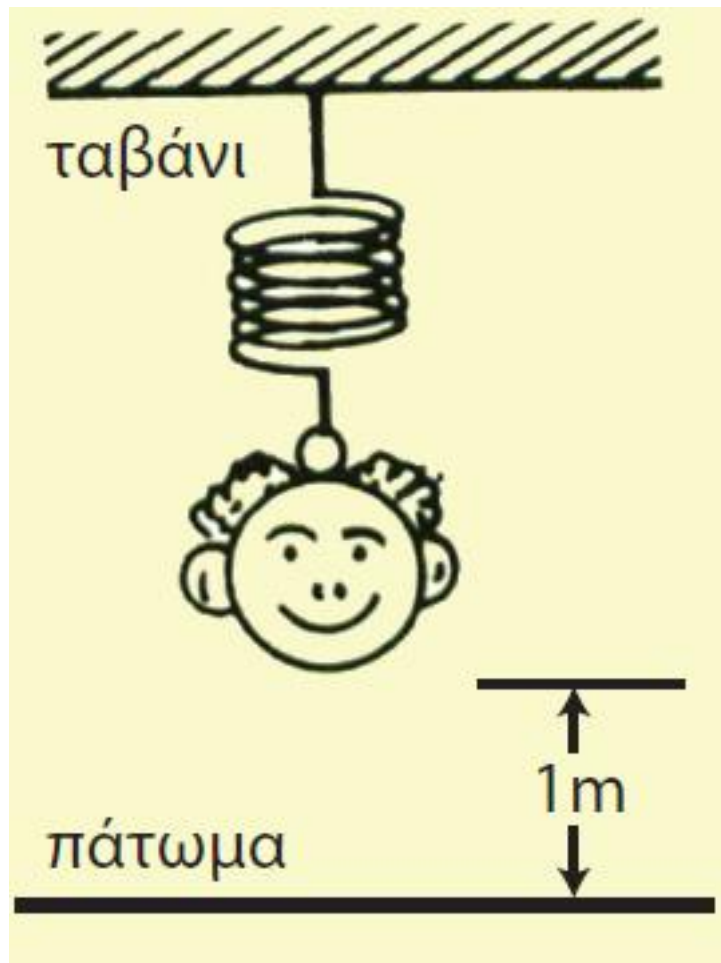
**στάθμης των υδάτων σε μέτρα και } t \text{ ο χρόνος σε ώρες.}**

**i) Να βρείτε την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη.**

**ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \leq t \leq 12$ .**

**3. Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι και απέχει από το πάτωμα 1m. Όταν το παιγνίδι ανεβοκατεβαίνει, το ύψος**

του από το πάτωμα σε μέτρα είναι  
$$h = 1 + \frac{1}{3} \sigma\upsilon\nu 3t,$$
  
όπου  $t$  ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.



- i) Να υπολογίσετε τη διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο και στο ελάχιστο ύψος.
- ii) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \leq t \leq 2\pi$

4. Η απόσταση  $x$  του πιστονιού σε μέτρα από το ένα άκρο του κυλίνδρου περιγράφεται με τη συνάρτηση  $x(t) = 0,1 + 0,1 \cdot \eta\mu 3t$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.



i) Να υπολογίσετε το πλάτος της κίνησης του πιστονιού.

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \leq t \leq 2\pi$

Ποιες στιγμές του χρονικού αυτού διαστήματος η απόσταση είναι  $0,15\text{m}$ ;

---

## 3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

---

### Η Εξίσωση $\eta\mu\chi=\alpha$

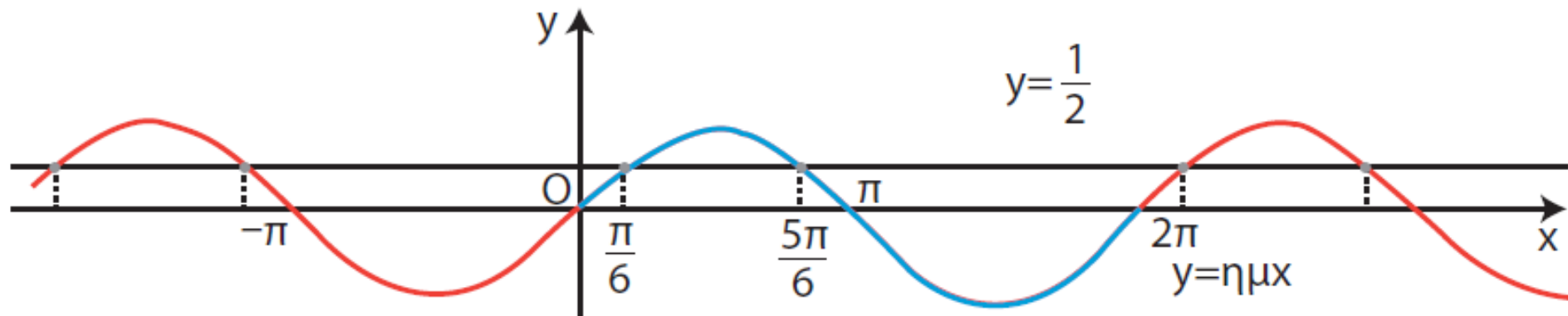
Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$\eta\mu\chi = \frac{1}{2}.$$

Είναι φανερό ότι ζητάμε να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης  $y = \eta\mu\chi$  και της ευθείας

$$y = \frac{1}{2}.$$





Ζητάμε δηλαδή εκείνα τα  $x \in \mathbb{R}$ , για τα οποία η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  παίρνει την τιμή  $\frac{1}{2}$ . Επειδή η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ , για να βρούμε τα ζητούμενα  $x$ , που είναι άπειρα σε πλήθος (βλ. σχήμα), αρκεί να βρούμε όσα από αυτά υπάρχουν σε ένα διάστημα πλάτους  $2\pi$  και σε κάθε ένα να προσθέσουμε το  $\kappa \cdot 2\pi$ , όπου  $\kappa$  ακέραιος.

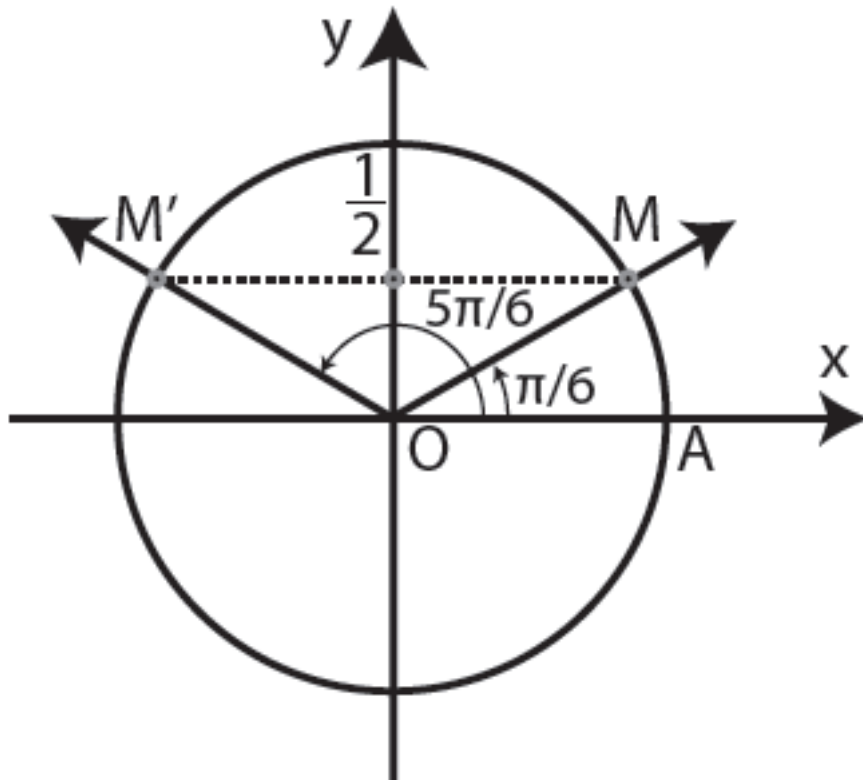
Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης  $\eta\mu x = \frac{1}{2}$  στο διάστημα  $[0,$

$2\pi]$ , είναι οι  $\frac{\pi}{6}$  και  $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ,

γιατί  $\eta\mu \frac{\pi}{6} = \eta\mu \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ .

Επομένως το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης  $\eta\mu x = \frac{1}{2}$  δίνεται από τους τύπους

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \quad \quad \quad \eta \quad \quad \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{array} \right.$$



Γενικότερα, αν  $\theta$  είναι μία λύση της εξίσωσης  $\eta\mu\chi = \alpha$ , αν δηλαδή ισχύει  $\eta\mu\theta = \alpha$ , τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\chi = 2\kappa\pi + \theta$$

$$\acute{\eta}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\chi = 2\kappa\pi + (\pi - \theta)$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση  $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

### ΛΥΣΗ

Επειδή  $\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ισχύει

$\eta\mu(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Επομένως η

εξίσωση γράφεται  $\eta\mu x = \eta\mu(-\frac{\pi}{3})$ ,

οπότε οι λύσεις της δίνονται από τους τύπους:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \end{array} \right., \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x =$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{24}$$

**και**

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{24}$$

**Άρα οι λύσεις της εξίσωσης  
δίνονται από τους τύπους**

$$\left\{ \begin{array}{l} x = k\pi - \frac{\pi}{24} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \quad \quad \quad , k \in \mathbb{Z} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{24} \end{array} \right.$$

## Η εξίσωση $\text{συν}x = \alpha$

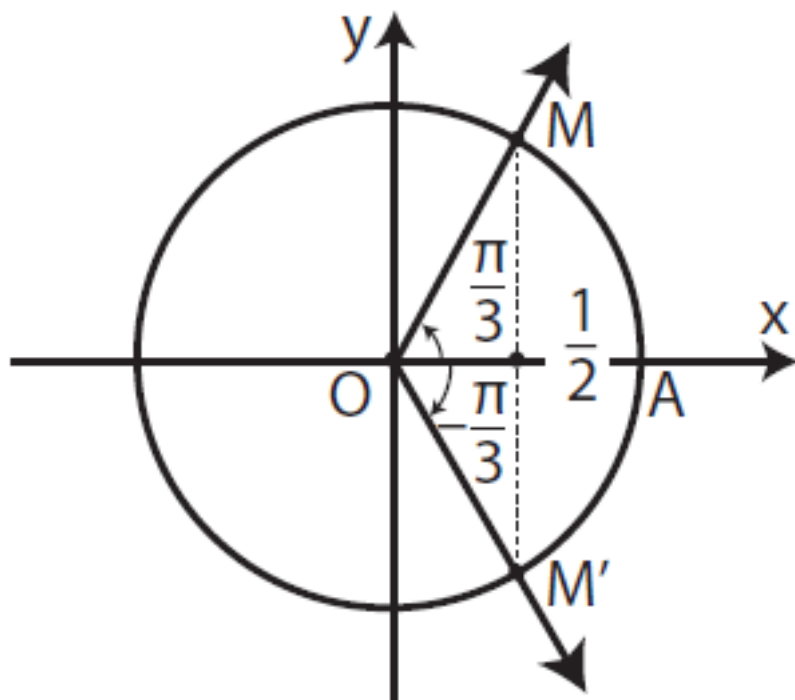
Με ανάλογες σκέψεις όπως προηγουμένως, εργαζόμαστε για να λύσουμε π.χ. την εξίσωση

$$\text{συν}x = \frac{1}{2}.$$

Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης  $\text{συν}x = \frac{1}{2}$  στο διάστημα

$[-\pi, \pi]$  είναι οι  $\frac{\pi}{3}$  και  $-\frac{\pi}{3}$ , γιατί

$$\text{συν}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{συν}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$



Επομένως το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης  $\sin x = \frac{1}{2}$  δίνεται από

ΤΟΥΣ ΤΥΠΟΥΣ

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \quad \quad \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{array} \right.$$



Γενικότερα, αν  $\theta$  είναι μία λύση της εξίσωση  $\sin x = a$ , αν δηλαδή ισχύει  $\sin \theta = a$ , τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους

$$\begin{aligned}x &= 2k\pi - \theta \\ &\text{ή} \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\ x &= 2k\pi - \theta\end{aligned}$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

## ΛΥΣΗ

Επειδή  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , έχουμε

$\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$ , οπότε οι λύσεις της

εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση  $\text{συν}2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**ΛΥΣΗ**

Επειδή  $\text{συν}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ισχύει

$$\text{συν}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ δηλαδή}$$

$$\text{συν}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Έχουμε επομένως}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6}, \text{ οπότε}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ 2x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \end{array} \right., \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ή ισοδύναμα}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ x = k\pi - \frac{5\pi}{12} \end{array} \right., \quad k \in \mathbb{Z}$$

## Η εξίσωση $\epsilon\phi x = \alpha$

Έστω η εξίσωση  $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ . Όπως γνωρίζουμε η συνάρτηση  $\epsilon\phi$  είναι περιοδική με περίοδο  $\pi$ . Επομένως, για να λύσουμε την

εξίσωση, αρκεί να βρούμε τις λύσεις της σε ένα διάστημα

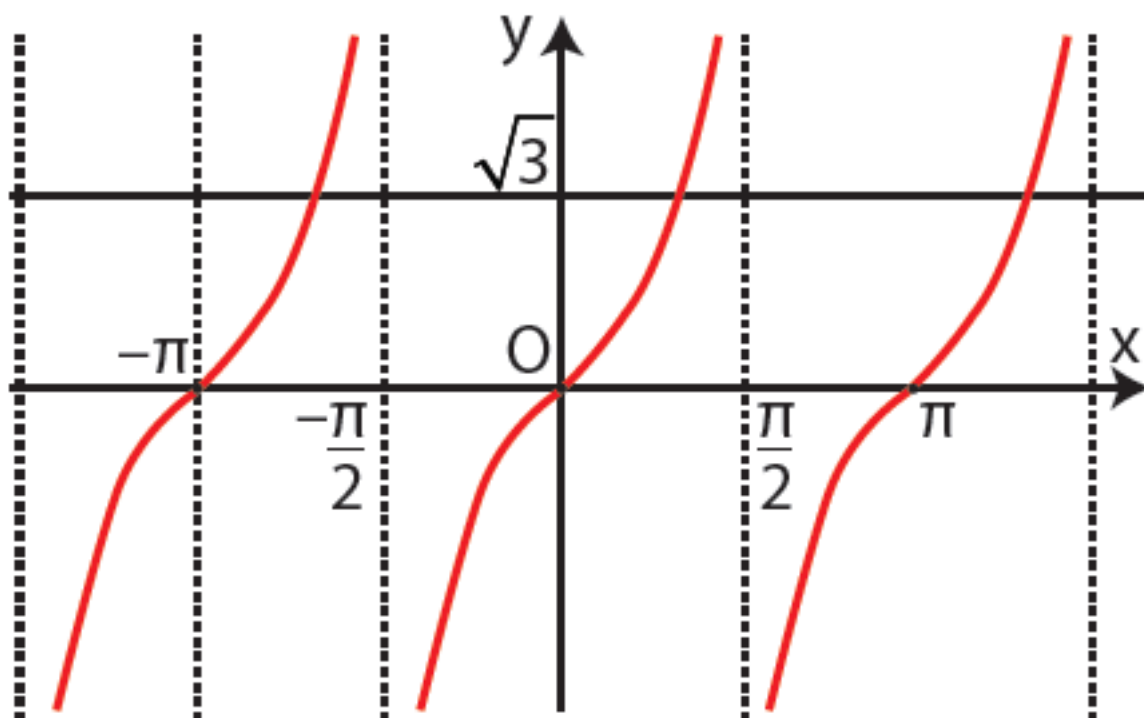
πλάτους  $\pi$ , π.χ. το  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

και να προσθέσουμε σε αυτές το  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Όπως φαίνεται όμως και στο σχήμα, μια μόνο λύση της εξίσωσης  $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$  υπάρχει στο διάστημα

αυτό. Η λύση αυτή είναι η  $\frac{\pi}{3}$ , γιατί

$$\varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$



Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης

$$\epsilon\phi\chi = \sqrt{3} \text{ είναι: } \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Γενικότερα, αν  $\theta$  είναι μια λύση της εξίσωσης  $\epsilon\phi\chi = \alpha$ , αν δηλαδή ισχύει  $\epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\theta$ , τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι:

$$\chi = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ο ίδιος τύπος λύσεων ισχύει και για την εξίσωση  $\sigma\phi\chi = \alpha$ .

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση  $\varepsilon\varphi x = -1$

### ΛΥΣΗ

Επειδή  $\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1$ , ισχύει

$\varepsilon\varphi \left( -\frac{\pi}{4} \right) = -1$ . Έχουμε επομένως

$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \left( -\frac{\pi}{4} \right)$ , οπότε

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση  $\sigma\varphi x = \sqrt{3}$

### ΛΥΣΗ

Επειδή  $\sigma\varphi \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ , έχουμε

$\sigma\varphi x = \sigma\varphi \frac{\pi}{6}$ , οπότε οι λύσεις της

εξίσωσης είναι  $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i)  $\eta\mu x = 0$

ii)  $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

iii)  $\sigma\upsilon\nu x = 0$

iv)  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i) } \eta\mu\chi = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ii) } \eta\mu\chi = -1$$

$$\text{iii) } \sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{iv) } \sigma\upsilon\nu\chi = -1$$

**3. Να λύσετε τις εξισώσεις**

$$\text{i) } \epsilon\phi\chi = 0$$

$$\text{ii) } \epsilon\phi\chi = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{iii) } \sigma\phi\chi = 1$$

$$\text{iv) } \sigma\phi\chi = \sqrt{3}$$

**4. Να λύσετε τις εξισώσεις**

$$\text{i) } \epsilon\phi\chi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ii) } \sigma\phi\chi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**5. Να λύσετε τις εξισώσεις**



i)  $(1 - \eta\mu\chi)(2\eta\mu\chi - \sqrt{3}) = 0$

ii)  $(2\eta\mu\chi + \sqrt{2})(1 - \sigma\upsilon\nu\chi) = 0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις

i)  $(\sqrt{3} + \epsilon\phi\chi)(1 - \epsilon\phi\chi) = 0$

ii)  $(2\sigma\upsilon\nu\chi + 1)(\epsilon\phi^2\chi - 3)\sigma\phi\chi = 0$

7. Χρησιμοποιώντας  
τριγωνομετρικούς πίνακες ή  
επιστημονικό κομπιουτεράκι να  
λύσετε τις εξισώσεις

i)  $\eta\mu\chi = 0,951$

ii)  $\sigma\upsilon\nu\chi = -0,809$

iii)  $\epsilon\phi\chi = 28,636$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

i)  $2\eta\mu 3\chi = \sqrt{3}$

ii)  $\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{5} + 1 = 0$

iii)  $3\epsilon\phi \frac{2\chi}{7} - \sqrt{3} = 0$

**9. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

ii)  $2\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

iii)  $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{3}$

**10. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0$

ii)  $2\sigma\upsilon\nu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$

iii)  $3\epsilon\varphi^2t = 3 + 2\sqrt{3}\epsilon\varphi t$

**11. Να λύσετε τις εξισώσεις**

i)  $\eta\mu^2x + 5\sigma\upsilon\nu^2x = 4$

ii)  $\epsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi 2x = 1$

**12. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$ , καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις έχει τη μέγιστη και για ποιες την ελάχιστη τιμή της:**

**i)  $f(x) = 3\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right), 0 \leq x < 2\pi,$**

**ii)  $g(x) = 7\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right), 0 \leq x < 2\pi$**

**13. Οι μηνιαίες πωλήσεις ενός εποχιακού προϊόντος (σε χιλιάδες κομμάτια) δίνονται κατά προσέγγιση από τον τύπο**

**$S = 75 + 50 \cdot \eta\mu\frac{\pi t}{6},$  όπου  $t$  ο χρόνος**

**σε μήνες και με  $t = 1$  να αντιστοιχεί στον Ιανουάριο.**

**i) Να βρείτε ποιους μήνες οι πωλήσεις φτάνουν τις 100000 κομμάτια,**

ii) Να βρείτε ποιο μήνα έχουμε το μεγαλύτερο αριθμό πωλήσεων και πόσες είναι αυτές.

## **B' ΟΜΑΔΑΣ**

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i)  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$

ii)  $\epsilon\phi 2x - \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i)  $\epsilon\phi x \cdot \eta\mu x + 1 = \eta\mu x + \epsilon\phi x$

ii)  $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\epsilon\phi x = 4$

3. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης  $\epsilon\phi x = 1$  στο διάστημα  $(3\pi, 4\pi)$ .

4. Να λύσετε την εξίσωση  $1 + \sin x = \eta \mu x$  στο διάστημα  $[0, 2\pi)$ .

5. Να λύσετε την εξίσωση:

$\epsilon \varphi x = \sigma \varphi \left( \frac{\pi}{3} + x \right)$  στο διάστημα  $[0, 2\pi)$ .

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 2ου ΤΟΜΟΥ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup> - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

|  |     |
|--|-----|
| 3.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί<br>Γωνίας.....           | 5   |
| 3.2 Βασικές Τριγωνομετρικές<br>Συναρτήσεις .....     | 44  |
| 3.3 Αναγωγή στο 1 <sup>ο</sup> Τεταρτημόριο<br>..... | 60  |
| 3.4 Οι Τριγωνομετρικές<br>Συναρτήσεις .....          | 87  |
| 3.5 Βασικές Τριγωνομετρικές<br>Εξισώσεις .....       | 120 |

**Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «Διατίθεται με τιμή πώλησης». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του Νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α').**

**Απαγορεύεται η αναπαραγωγή  
οποιοδήποτε τμήματος αυτού του  
βιβλίου, που καλύπτεται από δικαι-  
ώματα (copyright), ή η χρήση του  
σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη  
γραπτή άδεια του Υπουργείου  
Παιδείας, Διά Βίου Μάθησης και  
Θρησκευμάτων/ ΙΤΥΕ -ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.**