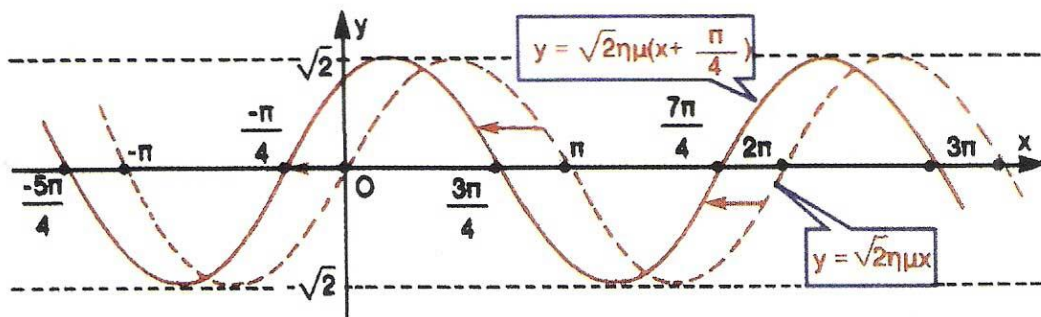


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΑΛΓΕΒΡΑ



Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ
ΔΩΡΕΑΝ

Άλγεβρα

Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 3ος
1η ΕΚΔΟΣΗ

Συγγραφική ομάδα:

- **Ανδρεαδάκης Στυλιανός**
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
- **Κατσαργύρης Βασίλειος**
Καθηγητής μαθηματικών Βαρβακείου
Πειραμ. Λυκείου
- **Παπασταυρίδης Στάυρος**
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας
- **Πολύζος Γεώργιος**
Καθηγητής μαθηματικών Β' Λυκείου
Αμαρουσίου
- **Σβέρκος Ανδρέας**
Καθηγητής μαθηματικών Β' Λυκείου
Αγ. Παρασκευής

Α' ΕΚΔΟΣΗ: 1991

ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ:

1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997,
1998, 2012

**Η προσαρμογή του βιβλίου στο
νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε
από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.**

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ
ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

**Ομάδα Εργασίας του
Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής
Πολιτικής**

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ-ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

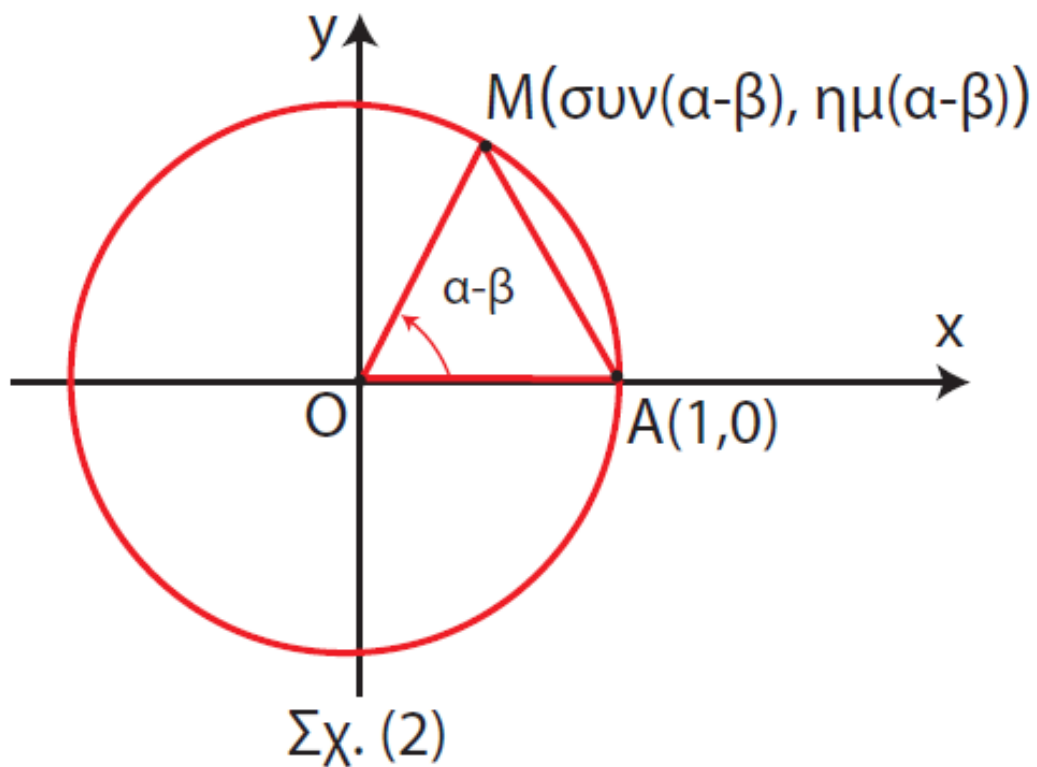
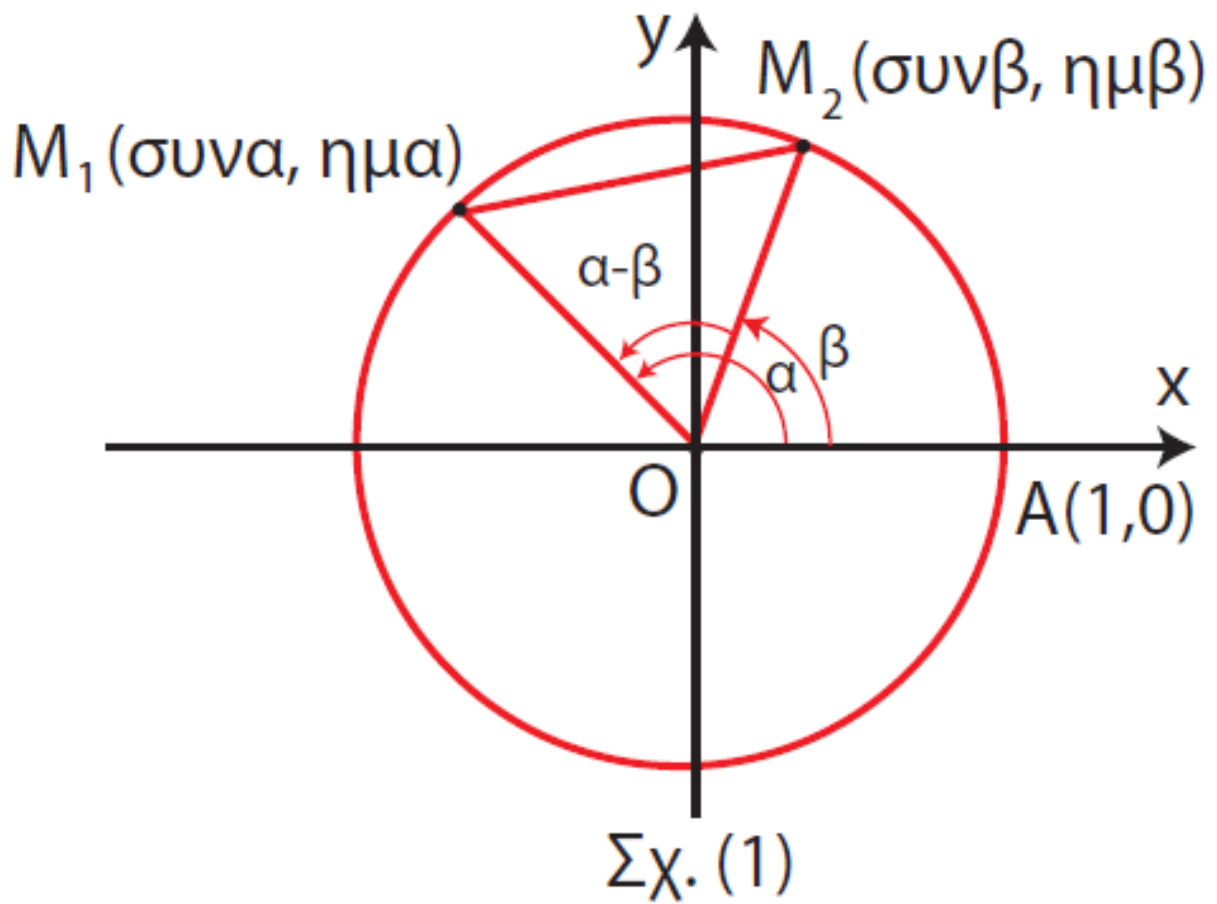
**Γραμμένος Νικόλαος,
Εκπαιδευτικός**

3.6 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ

Συνημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Ας θεωρήσουμε δυο γωνίες α , β που οι τελικές τους πλευρές τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία M_1, M_2 αντιστοίχως (Σχ. 1).

Έστω επιπλέον και η γωνία $\alpha - \beta$, που η τελική της πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M . (Σχ. 2).



Όπως είναι γνωστό, τα σημεία M_1, M_2, A και M έχουν συντεταγμένες:

το M_1 : τετμημένη $\sigma\alpha$ και τεταγμένη $\eta\mu\alpha$

το M_2 : τετμημένη $\sigma\upsilon\upsilon\beta$ και τεταγμένη $\eta\mu\beta$

το A : τετμημένη 1 και τεταγμένη 0

το M : τετμημένη $\sigma\upsilon\upsilon(\alpha - \beta)$ και τεταγμένη $\eta\mu(\alpha - \beta)$

Επειδή $M_2\hat{O}M_1 = A\hat{O}M = \alpha - \beta$, θα είναι και $(M_2M_1) = (AM)$. Άρα

$$(M_2M_1)^2 = (AM)^2$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό μας τύπο:

$$(P_1P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

που δίνει την απόσταση δύο σημείων $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \quad (M_2M_1)^2 &= \\ &= (\sigma\upsilon\alpha - \sigma\upsilon\upsilon\beta)^2 + (\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 = \\ &= \sigma\upsilon\alpha^2 + \sigma\upsilon\upsilon\beta^2 - 2\sigma\upsilon\alpha\sigma\upsilon\upsilon\beta \\ &+ \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta - 2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta \\ &= 2 - 2(\sigma\upsilon\alpha\sigma\upsilon\upsilon\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta) \quad \text{και} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (AM)^2 &= [\sigma\upsilon\alpha(\alpha - \beta) - 1]^2 \\ &+ [\eta\mu(\alpha - \beta) - 0]^2 = \\ &= \sigma\upsilon\alpha^2(\alpha - \beta) + 1 \\ &- 2\sigma\upsilon\alpha(\alpha - \beta) + \eta\mu^2(\alpha - \beta) \\ &= 2 - 2\sigma\upsilon\alpha(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Έτσι η σχέση $(M_2M_1)^2 = (AM)^2$ γράφεται

$$2 - 2(\sigma\upsilon\upsilon\alpha\sigma\upsilon\upsilon\upsilon\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta) =$$
$$2 - 2\sigma\upsilon\upsilon(\alpha - \beta)$$

ή

$$\sigma\upsilon\upsilon\alpha\sigma\upsilon\upsilon\upsilon\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\upsilon(\alpha - \beta)$$

Επομένως:

$$\sigma\upsilon\upsilon(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\upsilon\alpha\sigma\upsilon\upsilon\upsilon\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

Η ισότητα αυτή, που αποδείξαμε για γωνίες α, β με $0 \leq \beta < \alpha < 360^0$, ισχύει και για οποιεσδήποτε γωνίες α, β .

Αν στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με το $-\beta$, έχουμε:

$$\text{συν}(\alpha - (-\beta)) = \text{συνασυν}(-\beta) + \eta\mu\alpha\eta\mu(-\beta)$$

Επομένως:

$$\text{συν}(\alpha + \beta) = \text{συνασυν}\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

Με τη βοήθεια των τύπων (1) και (2) μπορούμε να υπολογίσουμε το συνημίτονο ορισμένων γωνιών, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τριγωνομετρικούς πίνακες ή υπολογιστικές μηχανές.

Για παράδειγμα, έχουμε:

$$\bullet \quad \text{συν}15^\circ = \text{συν}(45^\circ - 30^\circ) =$$

$$\text{συν}45^\circ \text{συν}30^\circ + \eta\mu45^\circ \eta\mu30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}$$

- $$\begin{aligned} \bullet \quad \cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4} \end{aligned}$$

Ημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Με τη βοήθεια του τύπου (1), που βρήκαμε προηγουμένως, θα υπολογίσουμε τώρα το ημίτονο του αθροίσματος δυο γωνιών.

Επειδή $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ και

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \eta\mu(\alpha + \beta) &= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \\
 &\sigma\upsilon\nu\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\
 &= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\eta\mu\beta = \\
 &\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta
 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

(3)

Αν στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με $-\beta$ βρίσκουμε ότι:

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

(4)

Σύμφωνα με τους τύπους αυτούς για παράδειγμα, έχουμε:

- $$\begin{aligned} \bullet \quad \eta\mu 15^\circ &= \eta\mu(45^\circ - 30^\circ) = \\ &= \eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ - \sigma\upsilon\nu 45^\circ \eta\mu 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \bullet \quad \eta\mu 75^\circ &= \eta\mu(45^\circ + 30^\circ) = \\ &= \eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 45^\circ \eta\mu 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4} . \end{aligned}$$

Εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Με τη βοήθεια των προηγούμενων τύπων θα υπολογίσουμε την εφαπτομένη του αθροίσματος $\alpha + \beta$ δυο γωνιών α, β , αν γνωρίζουμε την εφαπτομένη καθεμιάς.

Όπως ξέρουμε, για να ορίζονται οι: $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$, $\epsilon\phi\alpha$ και $\epsilon\phi\beta$, πρέπει $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\beta \neq 0$. Με την προϋπόθεση αυτή έχουμε:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Διαιρούμε με} \\ \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \neq 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) &= \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)} = \\
&= \frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta} = \\
&= \frac{\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} - \frac{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}} = \\
&= \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε:

$$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} \quad (5)$$

Αν τώρα στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με το $-\beta$, βρίσκουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} \quad (6)$$

Τέλος με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι:

$$\sigma\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha} \quad (7)$$

$$\sigma\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha} \quad (8)$$

Σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους για παράδειγμα, έχουμε:

- $$\begin{aligned} \bullet \quad \varepsilon\varphi 15^\circ &= \varepsilon\varphi(45^\circ - 30^\circ) = \\ &= \frac{\varepsilon\varphi 45^\circ - \varepsilon\varphi 30^\circ}{1 + \varepsilon\varphi 45^\circ \varepsilon\varphi 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \\ &= \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \varepsilon\varphi 75^\circ &= \varepsilon\varphi(45^\circ + 30^\circ) = \\
&= \frac{\varepsilon\varphi 45^\circ + \varepsilon\varphi 30^\circ}{1 - \varepsilon\varphi 45^\circ \varepsilon\varphi 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \\
&= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \\
&= \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Αν $\eta\mu\alpha = -\frac{3}{5}$, με $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ και $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{12}{13}$, με $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του $\alpha + \beta$.

ΛΥΣΗ

Επειδή $\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ αρκεί να υπολογίσουμε το $\sigma\upsilon\nu\alpha$ και το $\eta\mu\beta$.

Έχουμε λοιπόν:

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25},$$

$$\acute{\omicron}\pi\omicron\tau\epsilon \sigma\upsilon\nu\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}, \text{ αφού}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \text{ και}$$

$$\eta\mu^2\beta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169},$$

$$\omicron\pi\omicron\tau\epsilon \eta\mu\beta = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}, \text{ αφού}$$

$$\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$$

Επομένως

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$+ \frac{4}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{16}{65}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}\left(-\frac{12}{13}\right) -$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{63}{65},$$

ΟΤΟΤΕ:

$$\epsilon\varphi(\alpha + \beta) = -\frac{16}{63} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi(\alpha + \beta) = -\frac{63}{16}$$

2ο Να αποδειχθεί ότι:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned}
& \eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = \\
& = (\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta) \\
& (\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta) = \\
& = \eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu^2\beta = \\
& = \eta\mu^2\alpha(1 - \eta\mu^2\beta) - (1 - \eta\mu^2\alpha)\eta\mu^2\beta = \\
& = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta - \\
& \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta
\end{aligned}$$

3ο Να λυθεί η εξίσωση:

$$2\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

ΛΥΣΗ

$$2\sigma\upsilon\nu\chi = \eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\chi = \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu\chi + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\chi$$

$$\Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu\chi = \sqrt{3}\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi$$

$$\Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu\chi = \sqrt{3}\eta\mu\chi$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\varphi\chi = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Αφού $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 1$

4ο Να αποδειχθεί ότι σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:
 $\epsilon\varphi\text{Α} + \epsilon\varphi\text{Β} + \epsilon\varphi\text{Γ} = \epsilon\varphi\text{Α}\epsilon\varphi\text{Β}\epsilon\varphi\text{Γ}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο, ορίζονται οι $\epsilon\phi A$, $\epsilon\phi B$, $\epsilon\phi \Gamma$. Επειδή επιπλέον

$$A + B = \pi - \Gamma \neq \frac{\pi}{2}, \text{ ορίζεται η}$$

$\epsilon\phi(A + B)$ και έχουμε διαδοχικά:

$$\epsilon\phi(A + B) = \epsilon\phi(\pi - \Gamma)$$

$$\frac{\epsilon\phi A + \epsilon\phi B}{1 - \epsilon\phi A \epsilon\phi B} = -\epsilon\phi \Gamma$$

$$\epsilon\phi A + \epsilon\phi B = -\epsilon\phi \Gamma + \epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma$$

$$\epsilon\phi A + \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma = \epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma$$

5ο Θεωρούμε έναν αγωγό από τον οποίο διέρχονται τρία εναλλασσόμενα ρεύματα της ίδιας κυκλικής συχνότητας ω με στιγμιαίες εντάσεις $I_1 = \eta \mu \omega t$,

$$I_2 = \eta \mu \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \text{ και}$$

$I_3 = \eta \mu(\omega t + \frac{4\pi}{3})$. Να αποδειχθεί ότι

η ολική ένταση $I = I_1 + I_2 + I_3$ του ρεύματος που διέρχεται από τον αγωγό είναι μηδέν.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι

$$\begin{aligned}
I &= \eta\mu\omega t + \eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \eta\mu\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \eta\mu\omega t + \eta\mu\omega t \cos\frac{2\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\omega t \eta\mu\frac{2\pi}{3} \\
&\quad + \eta\mu\omega t \cos\frac{4\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\omega t \eta\mu\frac{4\pi}{3} \\
&= \eta\mu\omega t + \eta\mu\omega t\left(-\frac{1}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu\omega t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \\
&\quad \eta\mu\omega t\left(-\frac{1}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu\omega t\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \eta\mu\omega t - \frac{1}{2}\eta\mu\omega t - \frac{1}{2}\eta\mu\omega t = 0
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή των παραστάσεων:

$$\text{i) } \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ii) } \cos 170^\circ \cos 50^\circ + \sin 170^\circ \sin 50^\circ$$

$$\text{iii) } \sin 110^\circ \sin 70^\circ - \cos 110^\circ \cos 70^\circ$$

$$\text{iv) } \cos \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{7\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}$$

2. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

$$\text{i) } \cos 3x \cos(-2x) - \sin 3x \sin(-2x)$$

$$\text{ii) } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin x$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$$

$$\text{ii) } \sigma\upsilon\nu^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sigma\upsilon\nu^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$$

4. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή των παραστάσεων:

$$\text{i) } \eta\mu\frac{17\pi}{18} \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{9} - \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{18} \eta\mu\frac{4\pi}{9}$$

$$\text{ii) } \eta\mu 70^\circ \sigma\upsilon\nu 20^\circ + \sigma\upsilon\nu 70^\circ \eta\mu 20^\circ$$

$$\text{iii) } \frac{\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{12} - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}{1 + \varepsilon\varphi\frac{7\pi}{12} \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{iv) } \frac{\varepsilon\varphi 165^\circ + \varepsilon\varphi 15^\circ}{1 - \varepsilon\varphi 165^\circ \varepsilon\varphi 15^\circ}$$

5. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

i) $\eta\mu 2\chi \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi \eta\mu\chi$

ii) $\eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu\chi - \sigma\upsilon\nu\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right)\eta\mu\chi$

iii) $\frac{\epsilon\varphi\chi - \epsilon\varphi 2\chi}{1 + \epsilon\varphi\chi\epsilon\varphi 2\chi}$

iv) $\frac{\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} + 2\chi\right) + \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - \chi\right)}{1 - \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} + 2\chi\right)\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - \chi\right)}$

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right) + \eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\chi$

ii) $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)(\eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu\beta) = \eta\mu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$

7. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, τους

τριγωνομετρικούς αριθμούς των 105° και 195° .

8. Να αποδείξετε ότι:

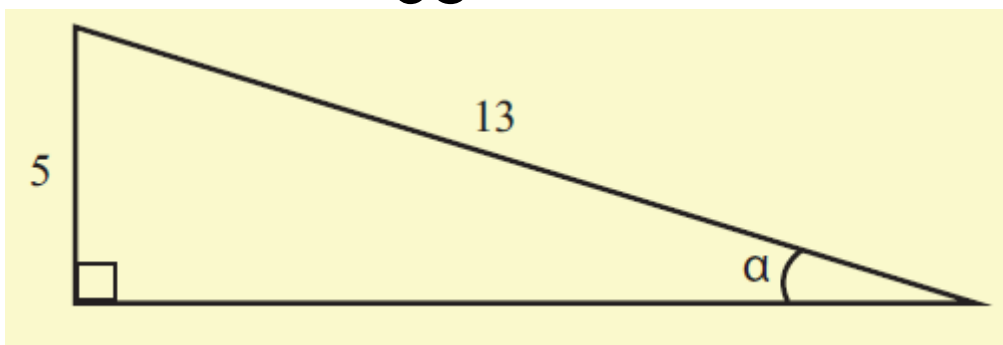
$$\text{i) } \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}$$

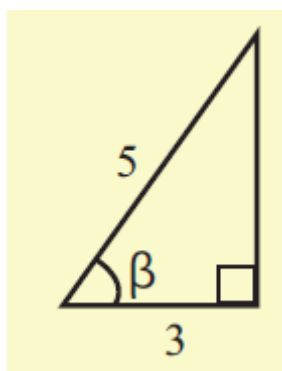
$$\text{ii) } \sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}$$

9. Να αποδείξετε ότι για τις γωνίες α , β του διπλανού σχήματος ισχύει:

$$\text{i) } \eta\mu(\alpha + \beta) = \frac{63}{65}$$

$$\text{ii) } \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \frac{16}{65}$$





10. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\alpha + \beta$, αν:

$$\text{i) } \eta\mu\alpha = \frac{3}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{5}{13},$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

$$\text{ii) } \sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}, \quad \eta\mu\beta = -\frac{4}{5},$$

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \quad \text{και} \quad \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{ii)}$$

$$\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2$$

$$\text{iii) } \epsilon\varphi(x - \alpha) = -2, \quad \text{αν } \epsilon\varphi\alpha = -3$$

B' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha} = 0$$

2. Αν $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = 0$, να αποδείξετε ότι: $\eta\mu(\alpha + 2\beta) = \eta\mu\alpha$

3. Αν $\epsilon\varphi\alpha = -3$, να λύσετε στο $[0, 2\pi]$ τη εξίσωση: $\eta\mu(x - \alpha) = -2\eta\mu(x + \alpha)$

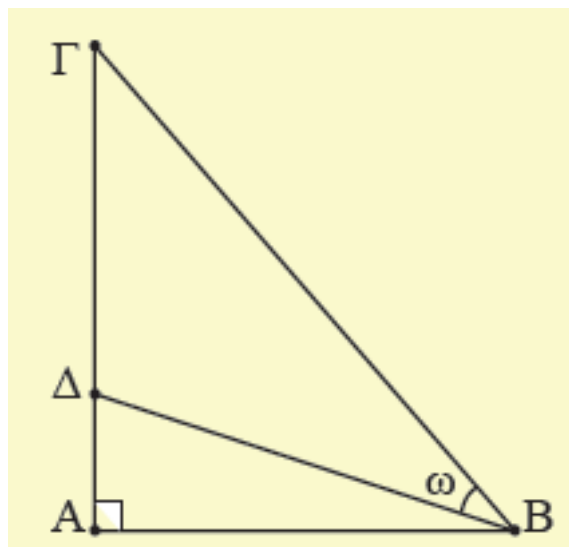
4. Αν $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι:

$$(1 + \epsilon\varphi\alpha)(1 + \epsilon\varphi\beta) = 2$$

5. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $ΑΓ = 3 \cdot ΑΔ$, να αποδείξετε ότι:

i) $\epsilon\varphi\omega = \frac{2\epsilon\varphi B}{3 + \epsilon\varphi^2 B}$, όπου $B = \hat{A}B\hat{G}$

ii) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, αν $B = 60^{\circ}$



6. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\frac{\eta\mu A + \eta\mu(B - \Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma)} = \epsilon\varphi B$, να

αποδείξετε ότι $A = \frac{\pi}{2}$

και αντιστρόφως.

***7. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:**

i) $\sigma\phi\text{A}\sigma\phi\text{B} + \sigma\phi\text{B}\sigma\phi\text{Γ} + \sigma\phi\text{Γ}\sigma\phi\text{A} = 1,$

ii) $\frac{\sigma\upsilon\upsilon\text{A}}{\eta\mu\text{B}\eta\mu\text{Γ}} + \frac{\sigma\upsilon\upsilon\text{B}}{\eta\mu\text{Γ}\eta\mu\text{A}} + \frac{\sigma\upsilon\upsilon\text{Γ}}{\eta\mu\text{A}\eta\mu\text{B}} = 2$

8. Να λυθεί στο διάστημα $[0, \pi]$ η εξίσωση:

$$\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{3}$$

***9. Αν $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ με $\varepsilon\phi x = \frac{1}{2},$**

$\varepsilon\phi y = \frac{1}{5}$ και $\varepsilon\phi z = \frac{1}{8},$ να αποδείξετε

ότι:

$$x + y + z = \frac{\pi}{4}$$

3.7 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

Οι τύποι που εκφράζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α , ως συνάρτηση των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας α , είναι ειδικές περιπτώσεις των τύπων της προηγούμενης παραγράφου.

Συγκεκριμένα, αν στους τύπους του $\eta\mu(\alpha + \beta)$, του $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$ και της $\epsilon\varphi(\alpha + \beta)$ αντικαταστήσουμε το β με το α , έχουμε:

- $\eta\mu 2\alpha$
 $= \eta\mu(\alpha + \alpha) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$

Επομένως:

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha \quad (1)$$

- $$\begin{aligned} & \bullet \quad \sigma\upsilon\nu 2\alpha \\ & = \sigma\upsilon\nu(\alpha + \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha\eta\mu\alpha \\ & = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \\ & = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \\ & \text{Επίσης } \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \\ & = (1 - \eta\mu^2\alpha) - \eta\mu^2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\eta\mu^2\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

- $$\bullet \quad \epsilon\varphi 2\alpha = \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\alpha} = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha}$$

Επομένως:

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} \quad (3)$$

Από τους τύπους (2) μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α , αν γνωρίζουμε το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

Πράγματι, έχουμε:

- $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow$

$$1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$$
$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

- $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha \Leftrightarrow$

$$2\eta\mu^2\alpha = 1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha$$
$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} =$$

$$\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

Επομένως:

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \quad (4)$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \quad (5)$$

$$\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \quad (6)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω τύπων μπορούμε να υπολογίσουμε

τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του μισού μιας γωνίας, αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας αυτής. Για παράδειγμα οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της

γωνίας $22,5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$ υπολογίζονται

ως εξής:

$$\eta\mu^2 22,5^\circ = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 45^\circ}{2} =$$

ΟΠΌΤΕ

$$\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4},$$

$$\eta\mu 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 22,5^\circ = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 45^\circ}{2} =$$

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, \quad \text{ΟΠΌΤΕ}$$

$$\sigma\upsilon\nu 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Επομένως

$$\epsilon\phi 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1 \text{ και}$$

$$\sigma\phi 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{2} + 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Να αποδειχθεί ότι:

$$\text{i) } \eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$$

$$\text{ii) } \sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

i)

$$\eta\mu 3\alpha =$$

$$\eta\mu(2\alpha + \alpha) = \eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha \eta\mu\alpha$$

$$= 2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu^2\alpha + (1 - 2\eta\mu^2\alpha)\eta\mu\alpha$$

$$= 2\eta\mu\alpha(1 - \eta\mu^2\alpha) + (1 - 2\eta\mu^2\alpha)\eta\mu\alpha$$

$$= 2\eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha$$

$$= 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$$

ii)

$$\sigma\upsilon\nu 3\alpha$$

$$= \sigma\upsilon\nu(2\alpha + \alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha \sigma\upsilon\nu \alpha - \eta\mu 2\alpha \eta\mu \alpha$$

$$= (2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha - 1)\sigma\upsilon\nu \alpha - 2\eta\mu^2 \alpha \sigma\upsilon\nu \alpha$$

$$= (2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha - 1)\sigma\upsilon\nu \alpha - 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha)\sigma\upsilon\nu \alpha$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu^3 \alpha - \sigma\upsilon\nu \alpha - 2\sigma\upsilon\nu \alpha + 2\sigma\upsilon\nu^3 \alpha =$$

$$4\sigma\upsilon\nu^3 \alpha - 3\sigma\upsilon\nu \alpha$$

2ο Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία α με $\sigma\upsilon\nu \alpha \neq 0$ ισχύει:

$$\text{i) } \eta\mu 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi \alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2 \alpha}$$

$$\text{ii) } \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 \alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2 \alpha}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $\sigma\upsilon\alpha \neq 0$, έχουμε:

i)

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\sigma\upsilon\alpha = \frac{2\eta\mu\sigma\upsilon\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha + \eta\mu^2\alpha} =$$

$$\frac{\frac{2\eta\mu\sigma\upsilon\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha} + \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha}} = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi^2\alpha}$$

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \\ &\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha} = \\ &\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{1 - \epsilon\phi^2\alpha}{1 + \epsilon\phi^2\alpha} \end{aligned}$$

3ο Αν $\epsilon\phi 2\alpha = \frac{3}{4}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, να βρεθεί η $\epsilon\phi\alpha$.

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο (3) έχουμε:

$$\frac{3}{4} = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha} \Leftrightarrow 8\epsilon\varphi\alpha = 3 - 3\epsilon\varphi^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 3\epsilon\varphi^2\alpha + 8\epsilon\varphi\alpha - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\varphi\alpha = \frac{-8 \pm 10}{6}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\varphi\alpha = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad \epsilon\varphi\alpha = -3$$

[αφού $\Delta=100$]

Από τις τιμές της $\epsilon\varphi\alpha$ που βρήκαμε δεκτή είναι μόνο η -3 , αφού

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

4ο Να αποδειχθεί ότι

$$\epsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \eta\mu 2x}{1 + \eta\mu 2x}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) =$$

$$\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{1 + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}$$

$$= \frac{1 - \eta\mu 2x}{1 + \eta\mu 2x}, \quad \text{αφού}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \eta\mu 2x$$

5ο Να λυθεί η εξίσωση:

$$2 - \eta\mu^2 x = 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}$$

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο (5) έχουμε:

$$2 - \eta\mu^2 x = 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$2 - \eta\mu^2 x = 1 + \sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow 2 - (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) = 1 + \sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x (\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \quad \acute{\eta} \quad \sigma\upsilon\nu x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad \acute{\eta} \quad x = 2\kappa\pi$$

$$\kappa \in \mathbb{Z}$$

6ο Να εκφρασθεί το $8\sigma\upsilon\nu 4\alpha$ ως συνάρτηση του $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ και του $\sigma\upsilon\nu 4\alpha$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με τον τύπο (5) έχουμε:

$$\begin{aligned}
8\sigma\upsilon\nu^4\alpha &= 8(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2 = \\
&= 8\left(\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}\right)^2 = \\
&= 8 \cdot \frac{1 + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{4} = \\
&= 2 + 4\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha = \\
&= 2 + 4\sigma\upsilon\nu\alpha 2\alpha + 1 + \sigma\upsilon\nu 4\alpha = \\
&= 3 + 4\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 4\alpha.
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $2\eta\mu\frac{3\pi}{4} \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}$

$$\text{ii) } 1 - 2\eta\mu^2 \frac{\pi}{12}$$

$$\text{iii) } 2\sigma\upsilon\nu^2 135^0 - 1$$

$$\text{iv) } \frac{2\varepsilon\varphi 75^0}{1 - \varepsilon\varphi^2 75^0}$$

2. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

$$\text{i) } 2\eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu 2\alpha$$

$$\text{ii) } 2\sigma\upsilon\nu^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) - 1$$

$$\text{iii) } \frac{2\varepsilon\varphi 3\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2 3\alpha}$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha \quad \text{ii)}$$

$$\frac{\eta\mu^2\alpha}{1 - \eta\mu^2\alpha} = 2\varepsilon\varphi\alpha$$

$$\text{iii) } \sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = 2\sigma\varphi^2\alpha \quad \text{iv)}$$

$$\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \frac{2}{\eta\mu^2\alpha}$$

4. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του 2α , αν:

$$\text{i) } \sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{4}{5} \quad \text{και} \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{ii) } \eta\mu\alpha = \frac{3}{5} \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

5. Να υπολογίσετε την $\varepsilon\varphi(\alpha+2\beta)$, αν

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{3}$$

6. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \eta\mu^3\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha \eta\mu\alpha = \frac{1}{2}\eta\mu 2\alpha$$

$$\text{ii) } \eta\mu 2\alpha \epsilon\phi\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 2$$

$$\text{iii) } \frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \epsilon\phi\alpha$$

$$\text{iv) } \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \epsilon\phi\alpha$$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu x - 1 = 0 \qquad \text{ii) } \eta\mu 2x - 2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - 1 = 0$$

8. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\pi}{16}$

9. Να υπολογίσετε τους
τριγωνομετρικούς αριθμούς του $\frac{\alpha}{2}$
, αν:

i) $\sigma\upsilon\upsilon\alpha = \frac{5}{13}$ και $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ii) $\sigma\upsilon\upsilon\alpha = \frac{3}{5}$ και $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\upsilon 2x + 2\sigma\upsilon\upsilon^2 \frac{x}{2} = 0$

ii) $\sigma\upsilon\upsilon x - 2\eta\mu^2 \frac{x}{2} = 0$

iii) $2 - \sigma\upsilon\upsilon^2 x = 4\eta\mu^2 \frac{x}{2}$

iv) $\sigma\upsilon\upsilon^2 x - 1 = 2\sigma\upsilon\upsilon^2 \frac{x}{2}$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι:
 $\sigma\upsilon\alpha - \eta\mu\alpha = \sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha}$.

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu^2\alpha + 1 - \sigma\upsilon\upsilon^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1 + \sigma\upsilon\alpha)} = 2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu^2\frac{\pi}{8} - \sigma\upsilon\upsilon^4\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{8}$$

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi 2\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi 2\alpha}{2}$

ii) $\frac{3 - 4\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha + \sigma\upsilon\upsilon^4\alpha}{3 + 4\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha + \sigma\upsilon\upsilon^4\alpha} = \varepsilon\varphi^4\alpha$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi(45^\circ - \alpha) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} - \varepsilon\varphi 2\alpha$$

και με τη βοήθεια αυτού του τύπου να υπολογίσετε την $\varepsilon\varphi 15^\circ$.

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\varepsilon\varphi 2x = 2\sigma\upsilon\nu x$

ii) $\varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi 2x = -3$

7. Να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu 4\alpha = 8\sigma\upsilon\nu^4 \alpha - 8\sigma\upsilon\nu^2 \alpha + 1$$

8. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu^4 \frac{\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4 \frac{3\pi}{8} = \frac{3}{4}$

ii) $\eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{3\pi}{8} = \frac{3}{4}$

iii) $8\eta\mu^2 \alpha \sigma\upsilon\nu^2 \alpha = 1 - \sigma\upsilon\nu 4\alpha$

9. Αν $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$, $\sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\beta}{\gamma + \alpha}$ και

$\sigma\upsilon\nu\zeta = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$, να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} + \varepsilon\varphi^2 \frac{\gamma}{2} + \varepsilon\varphi^2 \frac{\zeta}{2} = 1.$$

3.8 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Σε αρκετές εφαρμογές της Τριγωνομετρίας χρειάζεται το γινόμενο τριγωνομετρικών αριθμών να μετασχηματισθεί σε άθροισμα ή αντιστρόφως το άθροισμα σε γινόμενο.

Στην παράγραφο αυτή θα αναζητήσουμε τύπους, με τους οποίους γίνονται οι παραπάνω μετασχηματισμοί.

Μετασχηματισμός γινομένου σε άθροισμα

Από τις γνωστές μας ισότητες:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$$

δηλαδή:

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta)(1)$$

ενώ από τις:

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)(2)$$

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)(3)$$

Μετασχηματισμός αθροίσματος σε γινόμενο

Με τη βοήθεια των προηγούμενων τριών τύπων μπορούμε να μετασχηματίσουμε το άθροισμα

τριγωνομετρικών αριθμών σε
γινόμενο. Πράγματι, αν θέσουμε
 $\alpha + \beta = A$ και $\alpha - \beta = B$,

τότε έχουμε

$$A + B = \alpha + \beta + \alpha - \beta = 2\alpha, \quad \text{οπότε}$$

$$\alpha = \frac{A + B}{2}$$

$$A - B = \alpha + \beta - \alpha + \beta = 2\beta, \quad \text{οπότε}$$

$$\beta = \frac{A - B}{2}$$

Έτσι ο παραπάνω τύπος (1)
γράφεται

$$2\eta\mu \frac{A + B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A - B}{2} = \eta\mu A + \eta\mu B.$$

Δηλαδή έχουμε:

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \quad (4)$$

Αν τώρα στον τύπο (4)
αντικαταστήσουμε το B με -B,
βρίσκουμε:

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \quad (5)$$

Ομοίως, από τον τύπο (2),
βρίσκουμε:

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \quad (6)$$

ενώ από τον τύπο (3) βρίσκουμε

$$2\eta\mu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{A-B}{2} = \sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu A,$$

οπότε

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = -2\eta\mu\frac{A-B}{2}\eta\mu\frac{A+B}{2}$$

(7)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1° Να λυθεί η εξίσωση:

$$\eta\mu 6x \sigma\upsilon\nu 3x = \eta\mu 5x \sigma\upsilon\nu 4x \quad (1)$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow 2\eta\mu 6x \sigma\upsilon\nu 3x = 2\eta\mu 5x \sigma\upsilon\nu 4x$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 9x + \eta\mu 3x = \eta\mu 9x + \eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 3x = \eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ x = \frac{2k\pi + \pi}{4} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2° Να λυθεί η εξίσωση:
 $\sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 2x$

ΛΥΣΗ

Έχουμε: : (1)

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\frac{3x+x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3x-x}{2} =$$

$$= 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x =$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2x\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0(2) \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu 2x = \eta\mu x(3)$$

Αλλά

(2)

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{και} \quad 3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\chi = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\chi = 2\kappa\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) \\ \quad \quad \quad \acute{\eta}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ 2\chi = 2\kappa\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ \quad \quad \quad \acute{\eta}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ \chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi = \frac{4\kappa\pi + \pi}{6} \\ \quad \quad \quad \acute{\eta}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ \chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

3ο Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 4 \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned}
& \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = \\
& = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + \\
& 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} = \\
& = 2\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + \\
& 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \\
& \left(\text{γιατί } \frac{A+B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \right) \\
& = 2\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \left[\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \right] \\
& = 2\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} 2\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} = \\
& = 4\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}.
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, τα γινόμενα:

i) $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$

ii) $\eta\mu 105^\circ \sin 15^\circ$

iii) $\eta\mu \frac{13\pi}{2} \sin \frac{\pi}{12}$

iv) $\eta\mu \frac{11\pi}{12} \eta\mu \frac{7\pi}{12}$

2. Να μετατρέψετε σε αθροίσματα τριγωνομετρικών αριθμών τα παρακάτω γινόμενα:

i) $2\eta\mu x \sin 2x$

ii) $2\eta\mu 4x \eta\mu 2x$

iii) $2\sin 3x \sin 5x$

iv) $\sin 6x \eta\mu 2x$

$$v) \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu 3x \csc x = \eta\mu 6x \csc 2x$

ii) $\csc 3x \csc 2x = \eta\mu 2x \eta\mu x$

4. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, τα αθροίσματα:

i) $\eta\mu 75^\circ + \eta\mu 15^\circ$

ii) $\eta\mu \frac{11\pi}{12} - \eta\mu \frac{5\pi}{12}$

iii) $\csc 40^\circ + \csc 80^\circ + \csc 160^\circ$

5. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τριγωνομετρικών αριθμών τα παρακάτω αθροίσματα:

i) $\eta\mu 4x + \eta\mu 2x$

ii) $\csc 5x - \csc 3x$

iii) $\sigma\upsilon\nu 3\chi + \sigma\upsilon\nu\chi$

iv) $1 + \eta\mu\chi$

v) $1 + \sigma\upsilon\nu\chi$

6. Αν Β και Γ είναι οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξε-

τε ότι:

i) $\eta\mu 2Β + \eta\mu 2Γ = 2\sigma\upsilon\nu(Β - Γ)$

ii) $\eta\mu Β - \eta\mu Γ = \sqrt{2}\eta\mu \frac{Β - Γ}{2}$

7. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha}{\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha} = \epsilon\phi\alpha$

ii) $\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha} = \epsilon\phi 3\alpha$

iii) $\frac{\eta\mu\alpha\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha\eta\mu 6\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 6\alpha} = \epsilon\phi 5\alpha$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu 3x - \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu 2x$

ii) $\sigma\upsilon\nu 5x - \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 3x$

iii) $\eta\mu 3x + \eta\mu 6x + \eta\mu 9x = 0$

B' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $2\eta\mu 50^\circ - \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu 20^\circ} = 1$

ii) $2\eta\mu 52^\circ \eta\mu 68^\circ - 2\eta\mu 47^\circ \sigma\upsilon\nu 77^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 65^\circ \sigma\upsilon\nu 81^\circ = 1$

2. Αν για τις οξείες γωνίες B και Γ ενός ορθογωνίου τριγώνου ABΓ ισχύει $4\eta\mu B \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1$, να αποδείξετε ότι $B = 30^\circ$.

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \eta\mu\alpha\eta\mu\beta \leq \eta\mu^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\text{ii) } \sigma\upsilon\alpha\sigma\upsilon\upsilon\beta \leq \sigma\upsilon\upsilon^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta}{2} \leq \eta\mu\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), \text{ για}$$

οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in [0, \pi]$

$$\text{ii) } \frac{\sigma\upsilon\alpha + \sigma\upsilon\upsilon\beta}{2} \leq \sigma\upsilon\upsilon\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), \text{ για}$$

οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:

$$\text{i) } \eta\mu A + \eta\mu(B - \Gamma) = 2\eta\mu B \sigma\upsilon\upsilon\Gamma$$

$$\text{ii) } \sigma\upsilon\upsilon(B - \Gamma) - \sigma\upsilon\upsilon A = 2\sigma\upsilon\upsilon B \sigma\upsilon\upsilon\Gamma$$

$$\sigma\upsilon\nu\text{A} + \sigma\upsilon\nu\text{B} + \sigma\upsilon\nu\text{Γ} =$$

$$\text{iii)} = 1 + 4\eta\mu\frac{\text{A}}{2}\eta\mu\frac{\text{B}}{2}\eta\mu\frac{\text{Γ}}{2}.$$

6. Να αποδείξετε ότι για τις οξείες γωνίες B, Γ ενός ορθογωνίου τριγώνου ABΓ ισχύει:

$$2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\text{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\text{Γ}}{2} - 1 = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\text{B} - \text{Γ}}{2}$$

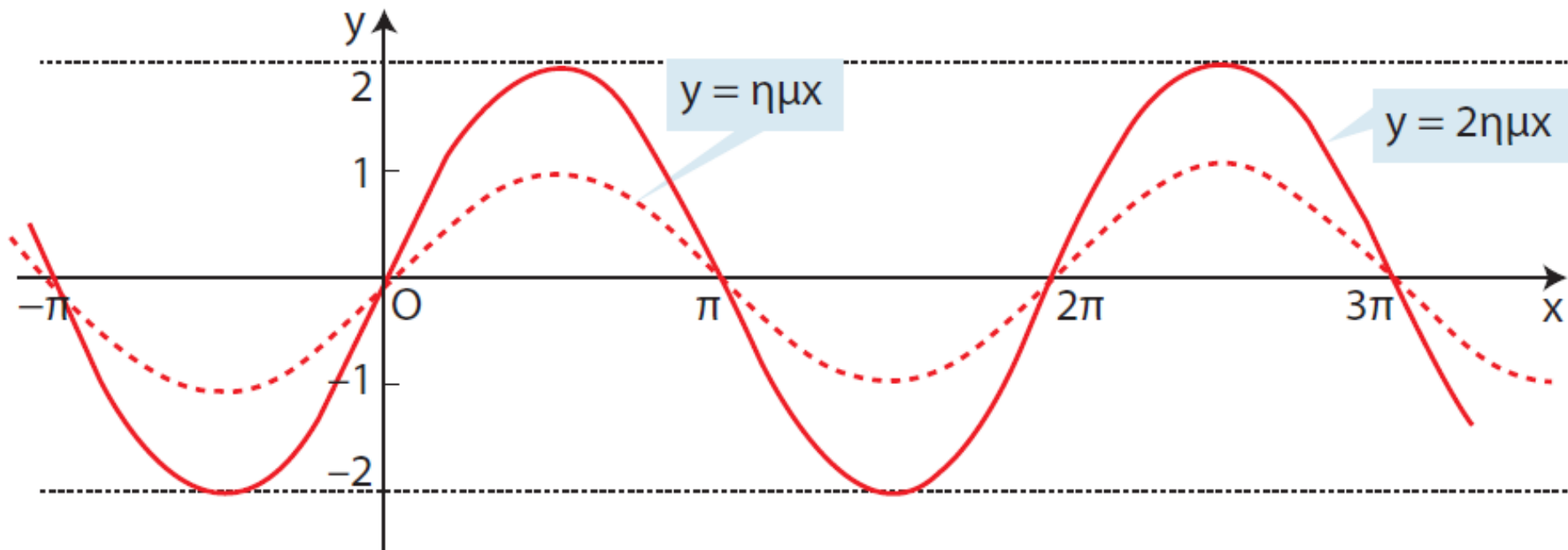
7. Αν για τις γωνίες A, B, Γ ενός τριγώνου ABΓ ισχύει $\eta\mu\text{A} = \sigma\upsilon\nu\text{B} + \sigma\upsilon\nu\text{Γ}$, να αποδείξετε ότι $\text{B}=90^\circ$ ή $\text{Γ}=90^\circ$ και αντιστρόφως.

3.9 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$f(x) = \alpha \eta \mu x + \beta \sigma \upsilon \nu x$$

Στην προηγούμενη τάξη είδαμε ότι μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = \rho \eta \mu x$, $\rho > 0$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με ρ και ελάχιστο ίσο με $-\rho$. Η γραφική της παράσταση είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη.

Μια τέτοια συνάρτηση είναι, π.χ., και η $f(x) = 2\eta \mu x$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Η συνάρτηση $f(x) = \rho \eta \mu(x + \varphi)$

Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση
 $f(x) = 2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή

προκύπτει από την $g(x) = 2\eta\mu x$ αν,
όπου x , θέσουμε $x + \frac{\pi}{4}$ δη-

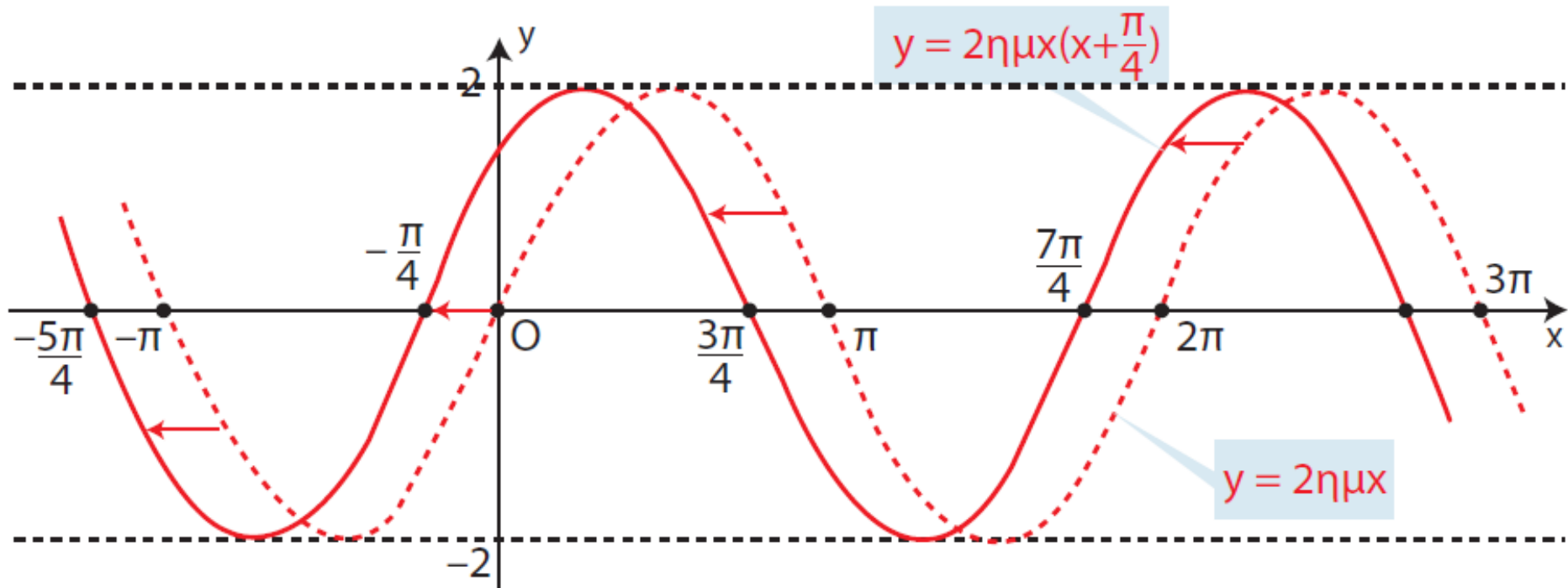
λαδή ισχύει $f(x) = g(x + \frac{\pi}{4})$

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική
παράσταση της f προκύπτει από
μια οριζόντια μετατόπιση της
γραφικής παράστασης της g κατά
 $\frac{\pi}{4}$ μονάδες, προς τα αριστερά.

Όμως η συνάρτηση $g(x) = 2\eta\mu x$ έχει
περίοδο 2π , μέγιστο ίσο με 2 και
ελάχιστο ίσο με -2 .

Επομένως η συνάρτηση f είναι
περιοδική με περίοδο 2π και έχει
μέγιστο ίσο με 2 και ελάχιστο ίσο με
 -2 .

Ο σταθερός αριθμός $\frac{\pi}{4}$ λέγεται
διαφορά φάσεως των καμπυλών
 $y = 2\eta\mu(x + \frac{\pi}{4})$ και $y = 2\eta\mu x$. Οι
καμπύλες αυτές φαίνονται στο
παρακάτω σχήμα:



Γενικότερα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho\eta\mu(x + \varphi)$, $\rho > 0$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \rho\eta\mu x$. Επομένως:

Η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(x+\varphi)$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με ρ και ελάχιστο ίσο με $-\rho$.

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x$,
 $\alpha,\beta \neq 0$

Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$. Για να τη μελετήσουμε θα προσπαθήσουμε να τη μετατρέψουμε σε άλλη συνάρτηση γνωστής μορφής.

Έχουμε:

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x + \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \sigma\upsilon\nu x$$

$$= \eta\mu x + \frac{\eta\mu \frac{\pi}{4}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}} \sigma\upsilon\nu x =$$

$$= \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu \frac{\pi}{4}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\eta\mu \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

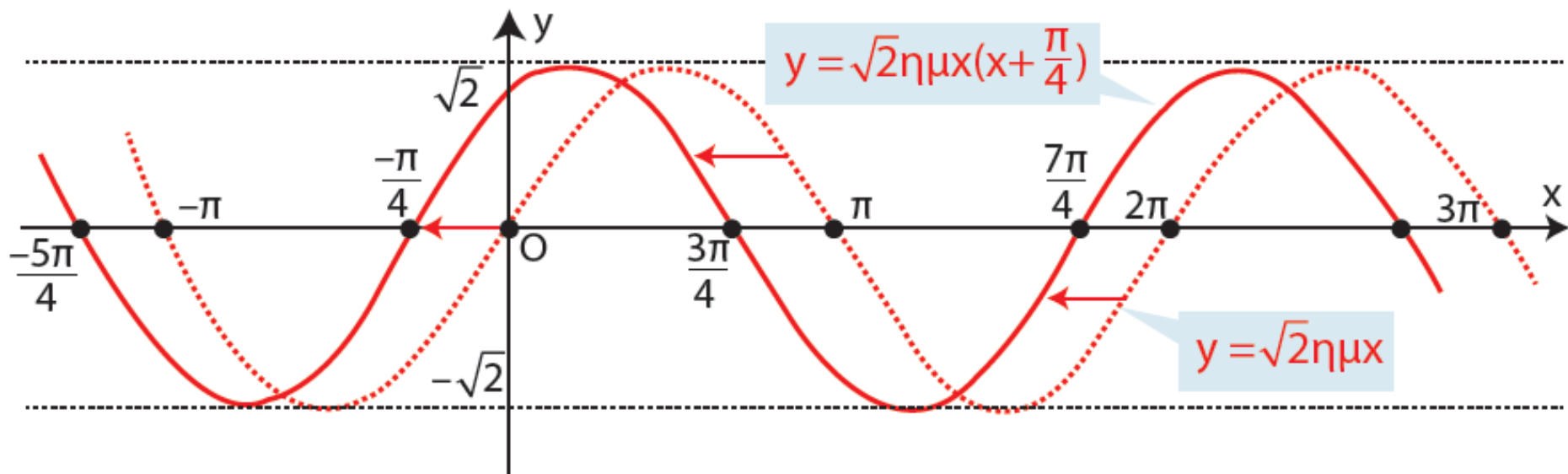
Επομένως $f(x) = \sqrt{2} \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$. Αυτό

σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με $\sqrt{2}$ και ελάχιστο ίσο

με $-\sqrt{2}$. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$g(x) = \sqrt{2}\eta\mu x$ κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες προς

τα αριστερά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Γενικότερα θα αποδείξουμε ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $\alpha, \beta \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ισχύει:

$$\alpha \eta \mu x + \beta \sigma \upsilon \nu x = \rho \eta \mu(x + \varphi)$$

όπου

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{και} \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad \text{με}$$

$$\begin{cases} \sigma \upsilon \nu \varphi = \frac{\alpha}{\rho} \\ \eta \mu \varphi = \frac{\beta}{\rho} \end{cases}$$

Έστω το σημείο $M(\alpha, \beta)$ και φ μια από τις γωνίες με αρχική πλευρά Ox και τελική πλευρά OM . Τότε έχουμε:

$$\rho = OM = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

και

$$\begin{cases} \text{συν}\varphi = \frac{\alpha}{\rho} & \text{ή} & \alpha = \rho \text{συν}\varphi \\ \text{ημ}\varphi = \frac{\beta}{\rho} & \text{ή} & \beta = \rho \text{ημ}\varphi \end{cases}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \alpha \text{ημ}x + \beta \text{συν}x &= \rho \text{συν}\varphi \text{ημ}x + \rho \text{ημ}\varphi \text{συν}x \\ &= \rho (\text{συν}\varphi \text{ημ}x + \text{ημ}\varphi \text{συν}x) \\ &= \rho \text{ημ}(x + \varphi) \end{aligned}$$

Η μελέτη λοιπόν της συνάρτησης $f(x) = \alpha \text{ημ}x + \beta \text{συν}x$, $\alpha, \beta \neq 0$ μπορεί να γίνει με τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \rho \text{ημ}(x + \varphi)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1^ο i) Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

ii) Ομοίως η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 2x$

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση f γράφεται

$f(x) = 2\eta\mu\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)$. Παρατηρούμε

ότι η συνάρτηση αυτή προκύπτει από τη συνάρτηση $g(x) = 2\eta\mu 2x$ αν,

όπου x θέσουμε $x - \frac{\pi}{6}$.

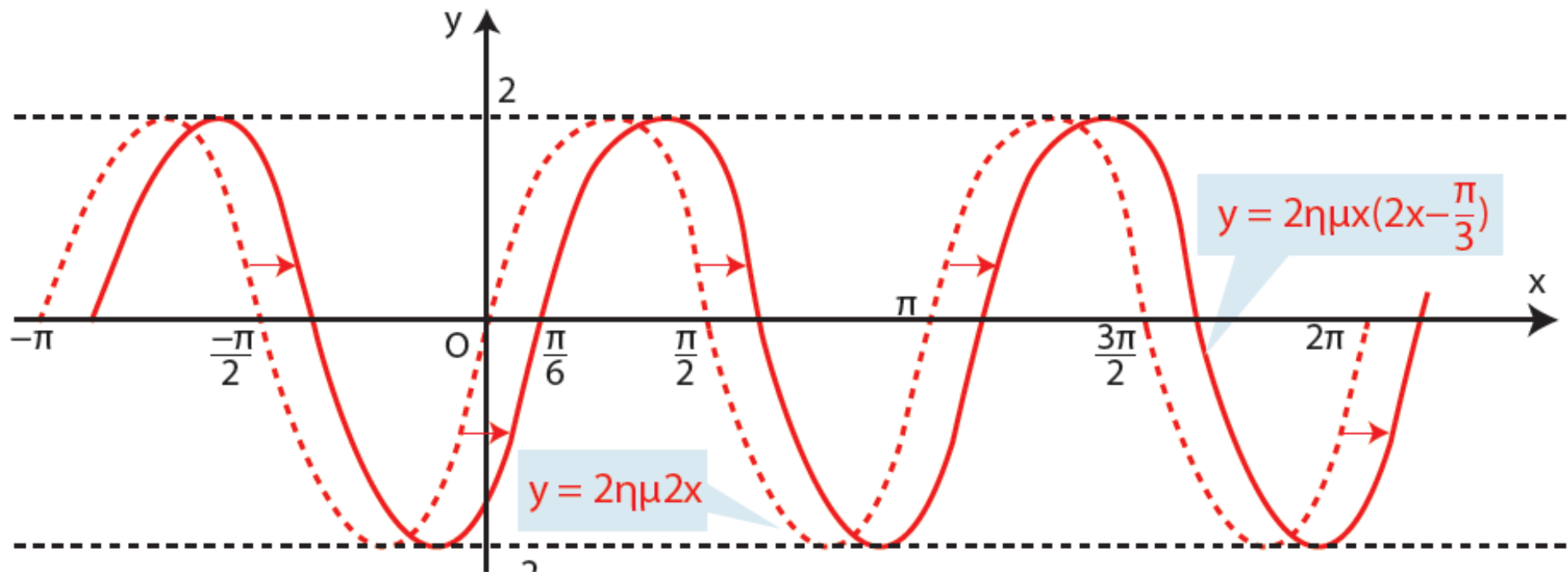
Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της

γραφικής παράστασης της g κατά $\frac{\pi}{6}$ μονάδες προς τα δεξιά.

Όμως η συνάρτηση $g(x) = 2\eta\mu 2x$ έχει περίοδο $\frac{2\pi}{2} = \pi$, μέγιστο 2 και ελάχιστο -2 .

Άρα και η f είναι περιοδική με περίοδο π , μέγιστο 2 και ελάχιστο -2 .

Οι γραφικές παραστάσεις των f και g φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ii) Η παράσταση $\eta\mu 2x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 2x$ είναι της μορφής $\alpha\eta\mu t + \beta\sigma\upsilon\nu t$ με $\alpha=1$, $\beta = -\sqrt{3}$ και όπου t το $2x$.
 Επομένως παίρνει τη μορφή $\rho\eta\mu(2x + \varphi)$.
 Έχουμε

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

και

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2} \\ \eta\mu\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases},$$

οπότε ένα $\varphi = -\frac{\pi}{3}$

Άρα

$$f(x) = \eta\mu 2x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 2x = 2\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Τη συνάρτηση αυτή όμως τη μελετήσαμε προηγουμένως.

2ο Να λυθεί η εξίσωση
 $\sqrt{3}\eta\mu 4x + \sigma\upsilon\nu 4x = \sqrt{2}$

ΛΥΣΗ

Το 1ο μέλος της εξίσωσης είναι της μορφής $\alpha\eta\mu t + \beta\sigma\upsilon\nu t$ με $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta=1$ και όπου t το $4x$. Επομένως παίρνει τη μορφή $\rho\eta\mu(4x+\varphi)$.

Έχουμε

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \eta\mu\varphi = \frac{1}{2} \end{array} \right. ,$$

$$\text{οπότε} \quad \text{ένα} \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{\textbf{\textit{Άρα}}} \sqrt{3}\eta\mu 4x + \sigma\upsilon\nu 4x = 2\eta\mu\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$$

και η εξίσωση γίνεται

$$2\eta\mu\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \quad \quad \quad \text{\textbf{\textit{ή}}} \\ 4x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \end{array} \right., \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{48} \\ \quad \quad \quad \text{\textbf{\textit{ή}}} \\ x = k\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{48} \end{array} \right., \quad k \in \mathbb{Z}$$

3ο Δυο ρεύματα με την ίδια κυκλική συχνότητα ω και με εντάσεις

$$I_1 = 2\eta\mu\omega t \text{ και}$$

$$I_2 = 2\eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ διαρρέουν έναν}$$

αγωγό. Να δειχθεί ότι το άθροισμα τους έχει την ίδια κυκλική συχνότητα.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $I_{0\lambda} = I_1 + I_2 =$

$$2\eta\mu\omega t + 2\eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 2\eta\mu\omega t + 2\left(\eta\mu\omega t \cos\frac{2\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\omega t \eta\mu\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 2\eta\mu\omega t + 2\left(-\frac{1}{2}\eta\mu\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\omega t\right)$$

$$= \eta\mu\omega t + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\omega t$$

$$= 2\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right),$$

που σημαίνει ότι το $I_{0\lambda}$ έχει την ίδια κυκλική συχνότητα ω .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη τιμή και την ελάχιστη τιμή των παρακάτω συναρτήσεων και στη συνέχεια να τις παραστήσετε γραφικά:

i) $f(x) = 2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

ii) $f(x) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

2. Να γράψετε στη μορφή $f(x) = \rho\eta\mu x + \varphi$ τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = \sqrt{3}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

ii) $f(x) = -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

iii) $f(x) = -\eta\mu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

iv) $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις της άσκησης 2.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{3}\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\eta\chi = 2,$

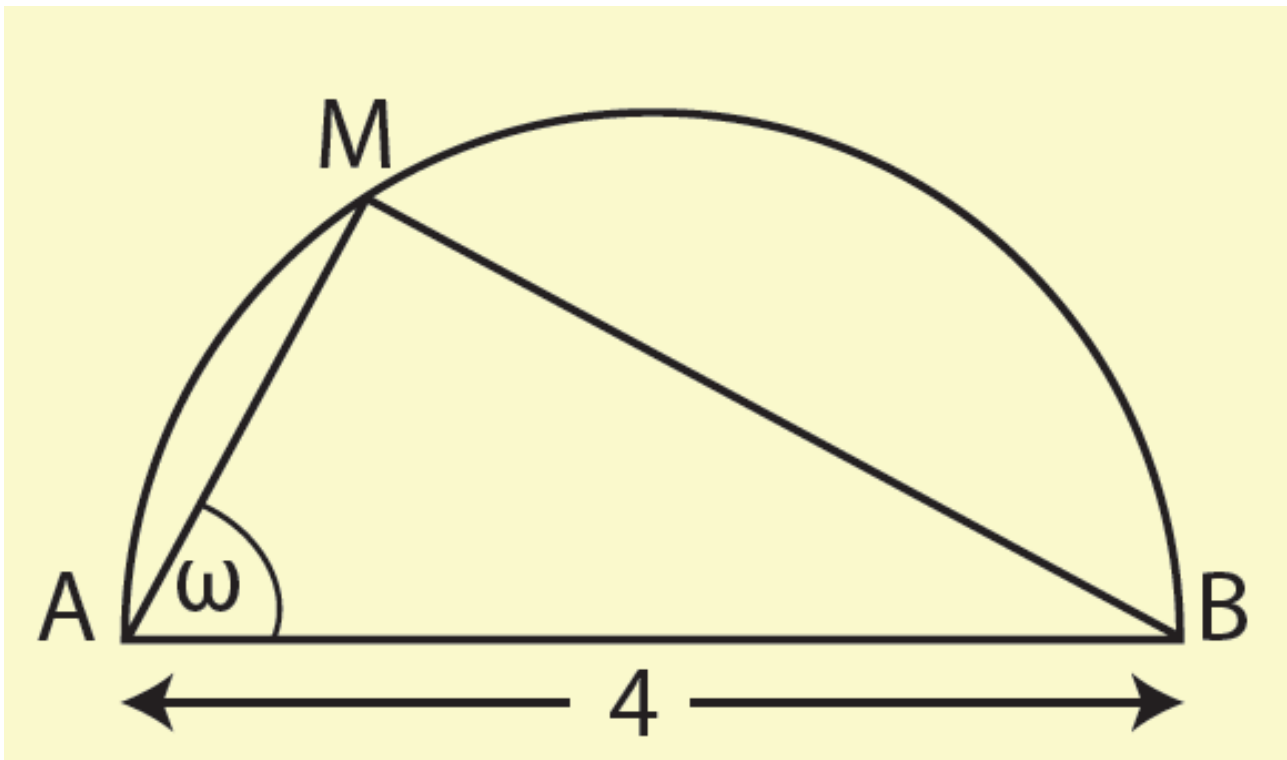
ii) $\sigma\upsilon\eta\chi - \eta\mu\chi = 1,$

iii) $\sqrt{2}\eta\mu\chi + \sqrt{6}\sigma\upsilon\eta\chi + 2 = 0$

B' ΟΜΑΔΑΣ

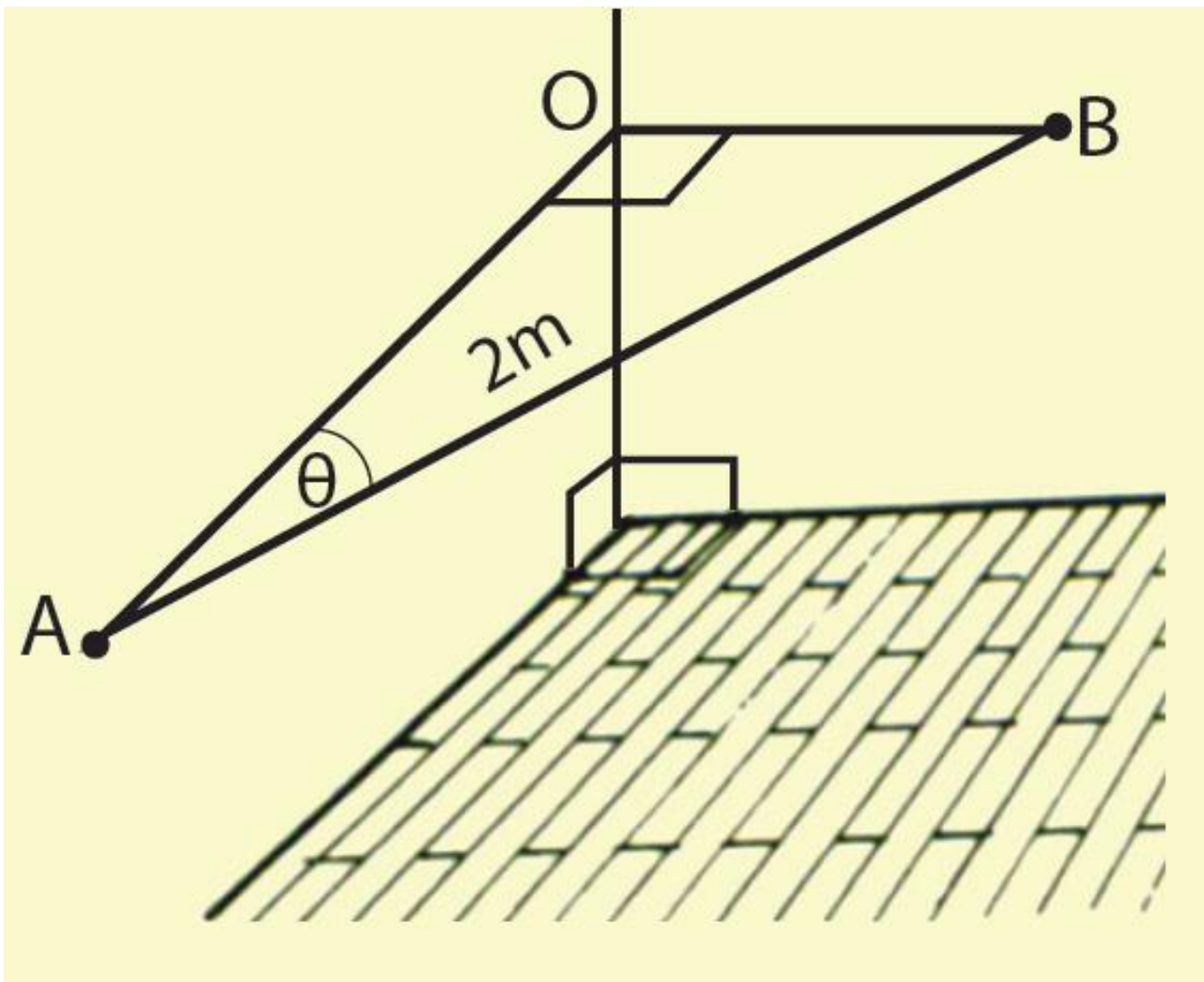
1. Να υπολογίσετε τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(MA) + (MB) = 2\sqrt{6}$$



2. Μια μπάρα AB μήκους 2m τοποθετείται οριζόντια μεταξύ δυο κάθετων τοίχων. Για μεγαλύτερη αντοχή πρέπει να τοποθετηθεί, έτσι ώστε το $(OA)+(OB)$ να γίνει μέγιστο.

- i) Να εκφράσετε το $(OA)+(OB)$ ως συνάρτηση του θ .**
- ii) Να βρείτε την τιμή του θ για την οποία το $(OA)+(OB)$ γίνεται μέγιστο και να προσδιορίσετε το μέγιστο αυτό.**



3. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

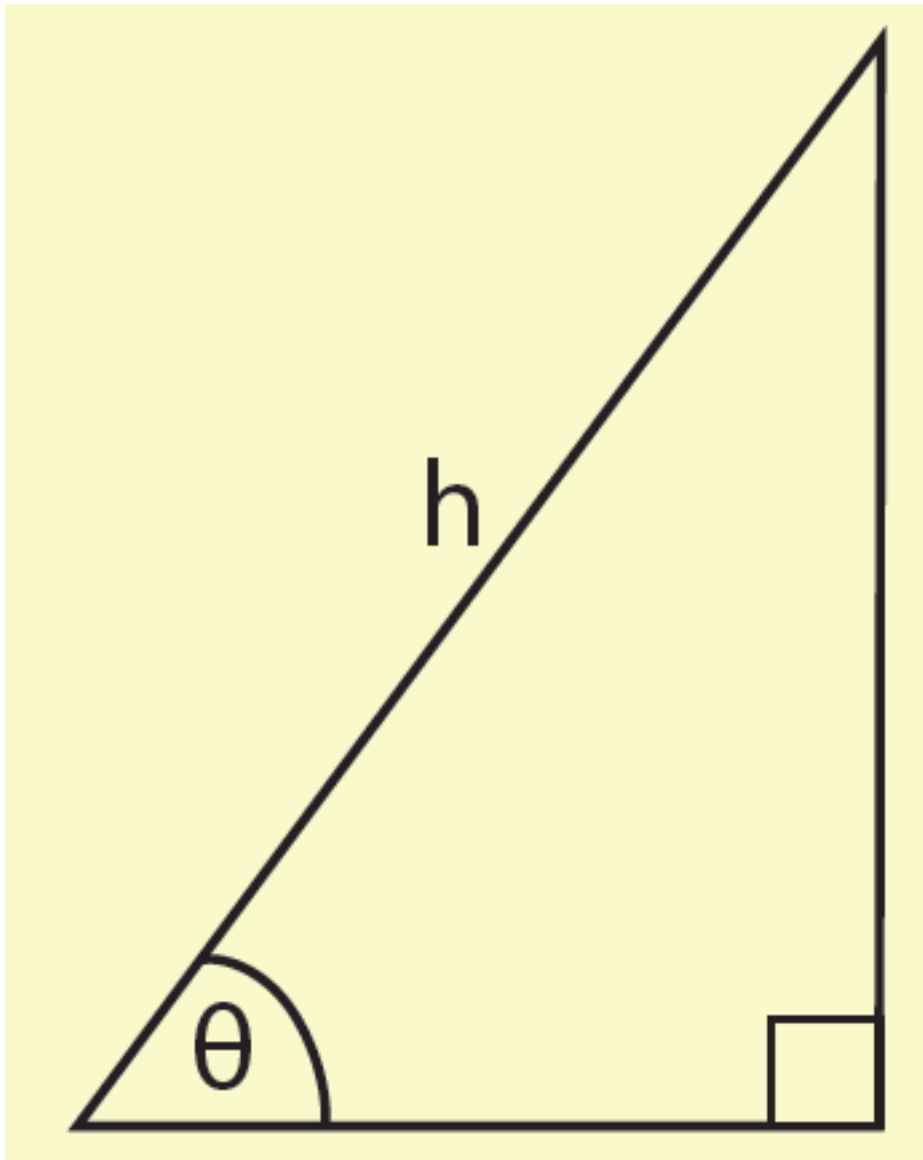
i) $f(x) = 5\eta\mu x + 12\sigma\upsilon\nu x + 3,$

ii) $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$

4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\eta\mu\chi(\sqrt{3}\sigma\upsilon\eta\chi - \eta\mu\chi) = \sqrt{2} - 1$$

5. Με συρματοπλεγμά μήκους 40m περιφράσσουμε τμήμα γης σχήματος ορθογωνίου τριγώνου. Αν η υποτείνουσα είναι h m και η μια οξεία γωνία Grad (Σχήμα).



i) Να αποδείξετε ότι:

$$h = \frac{40}{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta + 1}$$

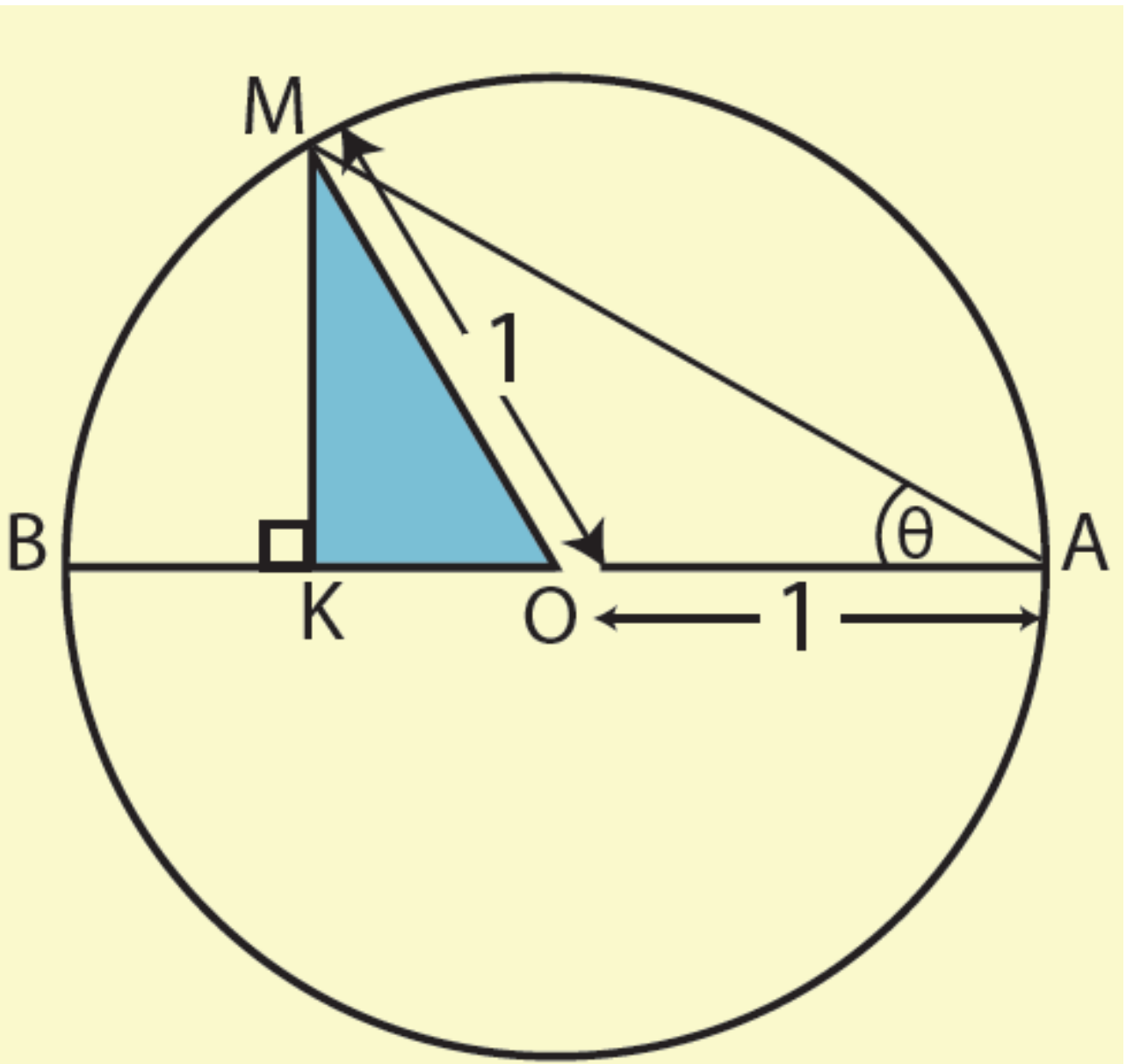
ii) Για ποια τιμή του θ το h παίρνει τη μικρότερη τιμή και ποια είναι αυτή;

6. Στο παρακάτω σχήμα:

i) Να δείξετε ότι η περίμετρος P του τριγώνου MKO ισούται με

$$P = 1 + \eta\mu 2\theta + \sigma\upsilon\nu 2\theta.$$

ii) Για ποια τιμή του θ το P παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή και ποια είναι αυτή;



3.10 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Το κλασικό πρόβλημα της Τριγωνομετρίας, από το οποίο πήρε και το όνομά της, είναι η επίλυση τριγώνου, δηλαδή ο υπολογισμός των άγνωστων κύριων στοιχείων ενός τριγώνου, όταν δίνονται επαρκή στοιχεία του.

Η επίλυση τριγώνου μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των παρακάτω δυο βασικών θεωρημάτων, που είναι γνωστά το ένα ως νόμος των ημίτονων και το άλλο ως νόμος των συνημίτονων.

Νόμος των ημίτονων

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\text{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\text{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\text{Γ}} = 2\text{R}$$

Όπου R, η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

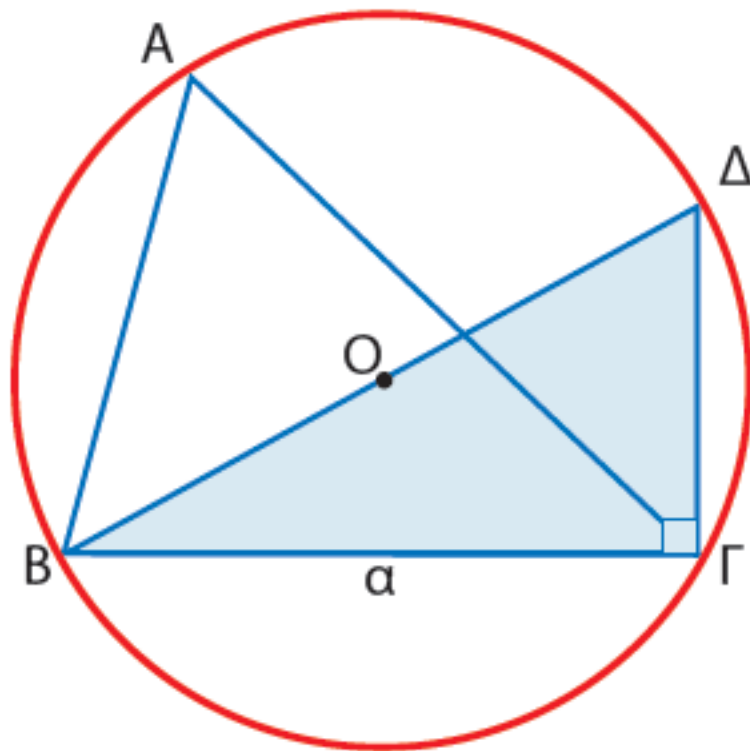
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω (O,R) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ. Αν φέρουμε τη διάμετρο ΒΔ και τη χορδή ΓΔ, τότε σχηματίζεται τρίγωνο ΓΒΔ που είναι ορθογώνιο στο Γ. Επομένως έχουμε:

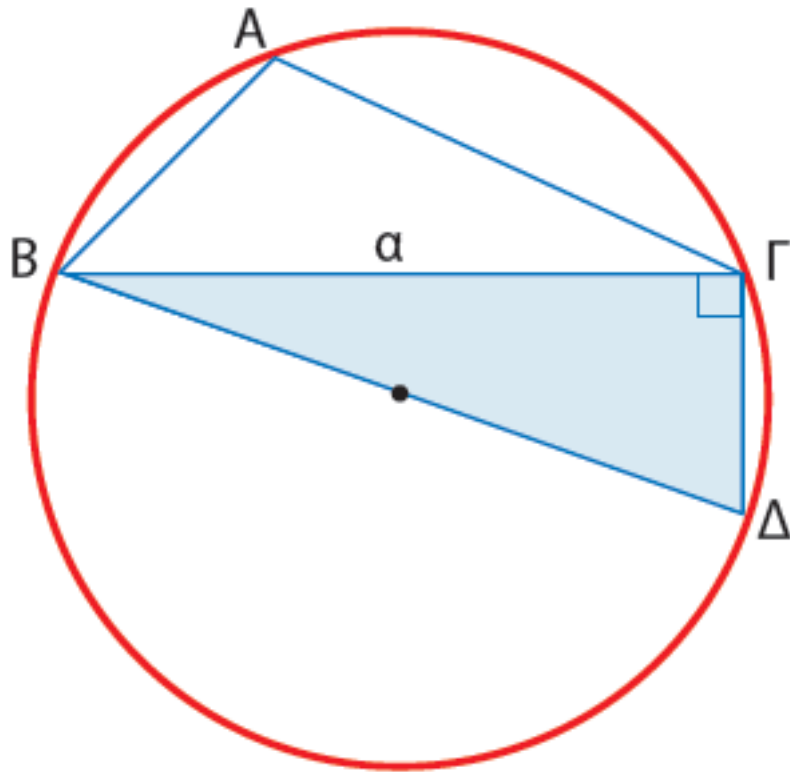
$$\eta\mu\Delta = \frac{(B\Gamma)}{(B\Delta)} = \frac{\alpha}{2R},$$

ΟΠΟΤΕ

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\Delta} = 2R \quad (1)$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

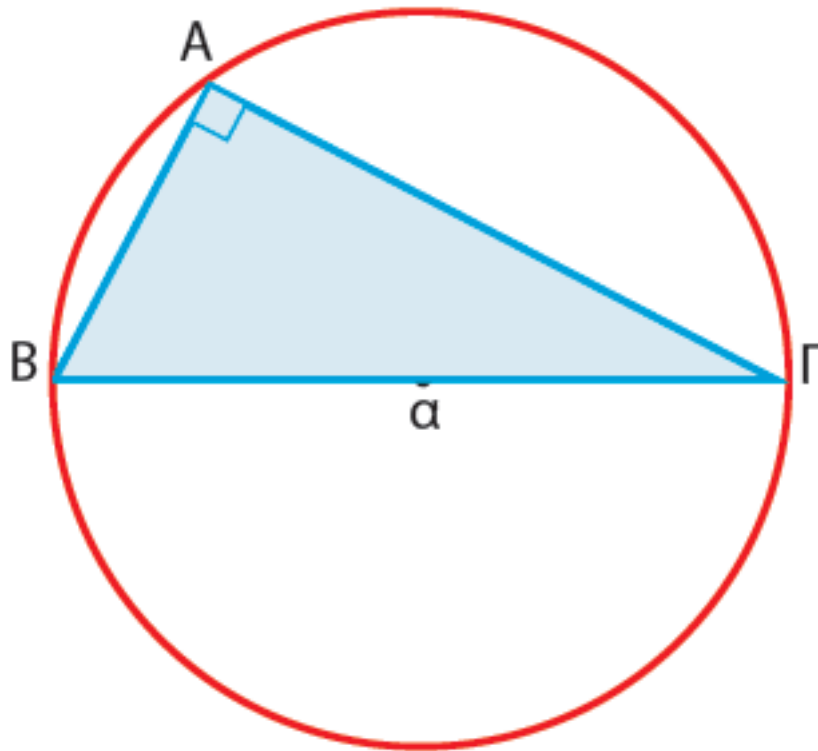
Είναι όμως $\Delta = A$ (Σχ. 1) ή

$\Delta + A = 180^\circ$ (Σχ. 2), οπότε

$\eta\mu\Delta = \eta\mu A$.

Επομένως η (1) γράφεται

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R$$



Σχήμα 3

Αν $A = 90^\circ$, τότε έχουμε: $\eta\mu A = 1$ και $\alpha = 2R$ (Σχ. 3). Επομένως και στην περίπτωση αυτή ισχύει ισότητα

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\beta}{\eta\mu\beta} = 2R \text{ και } \frac{\gamma}{\eta\mu\gamma} = 2R$$

$$\text{Επομένως: } \frac{\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{\beta}{\eta\mu\beta} = \frac{\gamma}{\eta\mu\gamma} = 2R$$

Σχόλιο. Με το νόμο των ημίτονων μπορούμε εύκολα να επιλύσουμε ένα τρίγωνο, όταν δίνονται:

- i) Μια πλευρά και δυο γωνίες του ή
- ii) Δυο πλευρές και μια από τις μη περιεχόμενες γωνίες του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 15$, $A = 43^\circ$ και $B = 82^\circ$.

ΛΥΣΗ

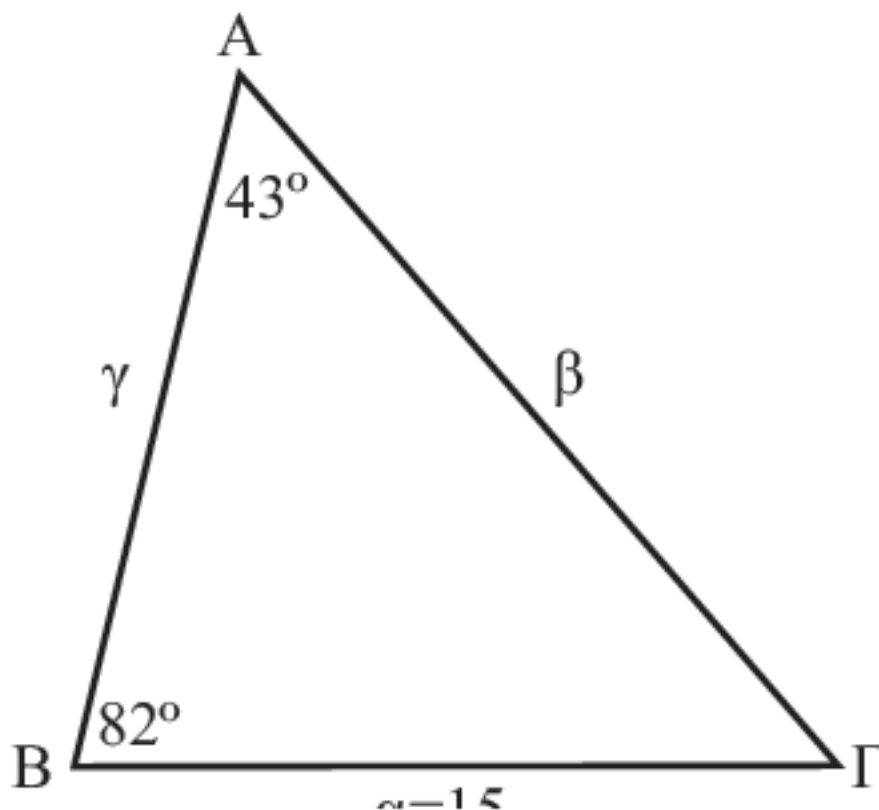
Έτσι, σύμφωνα με το νόμο των ημίτονων έχουμε:

$$\frac{15}{\eta\mu 43^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 82^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 55^\circ}$$

ΟΠΟΤΕ:

$$\beta = \frac{15 \cdot \eta\mu 82^\circ}{\eta\mu 43^\circ} \approx \frac{15 \cdot 0,9903}{0,6820} \approx 22$$

$$\gamma = \frac{15 \cdot \eta\mu 55^\circ}{\eta\mu 43^\circ} \approx \frac{15 \cdot 0,8192}{0,6820} \approx 18$$

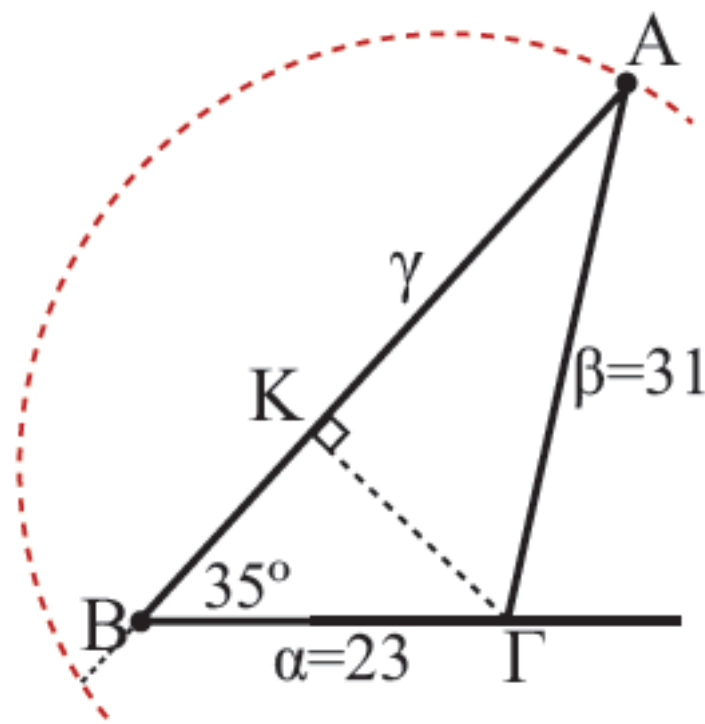


2ο Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 23$, $\beta = 31$ και $\Gamma = 35^\circ$

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το νόμο των ημίτονων έχουμε:

$$\frac{23}{\eta\mu A} = \frac{31}{\eta\mu 35^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \quad (1)$$



Οπότε

$$\eta\mu A = \frac{23 \cdot \eta\mu 35^\circ}{31} \simeq \frac{23 \cdot 0,5736}{31} \simeq 0,4255$$

Άρα

$$A \simeq 25^\circ \quad \text{ή} \quad A \simeq 155^\circ$$

Επειδή όμως $\alpha < \beta$, θα είναι και $A < B$.

Επομένως από τις παραπάνω τιμές της A δεκτή είναι μόνο η $A \simeq 25^\circ$.

Έτσι έχουμε

$$\Gamma = 180^\circ - A - B \simeq$$

$$\simeq 180^\circ - 25^\circ - 35^\circ = 120^\circ$$

οπότε, λόγω της (1), ισχύει

$$\frac{31}{\eta\mu 35^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 120^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\gamma = \frac{31 \cdot \eta\mu 120^\circ}{\eta\mu 35^\circ} \approx \frac{31 \cdot 0,8660}{0,5736} \approx 47$$

3ο Σε ένα υλικό σημείο O εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις που έχουν μέτρα F_1 , F_2 και F_3 αντιστοίχως και σχηματίζουν ανά δυο γωνίες ω_1 , ω_2 και ω_3 , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Αν το υλικό σημείο ισορροπεί, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{F_1}{\eta\mu\omega_1} = \frac{F_2}{\eta\mu\omega_2} = \frac{F_3}{\eta\mu\omega_3}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή το σημείο O ισορροπεί, η συνισταμένη \vec{F} των \vec{F}_1 και \vec{F}_2 θα έχει ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και ίδιο μέτρο με την \vec{F}_3 . Επομένως από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $OB\Gamma$ έχουμε:

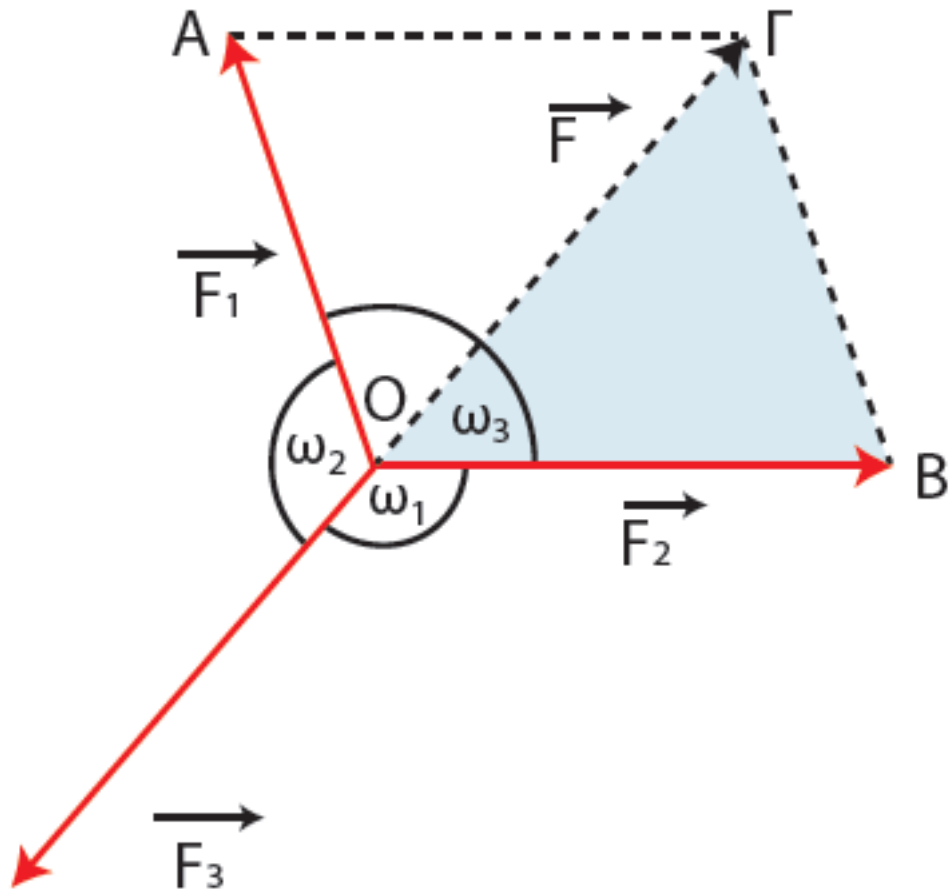
$$\frac{(B\Gamma)}{\eta\mu\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}} = \frac{(OB)}{\eta\mu\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{O}} = \frac{(O\Gamma)}{\eta\mu\hat{O}\hat{B}\hat{\Gamma}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{F_1}{\eta\mu\omega_1} = \frac{F_2}{\eta\mu\omega_2} = \frac{F_3}{\eta\mu\omega_3},$$

$$\text{αφού } \hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma} = 180^\circ - \omega_1,$$

$$\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{O} = 180^\circ - \omega_2 \text{ και}$$

$$\hat{O}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ - \omega_3.$$



Νόμος των συνημίτονων

Όταν είναι γνωστές οι τρεις πλευρές ενός τριγώνου ή οι δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία τους δεν μπορούμε εύκολα με μόνο το νόμο των ημίτονων να υπολογίσουμε τα άλλα στοιχεία του. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το

παρακάτω θεώρημα που είναι γνωστό ως νόμος των συνημίτονων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \Gamma$$

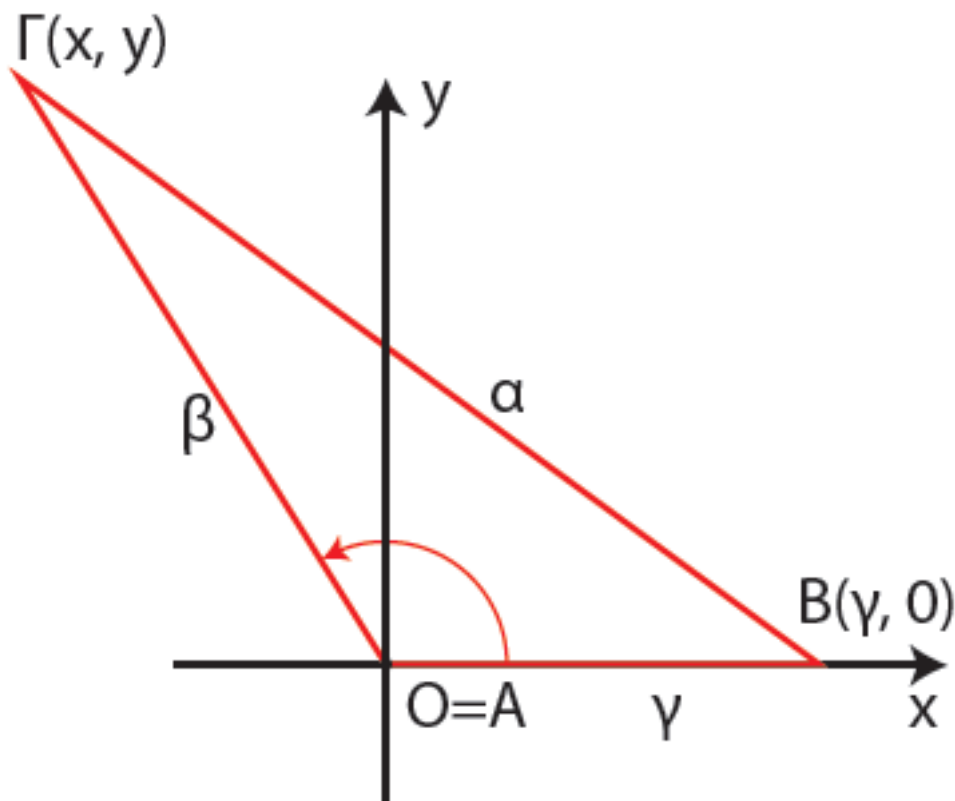
ΑΠΟΔΕΙΞΗ *

Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη ισότητα.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ισότητες.

Στο επίπεδο του τριγώνου θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το A και θετικό ημιάξονα των x την ημιευθεία AB .

Έτσι οι συντεταγμένες του B θα είναι $(\gamma, 0)$, ενώ για τις συντεταγμένες (x, y) του Γ θα ισχύει



$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{x}{\beta} \quad \text{και} \quad \eta\mu A = \frac{y}{\beta}$$

ή ισοδύναμα

$$x = \beta\sigma\upsilon\nu A \quad \text{και} \quad y = \beta\eta\mu A \quad (1)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα τον τύπο της απόστασης για τα σημεία $B(\gamma, 0)$ και

$\Gamma(x, y)$, βρίσκουμε ότι:

$$\alpha = (B\Gamma) = \sqrt{(x - \gamma)^2 + (y - 0)^2}$$

οπότε, λόγω της (1), έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (x - \gamma)^2 + y^2 = \\ &= (\beta\sigma\upsilon\nu A - \gamma)^2 + (\beta\eta\mu A)^2 = \\ &= \beta^2\sigma\upsilon\nu^2 A + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A + \beta^2\eta\mu^2 A \\ &= \beta^2(\sigma\upsilon\nu^2 A + \eta\mu^2 A) + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \\ &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A. \end{aligned}$$

Σχόλιο. Είναι φανερό ότι με το νόμο των συνημίτονων μπορούμε αμέσως να υπολογίσουμε μια οποιαδήποτε πλευρά ενός τριγώνου, αρκεί να δοθούν οι άλλες δύο και η περιεχόμενη τους γωνία. Με τον ίδιο νόμο μπορούμε επιπλέον να υπολογίσουμε και τις γωνίες ενός τριγώνου, του οποίου είναι γνωστές και οι τρεις πλευρές, αφού οι παραπάνω ισότητες γράφονται:

$$\sigma\upsilon\nu\text{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma},$$

$$\sigma\upsilon\nu\text{B} = \frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\gamma\alpha},$$

$$\sigma\upsilon\nu\text{Γ} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 35$, $\beta = 20$ και $\gamma = 42$

ΛΥΣΗ

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

- $35^2 = 20^2 + 42^2 - 2 \cdot 20 \cdot 42 \cos A$,
ΟΠΟΤΕ

$$\cos A = \frac{20^2 + 42^2 - 35^2}{2 \cdot 20 \cdot 42} \approx 0,5589$$

Άρα $A \approx 56^\circ$

- $20^2 = 35^2 + 42^2 - 2 \cdot 35 \cdot 42 \cos B$,
ΟΠΟΤΕ

$$\cos B = \frac{35^2 + 42^2 - 20^2}{2 \cdot 35 \cdot 42} \approx 0,8806$$

Άρα $B \approx 28^\circ$

Άρα $\Gamma \approx 96^\circ$

2ο Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 20$, $\gamma = 42$ και $A = 56^\circ$

ΛΥΣΗ

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$$\alpha^2 = 20^2 + 42^2 - 2 \cdot 20 \cdot 42 \cos 56^\circ$$

$$\approx 1225,$$

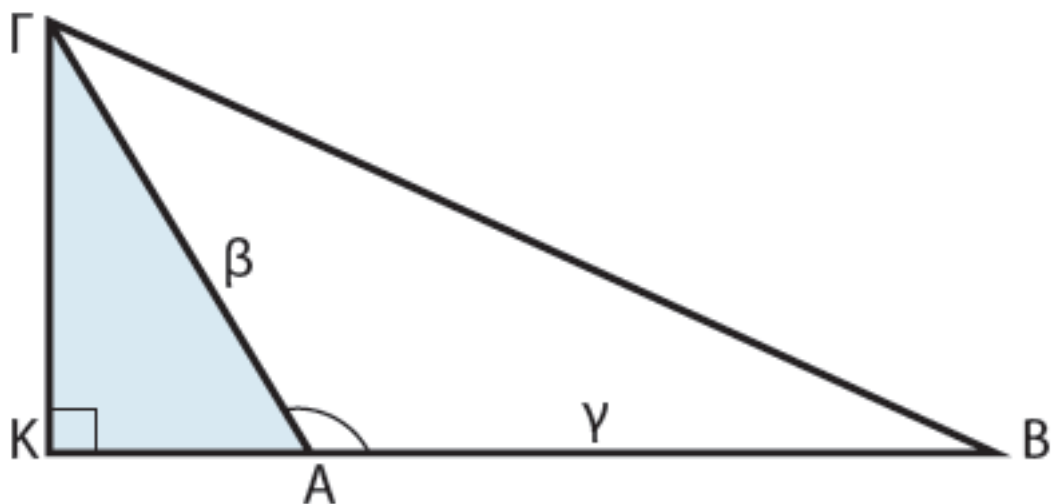
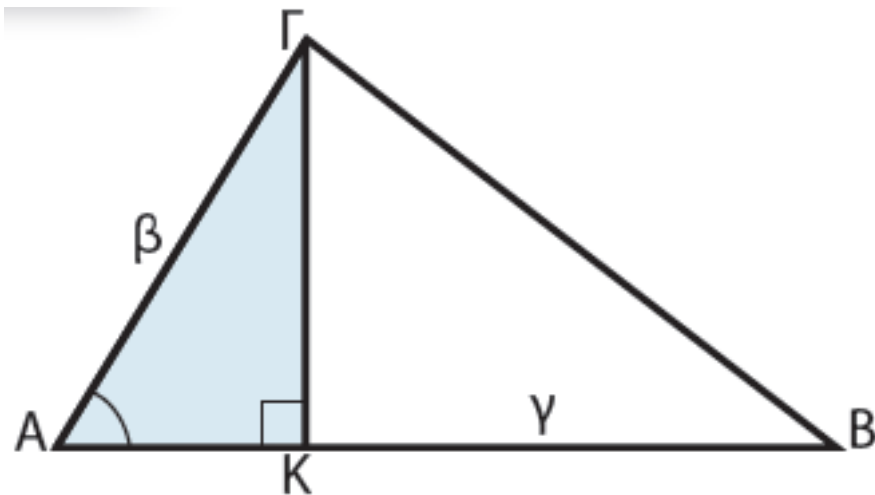
οπότε $\alpha \approx 35$.

Έτσι γνωρίζουμε και τις τρεις πλευρές του τριγώνου, οπότε αναγώμαστε στο προηγούμενο πρόβλημα.

3ο Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ δίνεται από τον

$$\text{τύπο: } E = \frac{1}{2} \beta \gamma \mu\alpha$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Αν φέρουμε το ύψος ΓΚ του τριγώνου, έχουμε:

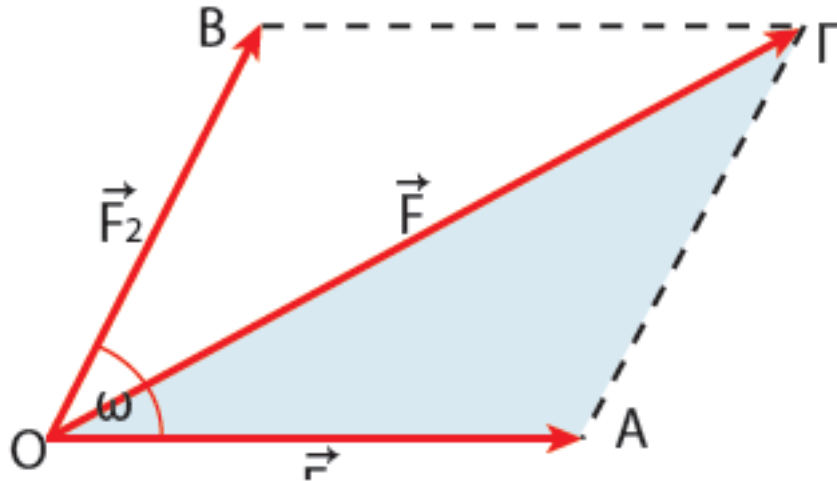
$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (AB) \cdot (\Gamma K) = \frac{1}{2} (AB) \cdot (A\Gamma) \cdot \eta\mu A \\ &= \frac{1}{2} \gamma \cdot \beta \cdot \eta\mu A \end{aligned}$$

$$\left[\text{γιατί} \quad \eta\mu A = \frac{(\Gamma K)}{(A\Gamma)} \right]$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που $A = 90^\circ$.

4ο Σε ένα υλικό σημείο Ο εφαρμόζονται δυο δυνάμεις που έχουν μέτρα F_1 και F_2 αντίστοιχα και σχηματίζουν γωνία ω . Να αποδειχθεί ότι το μέτρο F της συνισταμένης τους δίνεται από τον τύπο:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\sigma\upsilon\upsilon\omega$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

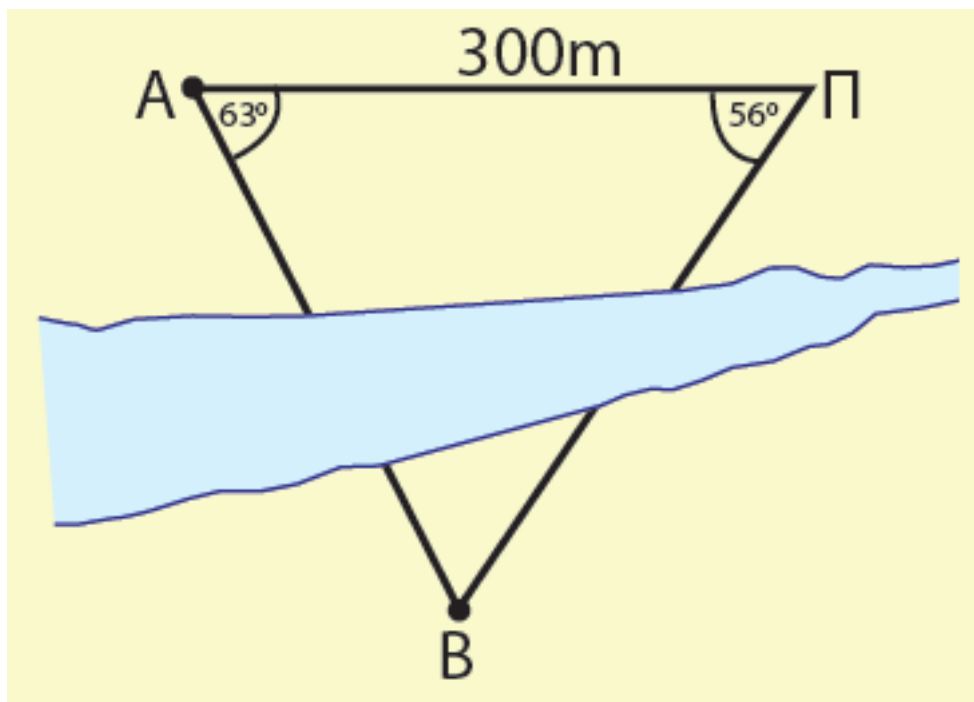
Επειδή $(OA) = F_1$, $(AG) = F_2$ και $(OG) = F$, στο τρίγωνο OAG έχουμε:

$$\begin{aligned} F^2 &= (OG)^2 = \\ &= (OA)^2 + (AG)^2 - 2(OA)(AG)\sigma\upsilon\upsilon A = \\ &= F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \sigma\upsilon\upsilon(180^\circ - \omega) \\ &= F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \sigma\upsilon\upsilon\omega \end{aligned}$$

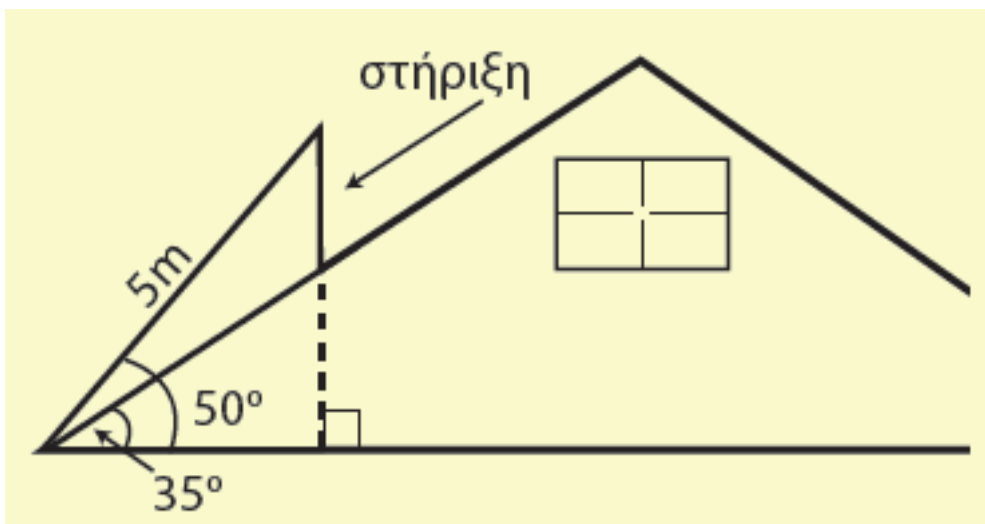
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δυο πύργοι A και B βρίσκονται εκατέρωθεν ενός ποταμού. Ένας παρατηρητής Π βρίσκεται προς το ίδιο μέρος του ποταμού με τον πύργο A. Αν στο τρίγωνο ΠΑΒ είναι $ΠΑ = 300\text{m}$, $\hat{A} = 63^\circ$ και $\hat{\Pi} = 56^\circ$, να βρείτε την απόσταση των πύργων A και B.



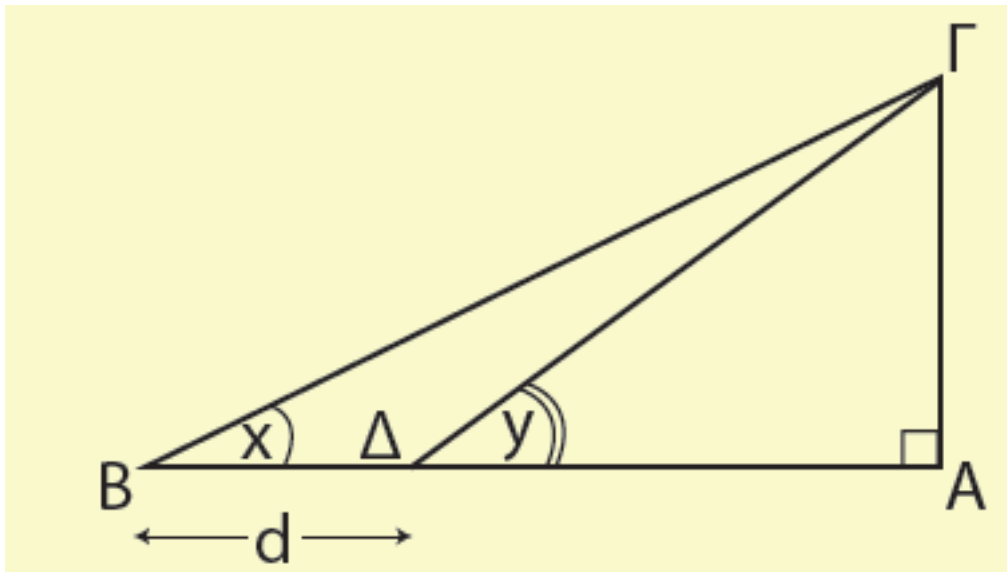
2. Ένας συλλέκτης ηλιακής ακτινοβολίας μήκους 5 m είναι τοποθετημένος στην οροφή ενός κτιρίου, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος του βραχίονα με τον οποίο στηρίζεται ο συλλέκτης.



3. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι:

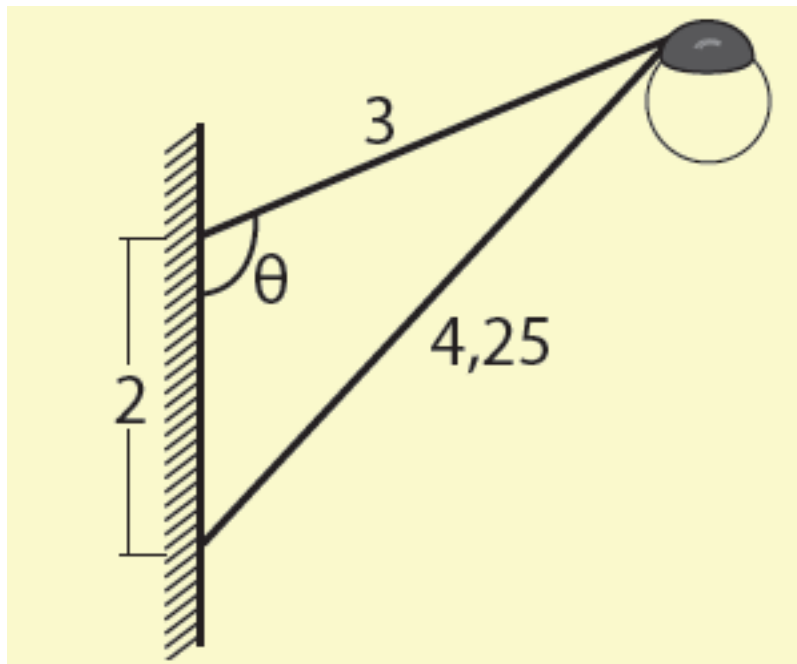
i) $\Gamma\Delta = \frac{d\eta\mu\chi}{\eta\mu(y - x)}$,

$$\text{ii) } AG = \frac{d \eta \mu x \cdot \eta \mu y}{\eta \mu(y - x)}$$

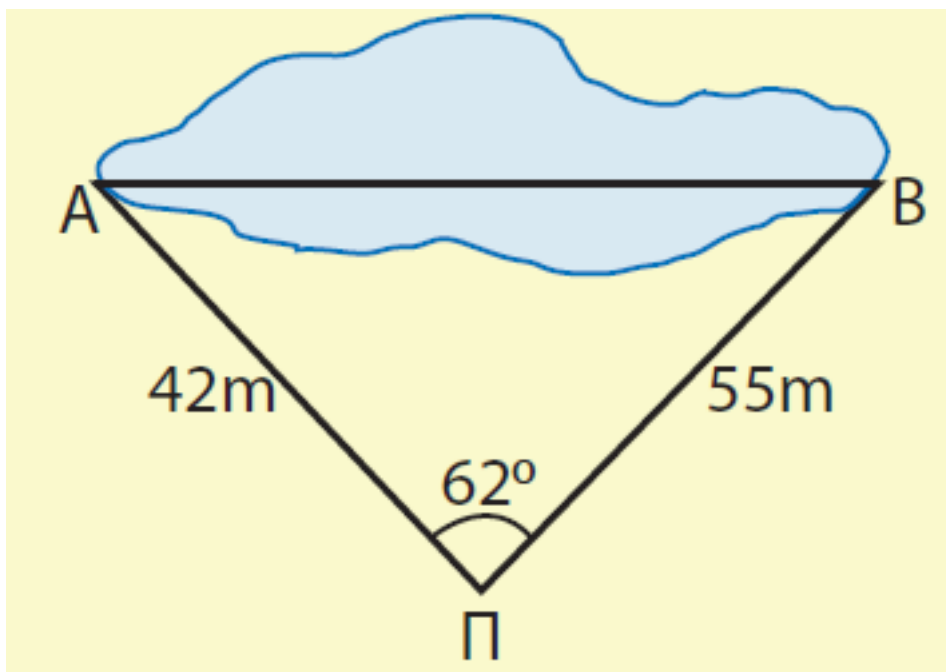


4. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha=30$, $\beta=10$ και $B = 31^\circ$.

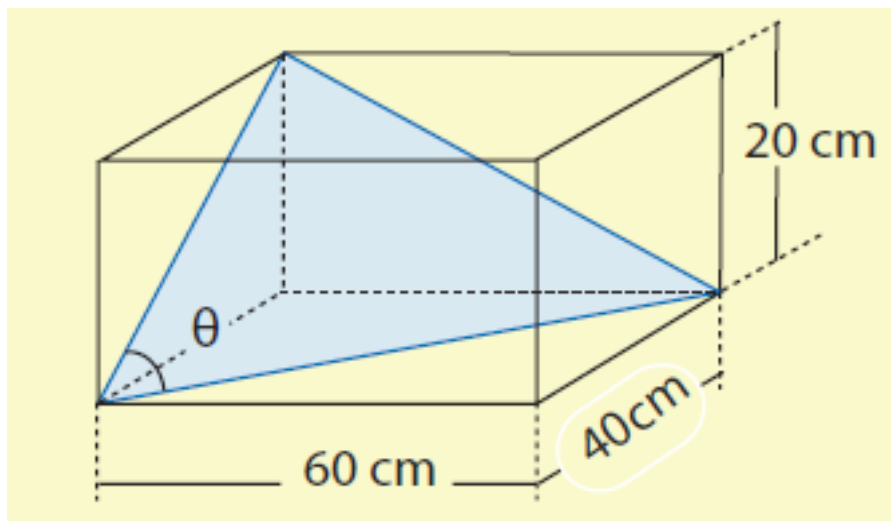
5. Να υπολογίσετε τη γωνία θ του παρακάτω σχήματος.



6. Να υπολογίσετε το μήκος του έλους του παρακάτω σχήματος.



7. Να υπολογίσετε τη γωνία θ του ορθογωνίου κουτιού του παρακάτω σχήματος:



8. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η ισότητα

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\text{A}}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\text{B}}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\text{Γ}}{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$$

9. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η ισότητα:
 $\beta\sigma\upsilon\nu\text{Γ} + \gamma\sigma\upsilon\nu\text{B} = \alpha$

10. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $\beta \sin \Gamma = \gamma \sin B$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$ και αντιστρόφως.

11. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $\alpha = 2\beta \sin \Gamma$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$ και αντιστρόφως.

B' ΟΜΑΔΑΣ

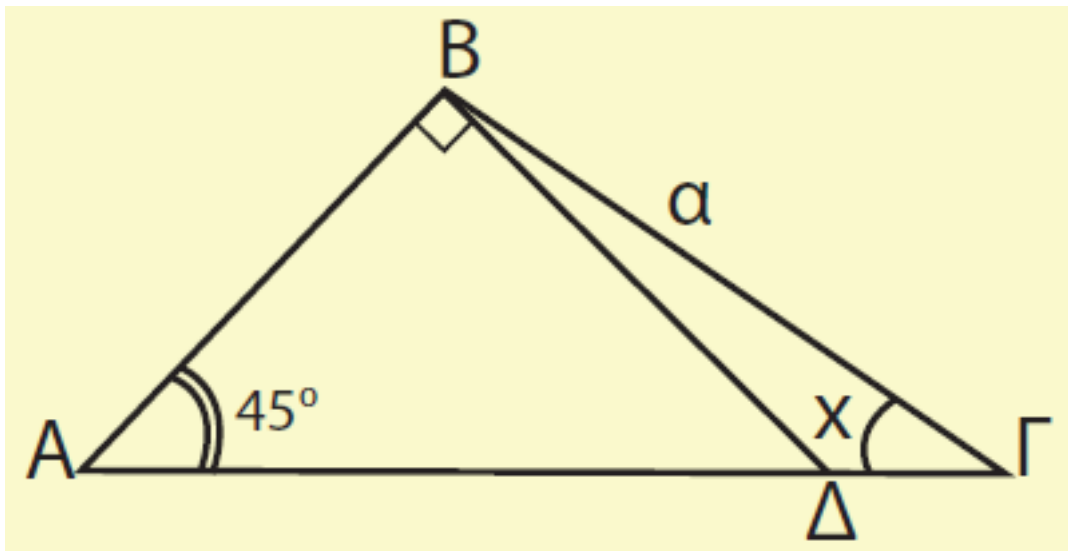
* 1. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $B = 2A$, να αποδείξετε ότι:

i) $\sin A = \frac{\beta}{2\alpha}$

ii) $\beta^2 - \alpha^2 = \alpha\gamma$

2. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι:

$$\Gamma\Delta = \alpha(\sin \chi - \eta \mu \chi)$$



3. Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει μια από τις ισότητες:

i) $\beta = \alpha \eta \mu B$,

ii) $\alpha \eta \mu A = \beta \eta \mu B + \gamma \eta \mu \Gamma$,

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

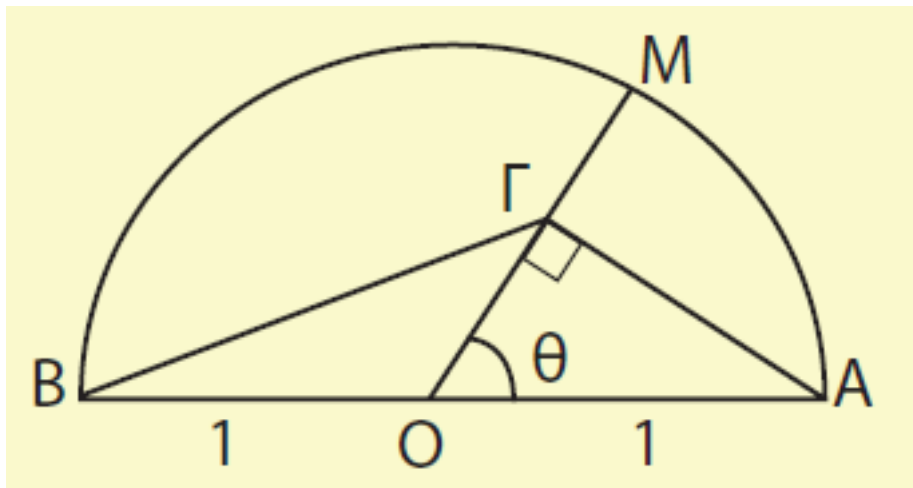
4. Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η ισότητα $\alpha \sigma \upsilon \nu A = \beta \sigma \upsilon \nu B$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η ισότητα:

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \varepsilon\varphi \frac{A - B}{2} \cdot \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2}$$

6. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι:

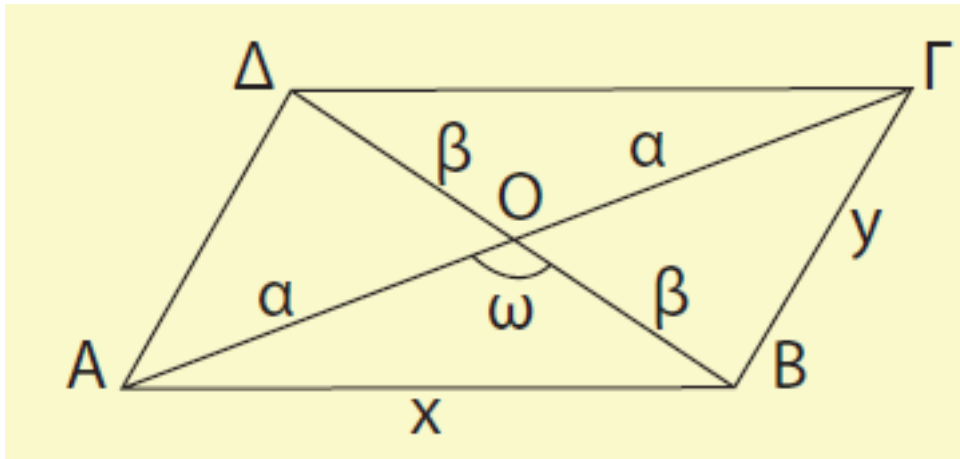
$$(B\Gamma)^2 = \frac{5 + 3\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}$$



7. Να αποδείξετε ότι για το παρακάτω παραλληλόγραμμο ισχύουν οι ισότητες:

i) $x^2 + y^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2$

ii) $(AB\Gamma\Delta) = 2\alpha\beta\eta\mu\omega$



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Γ' ΟΜΑΔΑΣ)

1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ το ύψος του $A\Delta$ είναι ίσο με το μισό της πλευράς $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma = 2\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$ και $\sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma = 2$.

2. Αν για τις γωνίες ενός τριγώνου

$$AB\Gamma \text{ ισχύει } \frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma} = \frac{\eta\mu^2 B}{\eta\mu^2\Gamma}, \text{ να}$$

αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

3. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου με $x = 1 + 2\sigma\upsilon\upsilon\tau$, $y = 3 + 2\eta\mu\tau$, βρίσκονται σε κύκλο κέντρου $K(1,3)$ και ακτίνας $\rho = 2$.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i)
$$\frac{1 + \eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\upsilon\chi} + \frac{\sigma\upsilon\upsilon\chi}{1 + \eta\mu\chi} = 4$$

ii)
$$\frac{\sigma\upsilon\upsilon\chi \cdot \sigma\phi\chi}{1 - \eta\mu\chi} = 3$$

5. i) Αν $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi \geq 2$

ii) Αν $0 \leq \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε
ότι $\epsilon\phi\alpha < \frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\upsilon\alpha + \sigma\upsilon\upsilon\beta} < \epsilon\phi\beta$

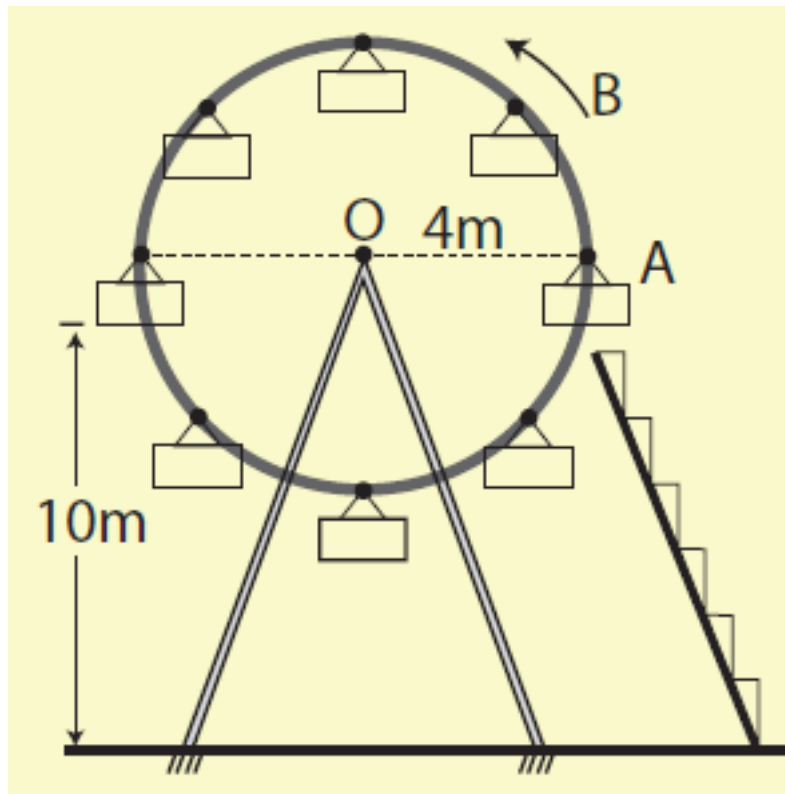
6. Να λύσετε την εξίσωση

$$2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1 \text{ στο διάστημα}$$

$(4\pi, 5\pi)$.

7. Σε ένα λούνα-παρκ ο περιστρεφόμενος τροχός έχει ακτίνα 4m, το κέντρο του απέχει από το έδαφος 10m και όταν αρχίζει να κινείται εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 8 δευτερόλεπτα με σταθερή ταχύτητα. Να βρείτε το ύψος του βαγονιού A από το έδαφος ύστερα από χρόνο 1sec, 2sec, 5sec και γενικότερα ύστερα από χρόνο t sec.

Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα για το βαγόνι B.



8. Να αποδείξετε ότι

i) $\sigma\varphi\chi - \epsilon\varphi\chi = 2\sigma\varphi 2\chi$

ii) $\sigma\varphi\chi - 2\epsilon\varphi 2\chi - 4\epsilon\varphi\chi - 8\epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi\chi$

9. Με τη βοήθεια του τύπου

$\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$, να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $8\chi^3 - 6\chi + \sqrt{2} = 0$

ii) $8\chi^3 - 6\chi - 1 = 0$

10. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $M(x,y)$, με $x=\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y=\sigma\upsilon\nu\theta^2+1$, όπου $\theta \in [0,\pi]$ είναι το τόξο της παραβολής $y = 2x^2$ με $x \in [-1,1]$

11. Με τη βοήθεια των τύπων

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha} \text{ και}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1 + \eta\mu x}{5 + 4\sigma\upsilon\nu x}$$

$$x \in (-\pi, \pi)$$

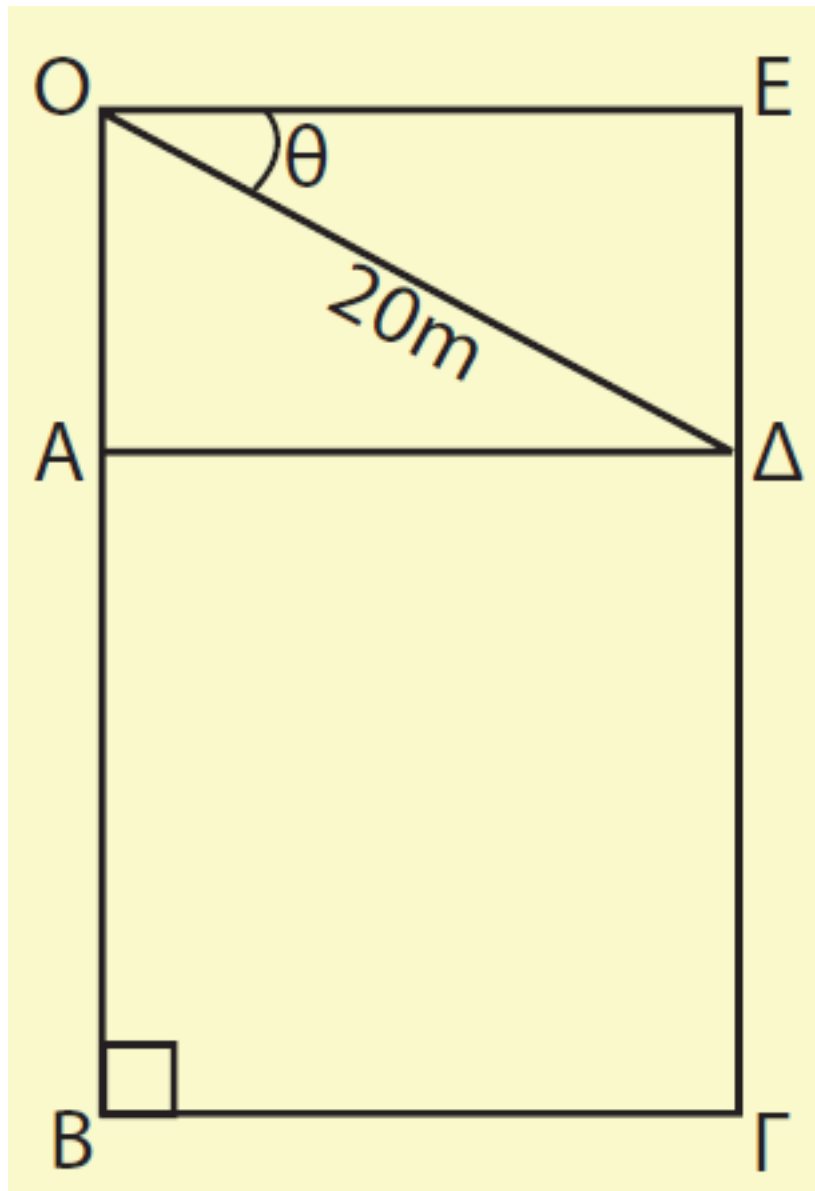
παίρνει τιμές στο

διάστημα $[0, \frac{10}{9})$.

12. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{2+1}} =$$
$$= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

13. Ένα γκαράζ σχήματος ορθογωνίου έχει σχεδιασθεί, έτσι ώστε να αποτελείται (από ένα τετράγωνο ΑΒΓΑ και ένα ορθογώνιο ΟΑΔΕ με ΟΔ = 20m, όπως περιγράφει το διπλανό σχήμα. Για ποια τιμή της γωνίας θ rad το εμβαδό S m² του γκαράζ γίνεται μέγιστο;



Υπόδειξη

i) Να δείξετε ότι

$$S = 400 \sigma \nu \theta + 400 \eta \mu \theta \sigma \nu \theta$$

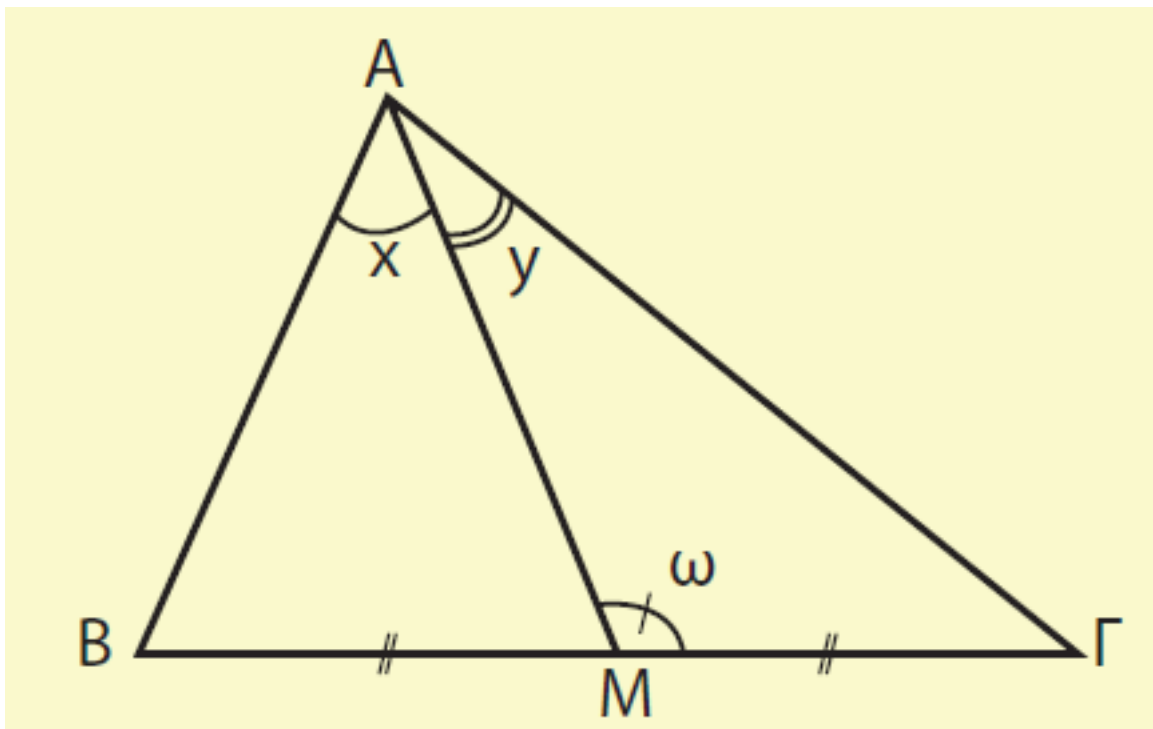
ii) Να εκφράσετε το S στην μορφή

$$S = \rho \eta \mu (20 + \varphi) + c$$

iii) Να βρείτε την τιμή του θ , για την οποία το S παίρνει τη μέγιστη τιμή, την οποία και να προσδιορίσετε.

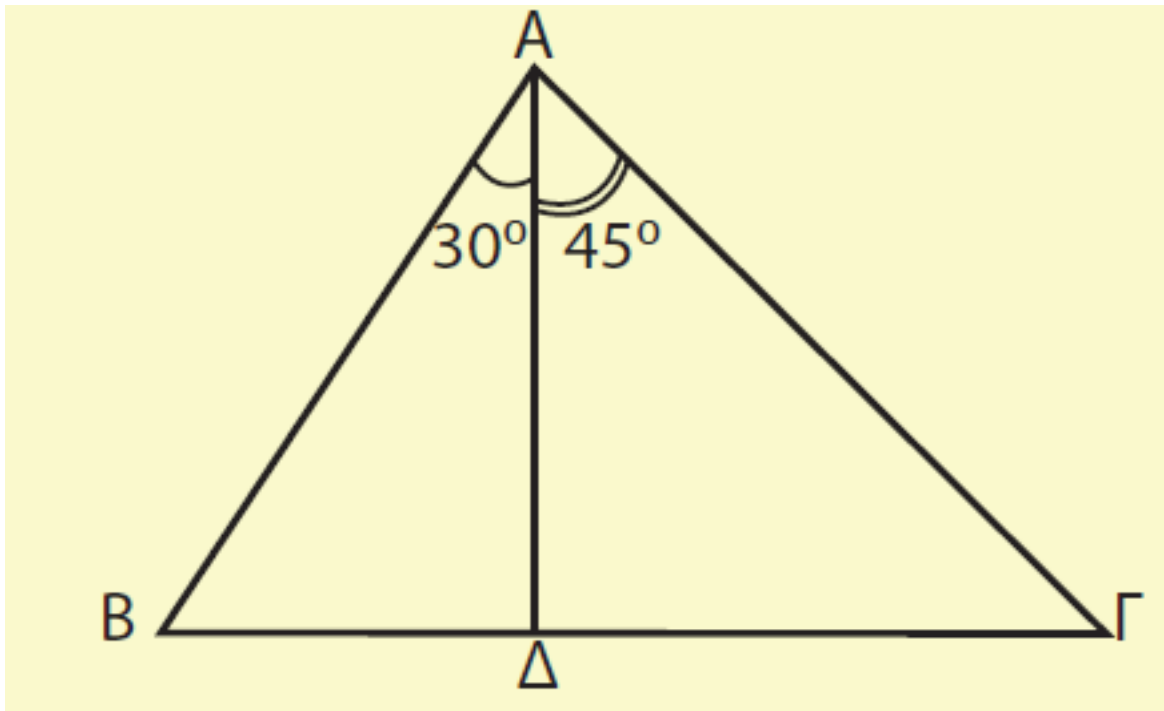
14. Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του AM . Αν $\widehat{MAB} = x$, $\widehat{MAG} = y$ και $\widehat{AMG} = \omega$, να αποδείξετε ότι:

$$2\sigma\phi\omega = \sigma\phi x - \sigma\phi y$$



15. Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του διπλανού

σχήματος, αν ισχύει $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \sqrt{3}$.



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ενώ είναι κοινώς παραδεκτό ότι η γεωμετρία είναι δημιούργημα της κλασικής περιόδου της αρχαίας Ελλάδας, εντούτοις δεν είναι εξίσου γνωστό ότι η τριγωνομετρία είναι δημιούργημα της ελληνιστικής περιόδου με πρωταγωνιστές τον Ίππαρχο, τον Μενέλαο και τον Πτολεμαίο.

Η τριγωνομετρία ξεπήδησε στην προσπάθεια να θεμελιωθεί μια ποσοτική αστρονομία η οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να προβλεφθούν οι θέσεις των ουρανίων σωμάτων, ο υπολογισμός του ημερολογίου και να εφαρμοσθεί στη ναυσιπλοΐα και στη γεωγραφία. Θεμελιωτής της αστρονομίας υπήρξε ο Ίππαρχος που έζησε στη Ρόδο και στην Αλεξάνδρεια και πέθανε γύρω στο 125 π.Χ. Για την προσωπική του ζωή ξέρουμε πολύ λίγα και τα περισσότερα που ξέρουμε γι' αυτόν προέρχονται από τα βιβλία του Πτολεμαίου. Ο Ίππαρχος συνέβαλε αποφασιστικά στη διαμόρφωση της θεωρίας των επικύκλων, και ήταν σε θέση να υπολογίσει εκλείψεις της σελήνης με

ακρίβεια μιας έως δύο ωρών.
Διέθετε επίσης και μια θεωρία για
μια ικανοποιητική εξήγηση του
φαινομένου των εποχών.

Η σημαντικότερη ανακάλυψη του
ήταν ότι τα σημεία που ο άξονας
περιστροφής της γης τέμνει την
ουράνια σφαίρα μετακινούνται και
διαγράφουν κύκλο με περίοδο 2600
χρόνια.

Το μεγαλύτερο μέρος της
τριγωνομετρίας του Ιππάρχου
αναφέρεται σε αυτό που σήμερα
ονομάζουμε σφαιρική
τριγωνομετρία. Και αυτό είναι
μοιραίο, αφού τον ενδιέφεραν
κυρίως τρίγωνα που σχηματίζονται
πάνω στον ουράνιο θόλο. Όμως
ανέπτυξε και βασικά σημεία της
επιπέδου τριγωνομετρίας.

Το έργο του Ίππαρχου συνέχισε ο
Μενέλαος που έζησε γύρω στο 98

μ.Χ. και του οποίου το βασικό έργο είναι τα «σφαιρικά».

Η ανάπτυξη της ελληνικής τριγωνομετρίας και των εφαρμογών της στην αστρονομία ολοκληρώνεται με το έργο του Πτολεμαίου που έζησε στην Αλεξάνδρεια γύρω στο 168 μ.Χ. και του οποίου το κύριο σύγγραμμα είναι η Αλμαγέστη (αραβική παραφθορά της λέξης «Μεγίστη»).

Το βιβλίο Α της Αλμαγέστης περιέχει όλα τα αναγκαία θεωρήματα για την κατασκευή ενός πίνακα ημιτόνων και συνημιτόνων.

Το Βασικό θεώρημα για την κατασκευή αυτού του πίνακα είναι το εξής:

**«Έστω ΑΒΓΔ είναι κυρτό τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Τότε ισχύει:
 $ΑΒ \cdot ΓΔ + ΑΔ \cdot ΒΓ = ΑΓ \cdot ΒΔ$ ».**

Στο θεώρημα αυτό στηρίχτηκε και ο Πτολεμαίος για να βρει διάφορους τριγωνομετρικούς τύπους μεταξύ των οποίων και αυτού που σήμερα εκφράζουμε ως

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

Η Αλμαγέστη έκανε για την τριγωνομετρία ότi έκαναν τα «Στοιχεία του Ευκλείδη» για τη Γεωμετρία: Την διετύπωσαν στη μορφή που παρέμεινε για τα επόμενα 1000 χρόνια.

Μετά το 200 μ.Χ. με την τριγωνομετρία ασχολήθηκαν και οι

Ινδοί με κίνητρο επίσης την αντιμετώπιση αστρονομικών προβλημάτων. Δεν είχαν σημαντική συνεισφορά και αξίζει να σημειωθεί ότι για διάφορους τριγωνομετρικούς και αστρονομικούς όρους όπως κέντρο, λεπτό κτλ., χρησιμοποιούσαν τις ελληνικές λέξεις.

Κατά τα χρόνια του Μεσαίωνα με την τριγωνομετρία ασχολούνται και οι Άραβες, χωρίς να συνεισφέρουν σε αυτήν κάτι σημαντικό δικό τους. Συνέβαλαν όμως στο να μεταδώσουν την Ελληνική τριγωνομετρία στην Ευρώπη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 3ου ΤΟΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.6 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών.....	5
3.7 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί της Γωνίας 2α	34
3.8 Μετασχηματισμοί Τριγωνομετρικών Παραστάσεων	54
3.9 Η Συνάρτηση $f(x)=a\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x$	71
3.10 Επίλυση Τριγώνου	97

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «Διατίθεται με τιμή πώλησης». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του Νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α').

**Απαγορεύεται η αναπαραγωγή
οποιοδήποτε τμήματος αυτού του
βιβλίου, που καλύπτεται από δικαι-
ώματα (copyright), ή η χρήση του
σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη
γραπτή άδεια του Υπουργείου
Παιδείας, Διά Βίου Μάθησης και
Θρησκευμάτων/ ΙΤΥΕ -ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.**