ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 3ος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ:

Αδαμόπουλος Λεωνίδας
Επ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Δαμιανού Χαράλαμπος
Αναπλ. Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Σβέρκος Ανδρέας
Σχολικός Σύμβουλος

ΚΡΙΤΕΣ:

Κουνιάς Στρατής
Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Μακρής Κωνσταντίνος
Σχολικός Σύμβουλος

Τσικαλουδάκης Γεώργιος
Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Γλωσσική Επιμέλεια:

Μπουσούνη Λία
Καθηγήτρια Β/θμιας Εκπαίδευσης

Δακτυλογράφηση:

Μπολιώτη Πόπη

Σχήματα:

Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση των προσαρμογών και η επιστημονική επιμέλεια του προσαρμοσμένου βιβλίου πραγματοποιείται από τη Μονάδα Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου για μαθητές με μειωμένη όραση από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ πραγματοποιείται με βάση τις προδιαγραφές που έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ
ΔΑΜΙΑΝΟΥ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ
ΣΒΕΡΚΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 3ος

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Εισαγωγή

Υπάρχει σε πολλούς η εντύπωση ότι το κύριο κίνητρο για την ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων προήλθε από το ενδιαφέρον του ανθρώπου για τα τυχερά παιχνίδια. Σημαντική μάλιστα ώθηση στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού των Μαθηματικών αποτέλεσε η γόνιμη αλληλογραφία που αναπτύχθηκε ανάμεσα στους Pascal και Fermat το 17ο αιώνα με αφορμή διάφορα προβλήματα που προέκυψαν από την ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια.

Μολονότι όμως τα τυχερά παιχνίδια ήταν ευρέως διαδεδομένα και στους Αρχαίους Έλληνες και στους Ρωμαίους, η Θεωρία των Πιθανοτήτων δεν αναπτύχθηκε κατά την αρχαιότητα, όπως συνέβη με άλλους κλάδους των Μαθηματικών, αλλά πολύ αργότερα, το 16ο και 17ο αιώνα μ.Χ. Γι' αυτό πολλοί απορρίπτουν την άποψη ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων οφείλει τη γένεσή της στην ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια και την αποδίδουν στις ανάγκες να λυθούν προβλήματα που παρουσιάστηκαν με την ανάπτυξη του εμπορίου,

των ασφαλίσεων, της συλλογής εσόδων του κράτους κτλ. Η ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων οφείλεται επίσης και στις ανάγκες των Φυσικών Επιστημών όπως η εφαρμογή της Θεωρίας Σφαλμάτων σε αστρονομικές παρατηρήσεις.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε ακόμα περισσότερο το 18ο αιώνα με τις αξιοσημείωτες εργασίες των μαθηματικών Bernoulli, De Moivre, Laplace και Gauss. Ιδιαίτερα ο Laplace με τις εργασίες του άνοιξε μια καινούργια εποχή για τη Θεωρία Πιθανοτήτων. Γιατί ο Laplace δεν περιορίζεται μόνο στη μαθηματική ανάλυση των τυχερών παιγνιδιών, αλλά εφαρμόζει τα συμπεράσματά του και σε ένα πλήθος από επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα. Έτσι, με αφορμή τη μελέτη των σφαλμάτων που προκύπτουν στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου αστρονομικού μεγέθους ανακαλύπτεται η περίφημη κανονική κατανομή του Gauss. Κατόπιν αποδεικνύεται ότι η κανονική κατανομή απεικονίζει όχι μόνο την κατανομή των σφαλμάτων των αστρονομικών παρατηρήσεων αλλά και την κατανομή πολλών βιολογικών, κοινωνικών και φυσικών φαινομένων. Έτσι, στη διάρκεια του 19ου αιώνα γεννιούνται νέοι κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως είναι η Θεωρία των Σφαλμάτων, τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά και η Στατιστική Μηχανική.

Στις μέρες μας η Θεωρία των Πιθανοτήτων με τις εργασίες πολλών διάσημων μαθηματικών, όπως είναι οι

Chebyshev, Markov, Von Mises, Kolmogorov κ.ά., έχει σημειώσει αλματώδη πρόοδο. Καινούργια θεωρητικά αποτελέσματα παρέχουν νέες δυνατότητες για τη χρησιμοποίηση των μεθόδων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι εφαρμογές των Πιθανοτήτων αναφέρονται σε ένα ευρύτατο φάσμα επιστημών όπως η Φυσική, η Χημεία, η Γενετική, η Ψυχολογία, η Οικονομολογία, η Τηλεπικοινωνία, η Μετεωρολογία κτλ.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ανήκει στους κλάδους των Μαθηματικών που συμβαδίζουν με την ανάπτυξη των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας. Αυτό δε σημαίνει βέβαια ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι απλώς ένα βοηθητικό εργαλείο για τη λύση πρακτικών προβλημάτων των άλλων επιστημών. Απεναντίας έχει μετασχηματιστεί σε έναν αυτοτελή κλάδο των καθαρών Μαθηματικών, που έχει δικά του προβλήματα και δικές του μεθόδους.

22-0088_I_c_math_bm_137-192_18b.indd 7 22/08/2017 11:32

3.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Πείραμα Τύχης

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, αν θερμάνουμε αποσταγμένο νερό σε 100° Κελσίου στην επιφάνεια της θάλασσας, δηλαδή σε ατμοσφαιρική πίεση 760 mm Hg, το νερό θα βράσει. Επίσης, αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει στο κενό υπό την επίδραση της βαρύτητας, μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το διάστημα που θα διανύσει σε ορισμένο χρόνο t. Κάθε τέτοιο πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό** (deterministic) πείραμα.
Υπάρχουν όμως και πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης** (random experiment). Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια εβδομάδα σε ένα σημείο μιας εθνικής οδού, αφού ο αριθμός αυτός εξαρτάται από πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες.

Πειράματα τύχης είναι και τα εξής:

1. **Ρίχνεται ένα νόμισμα και καταγράφεται η άνω όψη του.**
2. **Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.**
3. **Διαλέγεται αυθαίρετα μια οικογένεια με δύο παιδιά και εξετάζεται ως προς το φύλο των παιδιών και τη σειρά γέννησής τους.**
4. **Ρίχνεται ένα νόμισμα ώσπου να φέρουμε "γράμματα" αλλά όχι περισσότερο από τρεις φορές.**
5. **Επιλέγεται τυχαία μια τηλεφωνική συνδιάλεξη και καταγράφεται η διάρκειά της.**
6. **Γίνεται η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ και καταγράφεται το αποτέλεσμα.**
7. **Την παραμονή του Πάσχα, στις 5 μ.μ., μετριέται το μήκος της ουράς των αυτοκινήτων στα πρώτα διόδια της Εθνικής οδού Αθηνών-Λαμίας.**
8. **Επιλέγεται τυχαία μια μέρα της εβδομάδος και μετριέται ο αριθμός των τηλεθεατών που παρακολούθησαν το απογευματινό δελτίο ειδήσεων στην ΕΤ1.**
9. **Επιλέγεται τυχαία μια ραδιενεργός πηγή και καταγράφεται ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.**

Δειγματικός Χώρος

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω. Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa\}.$$

Έτσι, στο πρώτο από τα παραπάνω πειράματα τύχης, αν με Κ συμβολίσουμε το αποτέλεσμα να φέρουμε "κεφαλή" και με Γ το αποτέλεσμα να φέρουμε "γράμματα", τότε ο δειγματικός χώρος είναι Ω = {Κ, Γ}. Επίσης, στο δεύτερο από τα παραπάνω πειράματα τύχης η ένδειξη της άνω έδρας μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Ενδεχόμενα

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού τα σύνολα Α = {2, 4, 6}, Β = {1, 3, 5} και Γ = {6} είναι ενδεχόμενα. Το Α είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό, το Β να φέρουμε περιττό αριθμό και το Γ να φέρουμε 6. Είναι φανερό ότι ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία. Για παράδειγμα, το Γ είναι ένα απλό ενδεχόμενο, ενώ τα Α και Β είναι σύνθετα ενδεχόμενα. Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Γι'αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του. Έτσι, για παράδειγμα, το ενδεχόμενο Α = {2, 4, 6} έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται, όταν φέρουμε 2 ή 4 ή 6.

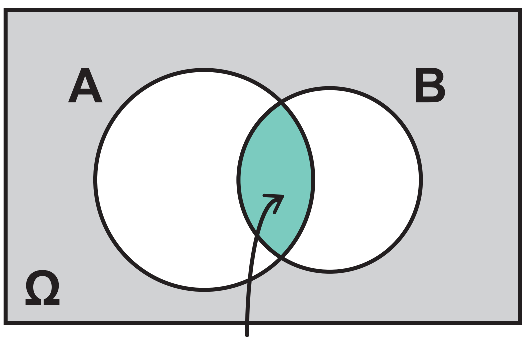
Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Γι'αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο.** Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο ∅ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το ∅ είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου Α θα το συμβολίζουμε με Ν(Α). Επομένως, αν Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} και Α = {2, 4, 6} έχουμε Ν(Α) = 3, Ν(Ω) = 6 και Ν(∅) = 0.

Πράξεις με Ενδεχόμενα

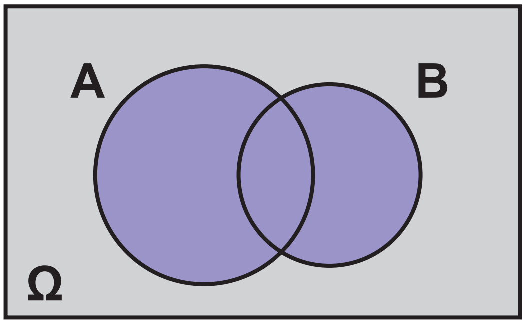
Όπως είδαμε, τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω. Επομένως, μεταξύ των ενδεχομένων ενός πειράματος μπορούν να οριστούν οι γνωστές πράξεις μεταξύ των συνόλων, από τις οποίες προκύπτουν νέα ενδεχόμενα. Έτσι, αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα, έχουμε:

- **Το ενδεχόμενο Α ∩ Β, που διαβάζεται "Α τομή Β" ή "Α και Β" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.**



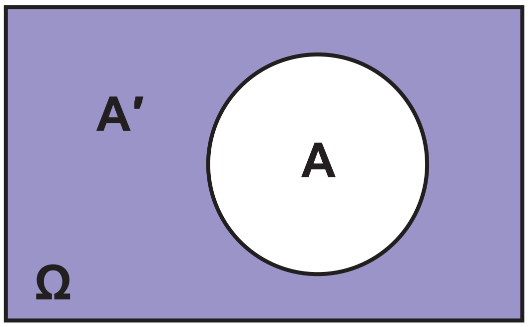
Α ∩ Β

- **Το ενδεχόμενο Α ∪ Β, που διαβάζεται "Α ένωση Β" ή "Α ή Β" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.**



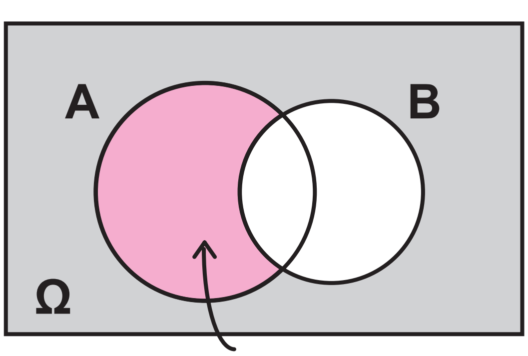
$A \cup B$

- Το ενδεχόμενο A', που διαβάζεται "όχι A" ή "συμπληρωματικό του A" και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A. Το A' λέγεται και "αντίθετο του A".



- Το ενδεχόμενο $A - B$, που διαβάζεται "διαφορά του B από το A" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$A - B = A \cap B'$.



$A - B$

Στον παρακάτω πίνακα τα Α και Β συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα Α και Β διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο Α δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
Ένα τουλάχιστον από τα Α και Β πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα Α και Β	$\omega \in A \cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το Α	$\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)
Η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β	$A \subseteq B$

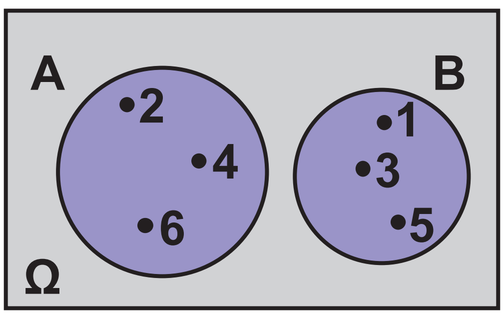
Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού έστω τα ενδεχόμενα $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ο αριθμός 1, τότε τα ενδεχόμενα A, $A \cup B$, $A - B$, B' πραγματοποιούνται, ενώ τα A', B, $(A \cup B)'$, $(A - B)'$, $A \cap B$ δεν πραγματοποιούνται.

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Στη ρίψη ενός ζαριού αν A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό και B το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό, έχουμε $A = \{2, 4, 6\}$ και $B = \{1, 3, 5\}$. Παρατηρούμε ότι τα A και B δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, αφού δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Στην περίπτωση αυτή τα A και B λέγονται ασυμβίβαστα. Γενικά:

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.

Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα.**



$A \cap B = \varnothing$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.

i) Να γραφτεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος.

ii) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A_1: "Ο αριθμός των Κ υπερβαίνει τον αριθμό των Γ"

A_2: "Ο αριθμός των Κ είναι ακριβώς 2"

A_3: "Ο αριθμός των Κ είναι τουλάχιστον 2"

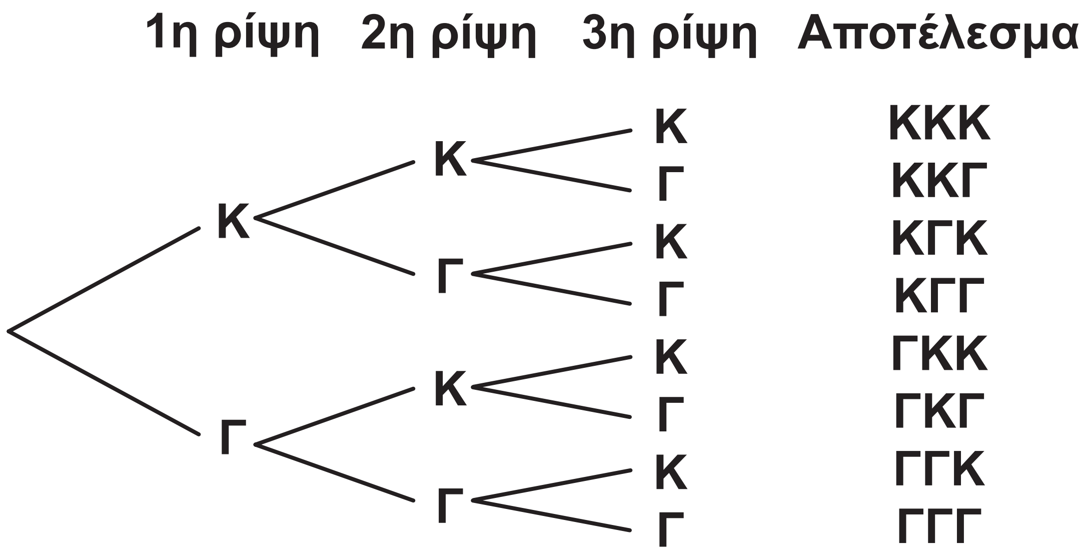
A_4: "Ίδια όψη και στις τρεις ρίψεις"

A_5: "Στην πρώτη ρίψη φέρνουμε Κ"

iii) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A_3', $A_5 \cap A_2$, $A_5 \cup A_4$.

ΛΥΣΗ

i) Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο, θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεντροδιάγραμμα:



Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες με στοιχεία το Κ και το Γ και είναι

Ω = {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}.

ii) Έχοντας υπόψη το δειγματικό χώρο Ω και την αντίστοιχη ιδιότητα έχουμε:

A_1 = {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ}

A_2 = {ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ}

A_3 = {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ} (Παρατηρούμε ότι $A_3 = A_1$)

A_4 = {ΚΚΚ, ΓΓΓ}

A_5 = {ΚΚΚ, ΚΓΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ}.

iii) Το A_3' περιέχει εκείνα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που δεν περιέχει το A_3, περιέχει δηλαδή τα

στοιχεία στα οποία ο αριθμός των Κ είναι μικρότερος από 2. Επομένως, A_3' = {ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}.

Το ενδεχόμενο $A_5 \cap A_2$ περιέχει τα κοινά στοιχεία των A_5 και A_2, δηλαδή τα στοιχεία με δύο ακριβώς Κ, εκ των οποίων το ένα στην πρώτη θέση. Επομένως, $A_5 \cap A_2$ = {ΚΚΓ, ΚΓΚ}.

Το ενδεχόμενο $A_5 \cup A_4$ περιέχει τα στοιχεία που στην πρώτη θέση έχουν Κ ή τα στοιχεία που έχουν ίδιες και τις τρεις ενδείξεις.

Επομένως, $A_5 \cup A_4$ = {ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΚΓ, ΚΚΚ, ΓΓΓ}.

2. Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος με δειγματικό χώρο Ω. Να παρασταθούν με διαγράμματα Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια συνόλων τα ενδεχόμενα που ορίζονται με τις εκφράσεις:

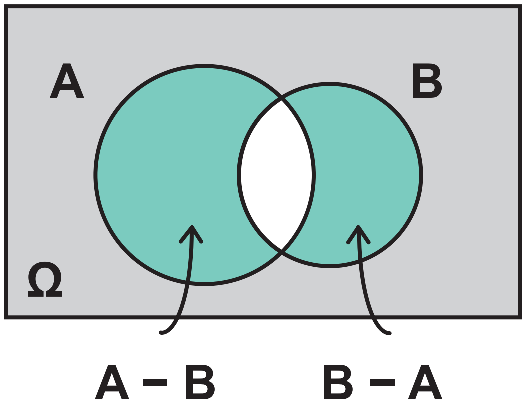
i) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα Α και Β.

ii) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β.

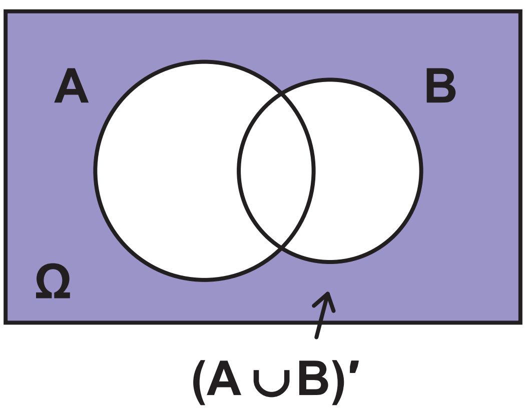
ΛΥΣΗ

i) Επειδή θέλουμε να πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β, γραμμοσκιάζουμε τις επιφάνειες των Α και Β με εξαίρεση την τομή τους, δηλαδή την κοινή επιφάνειά τους.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή πραγματοποιείται ένα μόνο από τα Α − Β και Β − Α. Άρα, το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το (Α − Β) ∪ (Β − Α) ή ισοδύναμα το (Α ∩ Β′) ∪ (Α′ ∩ Β).



ii) Επειδή θέλουμε να μην πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β, γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του Ω που είναι εκτός της ένωσης των Α και Β. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του Α ∪ Β, δηλαδή το (Α ∪ Β)′.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση).
   i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;
   ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο "η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη";
   iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο "να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα";

2. Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα, χωρίς όμως τώρα να γίνει επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας πριν την εξαγωγή της δεύτερης. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση).

3. Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο ή στη Μακεδονία. Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο ή με πλοίο. Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της, με τρένο ή με αεροπλάνο. Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε:

i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο Α: "Η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο στον τόπο των διακοπών της".

4. Ένα ξενοδοχείο προσφέρει γεύμα που αποτελείται από τρία πιάτα. Το κύριο πιάτο, το συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Γεύμα	Επιλογές
Κύριο πιάτο	Κοτόπουλο ή φιλέτο
Συνοδευτικό	Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα
Γλυκό	Παγωτό ή τούρτα ή ζελέ

Ένα άτομο πρόκειται να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο.

i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο Α: "το άτομο επιλέγει παγωτό"

iii) Να βρείτε το ενδεχόμενο Β: "το άτομο επιλέγει κοτόπουλο"

iv) Να βρείτε το ενδεχόμενο $Α \cap Β$

v) Αν Γ το ενδεχόμενο: "το άτομο επιλέγει ρύζι", να βρείτε το ενδεχόμενο $(Α \cap Β) \cap Γ$.

5. Η διεύθυνση ενός νοσοκομείου κωδικοποιεί τους ασθενείς σύμφωνα με το αν είναι ασφαλισμένοι ή όχι και σύμφωνα με την κατάσταση της υγείας τους, η οποία χαρακτηρίζεται ως καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Η διεύθυνση καταγράφει με 0 τον ανασφάλιστο ασθενή και με 1 τον ασφαλισμένο, και στη συνέχεια δίπλα γράφει ένα από τα γράμματα α, β, γ ή δ, ανάλογα με το αν η κατάσταση του είναι καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Θεωρούμε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός νέου ασθενούς. Να βρείτε:

i) Το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

ii) Το ενδεχόμενο Α: "η κατάσταση του ασθενούς

είναι σοβαρή ή κρίσιμη και είναι ανασφάλιστος".

iii) Το ενδεχόμενο Β: "η κατάσταση του ασθενούς είναι καλή ή μέτρια".

iv) Το ενδεχόμενο Γ: "ο ασθενής είναι ασφαλισμένος".

6. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα:

i) Ρίχνουμε ένα ζάρι. Α είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και Β είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.

ii) Επιλέγουμε ένα άτομο. Α είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και Β το ενδεχόμενο να είναι καθολικός.

iii) Επιλέγουμε μια γυναίκα. Α είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και Β το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια.

iv) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. Α είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και Β το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.

7. Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

2. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

Α: “Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης”.

Β: “Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός”

Γ: “Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις

είναι μικρότερο του 5”

Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $(A \cap B) \cap \Gamma$.

3. **Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι: $A \subseteq B$, τότε $B' \subseteq A'$.**

4. **Έστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Να γράψετε το ενδεχόμενο $A \cup B$ ως ένωση τριών ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων.**

3.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Εισαγωγή

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης, όπως είδαμε, είναι η αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα του πειράματος θα εμφανιστεί σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του. Επομένως, αν A είναι ένα ενδεχόμενο, δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε αν το A θα πραγματοποιηθεί ή όχι. Γι’ αυτό είναι χρήσιμο

να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ενδεχόμενο A έναν αριθμό, που θα είναι ένα μέτρο της "προσδοκίας" με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίησή του. Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε πιθανότητα του A και τον συμβολίζουμε με P(A). Πώς όμως θα προσδιορίσουμε για κάθε ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης την πιθανότητά του; Δηλαδή πώς θα βρούμε μια διαδικασία με την οποία σε κάθε ενδεχόμενο θα αντιστοιχίζουμε την πιθανότητά του; Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά.

Έννοια και Ιδιότητες Σχετικής Συχνότητας

Αν σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται κ φορές, τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ ονομάζεται σχετική συχνότητα του A και συμβολίζεται με f_A. Ιδιαίτερα αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\lambda\}$ και σε ν εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_\lambda\}$ πραγματοποιούνται $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_\lambda$ φορές αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες $f_1 = \frac{\kappa_1}{\nu}, f_2 = \frac{\kappa_2}{\nu}, ..., f_\lambda = \frac{\kappa_\lambda}{\nu}$ των απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

1. $0 \le f_i \le 1, i = 1, 2, ..., \lambda$ (αφού $0 \le \kappa_i \le \nu$)

$$2.\ f_1 + f_2 + \ldots + f_\lambda = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_\lambda}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

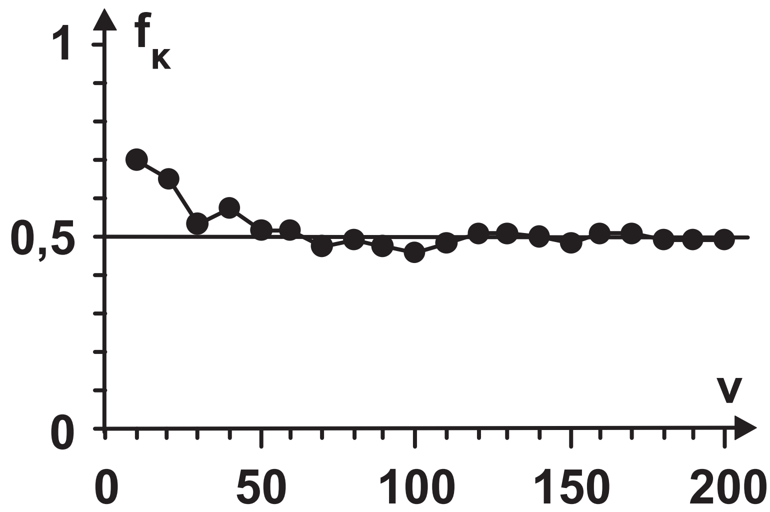
Ας εκτελέσουμε τώρα το ακόλουθο πείραμα: Ρίχνουμε ένα συμμετρικό και ομογενές νόμισμα και σημειώνουμε με Κ το αποτέλεσμα “κεφαλή” και με Γ το αποτέλεσμα “γράμματα”.

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται το πλήθος των Κ και οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες στις 10, 20, 30, ..., 200 ρίψεις του νομίσματος ενώ στο σχήμα 1 παριστάνεται το αντίστοιχο διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Πίνακας ρίψεων ενός νομίσματος		
ν	κ	$f_κ$
10	7	0,700
20	13	0,650
30	16	0,533
40	23	0,575
50	26	0,520
60	31	0,517
70	33	0,471
80	39	0,488
90	43	0,478
100	46	0,460
110	53	0,482
120	61	0,508
130	66	0,508
140	70	0,500
150	73	0,486
160	81	0,506
170	87	0,512
180	89	0,494
190	93	0,489
200	99	0,495

22-0088_I_c_math_bm_137-192_18b.indd 28 22/08/2017 11:32

Διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων 1



Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός ν των ρίψεων η σχετική συχνότητα $f_κ$ εμφάνισης της "κεφαλής" σταθεροποιείται γύρω από την τιμή 0,5 ή, όπως λέμε "τείνει" στον αριθμό 0,5. Αυτό επιβεβαιώνει την "προσδοκία" μας ότι στη ρίψη ενός συμμετρικού και ομογενούς νομίσματος ή, όπως λέμε, ενός "αμερόληπτου" νομίσματος, οι σχετικές συχνότητες των ενδεχομένων {Κ}, {Γ} είναι ίσες. Ανάλογα παραδείγματα μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται **στατιστική ομαλότητα** ή **νόμος των μεγάλων αριθμών.**

Θα προσπαθήσουμε τώρα στηριζόμενοι στις προηγούμενες διαπιστώσεις να ορίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση του αμερόληπτου νομίσματος. Ρίχνουμε ένα τέτοιο νόμισμα και παρατηρούμε την όψη που θα εμφανιστεί. Όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα {Κ}, {Γ} τείνει στον αριθμό $\frac{1}{2}$. Ομοίως θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε ότι στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα {1}, {2}, {3}, {4}, {5} και {6} τείνει στον αριθμό $\frac{1}{6}$. Σε πειράματα όπως τα προηγούμενα λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα ή, ισοδύναμα, τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Ας δούμε τώρα ποια αναμένουμε να είναι η σχετική συχνότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα.

Έστω για παράδειγμα, το ενδεχόμενο να φέρουμε ζυγό αριθμό στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού. Επειδή το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι 2 ή 4 ή 6 και καθένα από τα αποτελέσματα αυτά εμφανίζεται με σχετική συχνότητα $\frac{1}{6}$, η

συχνότητα εμφάνισης του ζυγού αριθμού αναμένεται να είναι $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$.

Γενικά, σε ένα πείραμα με ν ισοπίθανα αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με κ στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{κ}{ν}$. Γι' αυτό είναι εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α τον αριθμό:

$$P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Έτσι, έχουμε τον **κλασικό** ορισμό της πιθανότητας, που διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

1. $P(\Omega)=\frac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1$

2. $P(\varnothing)=\frac{0}{N(\Omega)}=0$

3. Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $0 \le P(A) \le 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Για να μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας σε ένα δειγματικό χώρο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, είναι απαραίτητο τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα. Υπάρχουν όμως πολλά πειράματα τύχης, των οποίων ο δειγματικός χώρος δεν αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Όπως για παράδειγμα ο αριθμός των αυτοκινητιστικών δυστυχημάτων μια ορισμένη εβδομάδα, η ρίψη ενός ζαριού που δεν είναι συμμετρικό κτλ. Για τις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος έχει ανάλογες ιδιότητες με τη σχετική συχνότητα.

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_\nu) = 1.$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$. Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\} \neq \varnothing$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + ... + P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing) = 0$.

Αν $P(\omega_i) = \frac{1}{\nu}$, $i = 1, 2, ..., \nu$, τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου. Στην πράξη, ιδιαίτερα στην περίπτωση που δεν ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α λαμβάνεται το όριο της σχετικής του συχνότητας.

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ και χρησιμοποιούμε τη φράση "παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω", εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $P(\omega_i) = \frac{1}{\nu}$, $i = 1, 2, ..., \nu$.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, γνωστές ως "κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων". Οι κανόνες αυτοί θα αποδειχθούν στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύουν και στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.

1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει:

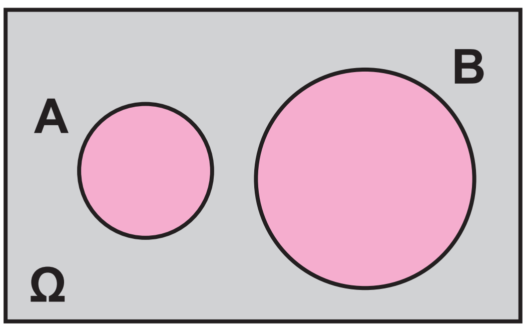
$$P(A \cup B) = P(A) + (B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν N(A) = κ και N(B) = λ, τότε το $A \cup B$ έχει κ + λ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα Α και Β δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A \cup B) = κ + λ = N(A) + N(B)$.
Επομένως:

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} =$$

$$= P(A) + P(B).$$



$A \cup B$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα Α, Β

και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$.

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α′ ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

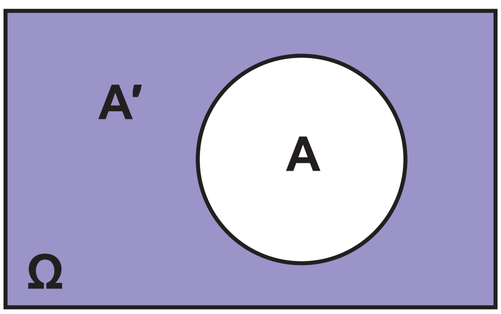
Επειδή $A \cap A' = \varnothing$, δηλαδή τα Α και Α' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A')$$

Οπότε $P(A') = 1 - P(A)$.



3. **Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα Α και Β έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B), \qquad (1)$$

αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

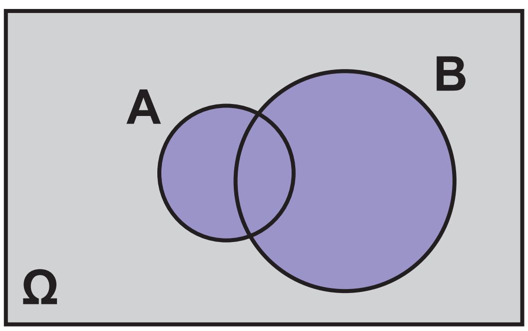
Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).



$A \cup B$

4. **Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$**

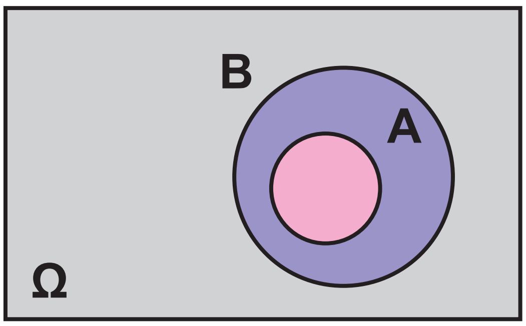
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \leq N(B)$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$P(A) \leq P(B).$$



5. **Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει**

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

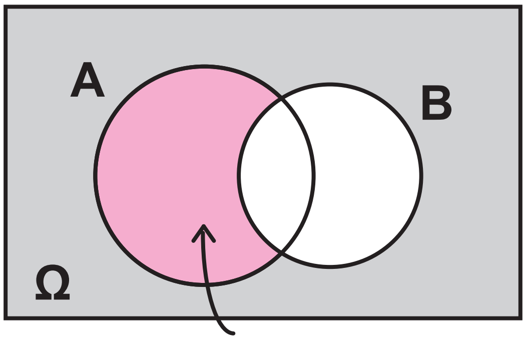
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A - B) \cup (A \cap B) = A$, έχουμε:

22-0088_I_c_math_bm_137-192_18b.indd 37 22/08/2017 11:32

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B).$$

Άρα $$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$



A − B

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ρίχνουμε δύο "αμερόληπτα" ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς.

ΛΥΣΗ

- Για να βρούμε το δειγματικό χώρο του πειράματος, χρησιμοποιούμε έναν πίνακα "διπλής εισόδου", όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

1ο \ 2ο	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Από τον πίνακα αυτόν έχουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω έχει 36 ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή $N(\Omega) = 36$.

• Το ενδεχόμενο A: “να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς”, είναι το

$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$

δηλαδή $N(A) = 10$

• Επομένως, $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Άρα, η πιθανότητα να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς είναι $\frac{5}{18} \approx 0{,}28$ ή, στη γλώσσα των ποσοστών, περίπου 28%.

2. **Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ και $P(A \cap B) = 0{,}2$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:**

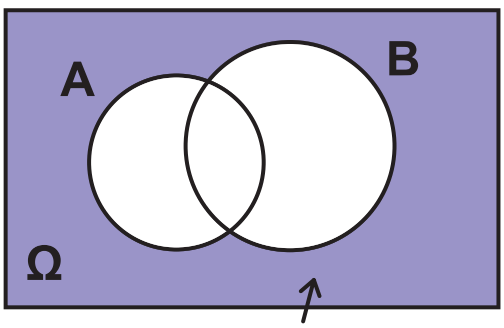
i) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β.

ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β.

ΛΥΣΗ

i) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β είναι το $(A \cup B)'$. Επομένως

$$\begin{aligned} P((A \cup B)') &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - (0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2) \\ &= 1 - 0{,}7 \\ &= 0{,}3. \end{aligned}$$



$(A \cup B)'$

ii) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β είναι το $(A - B) \cup (B - A)$. Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:

$P((A - B) \cup (B - A)) =$

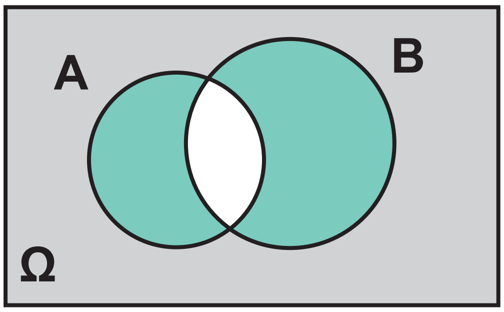
$= P(A - B) + P(B - A)$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$=0,5 + 0,4 - 2 \cdot 0,2$

$= 0,5.$



$(A - B) \cup (B - A)$

3. Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,5$.
i) Να εξεταστεί αν τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.
ii) Να αποδείξετε ότι $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,5$.

ΛΥΣΗ

i) Αν τα Α και Β ήταν ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων θα είχαμε:

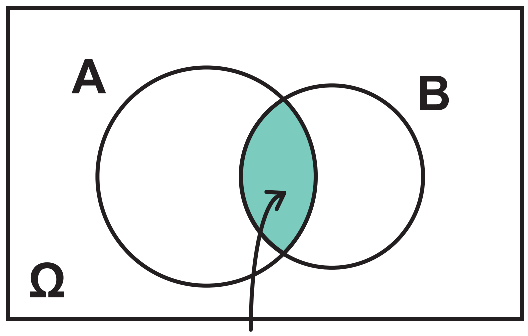
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,6 + 0,5 = 1,1$$

ισχύει, δηλαδή, $P(A \cup B) > 1$, που είναι άτοπο. Άρα, τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

ii) Επειδή $A \cap B \subseteq B$ και $A \cap B \subseteq A$, έχουμε

$P(A \cap B) \leq P(B)$ και $P(A \cap B) \leq P(A)$,

επομένως $\quad P(A \cap B) \leq 0{,}5 \qquad (1)$



Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}5 - P(A \cap B).$$

Όμως $\quad P(A \cup B) \leq 1.$

Επομένως: $\quad 0{,}6 + 0{,}5 - P(A \cap B) \leq 1$

$$0{,}6 + 0{,}5 - 1 \leq P(A \cap B)$$

$$0{,}1 \leq P(A \cap B). \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$0{,}1 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}5.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων i) το χαρτί να είναι πέντε ii) το χαρτί να μην είναι πέντε.

2. Να βρείτε την πιθανότητα στη ρίψη δύο νομισμάτων να εμφανιστούν δύο "γράμματα".

3. Ένα κουτί περιέχει μπάλες: 10 άσπρες, 15 μαύρες, 5 κόκκινες και 10 πράσινες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι:
i) μαύρη ii) άσπρη ή μαύρη iii) ούτε κόκκινη ούτε πράσινη.

4. Σε μια τάξη με 30 μαθητές, ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέλφια έχουν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Αριθμός μαθητών	4	11	9	3	2	1
Αριθμός αδελφών	0	1	2	3	4	5

Αν επιλέξουμε τυχαία από την τάξη ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τρία παιδιά.

5. **Έστω τα σύνολα $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N} \mid 10 \leq \omega \leq 20\}$, $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega$ πολλαπλάσιο του $3\}$ και $B = \{\omega \in \Omega \mid \omega$ πολλαπλάσιο του $4\}$. Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα στοιχείο του Ω, να βρείτε τις πιθανότητες i) να ανήκει στο Α ii) να μην ανήκει στο Β.**

6. **Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30%, η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40%. Να βρείτε την πιθανότητα i) να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος ii) να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος.**

7. **Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{17}{30}$, $P(B) = \frac{7}{15}$ και $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Να βρείτε την $P(A \cap B)$.**

8. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Να βρείτε την P(B).

9. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου είναι γνωστό ότι P(A) = P(B), $P(A \cup B) = 0{,}6$ και $P(A \cap B) = 0{,}2$. Να βρείτε την P(A).

10. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Να βρείτε την $P(A \cup B)$.

11. Για δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

12. Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχουν κάρτα D, το 55% έχουν κάρτα V και το 15% έχουν και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μία τουλάχιστον από τις δυο κάρτες;

13. Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει

α) τουλάχιστον μία ασθένεια;

β) μόνο μία ασθένεια;

14. Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μη μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω έχουμε $P(A) = \kappa$, $P(B) = \lambda$ και $P(A \cap B) = \mu$, να βρείτε τις πιθανότητες:

i) να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα Α και Β

ii) να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β

iii) να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β.

22-0088_I_c_math_bm_137-192_18b.indd 46 22/08/2017 11:32

2. **Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση, το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαίως ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο.**

3. **Αν $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες P(A) και P(A′).**

4. **Αν $0 < P(A) < 1$, να αποδείξετε ότι**
$$\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} \geq 4.$$

5. **Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}7$, να δείξετε ότι $0{,}3 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}6$.**

6. **Για δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι**
$$P(B) - P(A') \leq P(A \cap B).$$

3.3 ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Είδαμε ότι όταν ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης έχει πεπερασμένο πλήθος απλών ενδεχομένων και τα απλά αυτά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, τότε η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

Επομένως, όταν έχουμε ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, ο υπολογισμός της P(A) ανάγεται στην απαρίθμηση των στοιχείων των συνόλων Ω και Α.

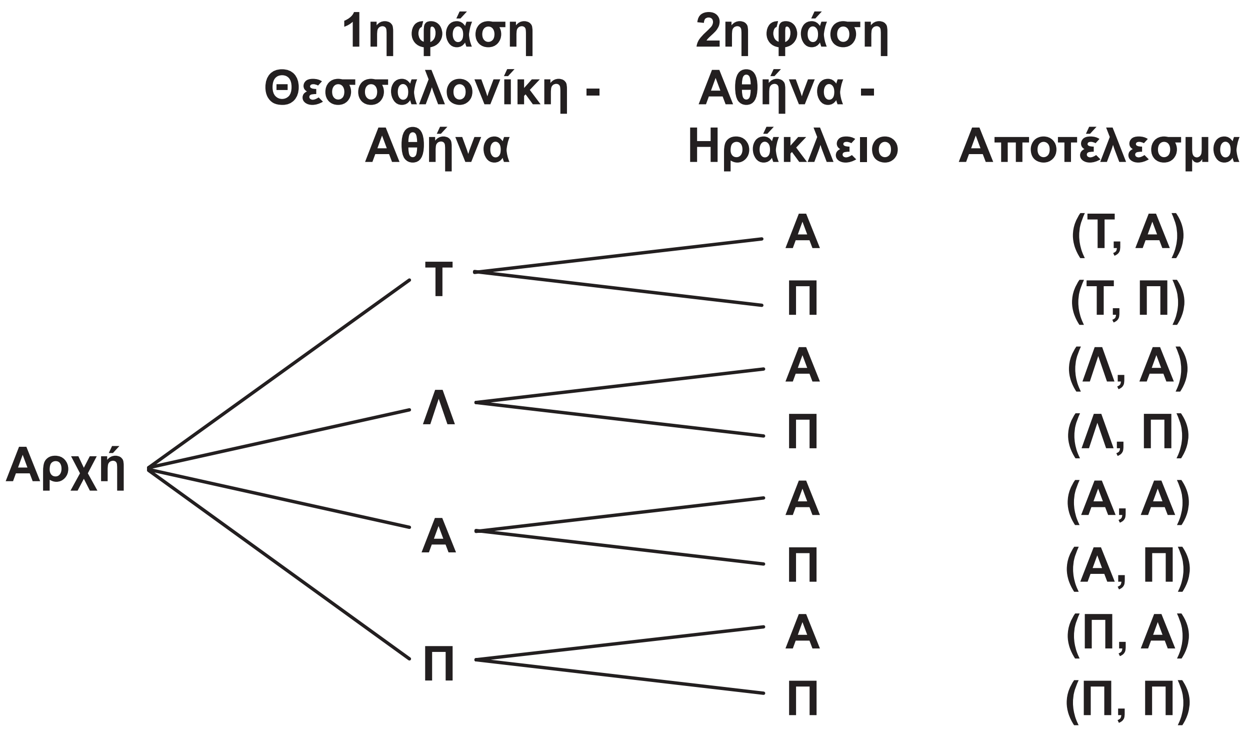
Σε πολλά προβλήματα όμως, η απευθείας απαρίθμηση των στοιχείων του δειγματικού χώρου και των ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν είναι δύσκολη ή και πρακτικά αδύνατη. Στις περιπτώσεις αυτές η απαρίθμηση διευκολύνεται με τις επόμενες μεθόδους της Συνδυαστικής η οποία είναι ένας από τους βασικούς κλάδους των Μαθηματικών.

Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος επιθυμεί να ταξιδέψει από τη Θεσσαλονίκη, μέσω Αθηνών, στο Ηράκλειο Κρήτης

χωρίς να χρησιμοποιήσει το ΙΧ αυτοκίνητό του. Από τη Θεσσαλονίκη μπορεί να ταξιδέψει στην Αθήνα με τρένο (Τ) ή λεωφορείο (Λ) ή αεροπλάνο (Α) ή πλοίο (Π) και από την Αθήνα στο Ηράκλειο με πλοίο ή αεροπλάνο. Ενδιαφερόμαστε για τους διαφορετικούς τρόπους ως προς το ταξιδιωτικό μέσο με τους οποίους μπορεί να πάει κάποιος από τη Θεσσαλονίκη στο Ηράκλειο.

Το ταξίδι λοιπόν γίνεται σε δύο φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η μετάβαση από τη Θεσσαλονίκη στην Αθήνα και η δεύτερη από την Αθήνα στο Ηράκλειο. Η πρώτη φάση του ταξιδιού μπορεί να γίνει με 4 τρόπους και η δεύτερη με 2 τρόπους. Σε κάθε τρόπο της πρώτης φάσης αντιστοιχούν οι δύο τρόποι της δεύτερης φάσης. Άρα το ταξίδι Θεσσαλονίκη-Ηράκλειο μπορεί να γίνει με
$4 \cdot 2 = 8$ διαφορετικούς τρόπους.
Τα παραπάνω φαίνονται παραστατικά στο επόμενο δεντροδιάγραμμα:



Γενικά ισχύει η επόμενη **βασική αρχή απαρίθμησης:**

Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ν διαδοχικές φάσεις $φ_1$, $φ_2$, ..., $φ_ν$. Αν η φάση $φ_1$ μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_1$ τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φάση $φ_2$ μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_2$ τρόπους, ..., και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φάση $φ_ν$ μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_ν$ τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_1 \cdot κ_2 \cdot ... \cdot κ_ν$ τρόπους.

Επομένως, αν με μια διαδικασία η οποία πραγματοποιείται όπως ορίστηκε προηγουμένως, στην πρώτη φάση

συμπληρώνεται το πρώτο στοιχείο μιας διατεταγμένης ν-άδας με $κ_1$ τρόπους, στη δεύτερη φάση το δεύτερο στοιχείο με $κ_2$ τρόπους , ..., στη ν-οστή φάση το ν-στό στοιχείο με $κ_ν$, τότε σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης μπορούν να σχηματισθούν $κ_1 \cdot κ_2 \cdot ... \cdot κ_ν$ διαφορετικές διατεταγμένες ν-άδες.

Διατάξεις

Ας υποθέσουμε ότι μία επιτροπή με 5 μαθητές συνεδριάζει για να εκλέξει πρόεδρο, γραμματέα, και ταμία. Αν θέλουμε να βρούμε το πλήθος των διαφορετικών τριάδων που θα εκλεγούν για τις τρεις θέσεις σκεπτόμαστε ως εξής:

1η θέση	2η θέση	3η θέση
5 τρόποι	4 τρόποι	3 τρόποι

Η διαδικασία εκλογής μπορεί να χωριστεί σε τρεις φάσεις: 1η φάση εκλογή προέδρου, 2η φάση εκλογή γραμματέα και 3η φάση εκλογή ταμία. Η 1η φάση μπορεί να γίνει με 5 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής. Η 2η φάση μπορεί να γίνει με 4 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής που απέμειναν ύστερα από την εκλογή του προέδρου. Η 3η φάση μπορεί να

γίνει με 3 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής που απέμειναν ύστερα και από την εκλογή του ταμία. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος των διαφορετικών δυνατών τριάδων είναι $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
Καθεμιά από τις παραπάνω τριάδες λέγεται **διάταξη** των 5 ανά 3.

Γενικά:

Διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ, με κ≤ν, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε κ διαφορετικά στοιχεία του Α και να τα βάλουμε σε μια σειρά.

Το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ συμβολίζεται με Δ_κ^ν και αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ότι:

$$\Delta_\kappa^\nu = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\kappa+1) \qquad (1)$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δύο διατάξεις των ν ανά κ είναι διαφορετικές αν διαφέρουν ως προς ένα τουλάχιστον στοιχείο ή ως προς τη θέση που κατέχουν τα στοιχεία. Για παράδειγμα, οι διατάξεις (1, 2, 3), (1, 4, 3) και (3, 2, 1) είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Στην περίπτωση που πάρουμε και τα ν στοιχεία ενός συνόλου Α και τα βάλουμε σε μια σειρά, τότε έχουμε μια διάταξη των ν στοιχείων ανά ν η οποία λέγεται **μετάθεση** των ν στοιχείων. Το πλήθος $Δ_κ^ν$ των μεταθέσεων των ν στοιχείων συμβολίζεται με $M_ν$ και σύμφωνα με τον τύπο (1) είναι

$$M_ν = ν(ν - 1)(ν - 2)...3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Το γινόμενο $1 \cdot 2 \cdot 3...(ν - 2)(ν - 1)ν$ συμβολίζεται με ν! και διαβάζεται **ν παραγοντικό**. Επομένως

$$\boxed{M_ν = ν!} \qquad (2)$$

Έτσι, αν στο προηγούμενο παράδειγμα θέλουμε να βάλουμε τους 5 μαθητές σε μια σειρά, τότε υπάρχουν $M_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τους τοποθετήσουμε

Αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο του παραγοντικού για να εκφράσουμε το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ με κ < ν έχουμε:

$$Δ_κ^ν = ν(ν - 1)(ν - 2)...(ν - κ + 1) =$$

$$= \frac{ν(ν - 1)(ν - 2)...(ν - κ + 1)(ν - κ)(ν - κ - 1)...3 \cdot 2 \cdot 1}{(ν - κ)(ν - κ - 1)...3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{ν!}{(ν - κ)!}.$$

Επομένως

$$\Delta_\kappa^\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} \qquad (3)$$

Αν τώρα θέλουμε ο τύπος (3) να ισχύει και για $\kappa = \nu$, επειδή $\Delta_\kappa^\nu = M_\nu = \nu!$, πρέπει $\frac{\nu!}{0!} = \nu!$. Είναι λοιπόν λογικό να ορίσουμε $0! = 1$.

Συνδυασμοί

Ας υποθέσουμε ότι από 5 άτομα Α, Β, Γ, Δ και Ε θέλουμε να επιλέξουμε μια ομάδα 3 ατόμων, χωρίς να μας ενδιαφέρει η κατάταξη μέσα σ' αυτήν την ομάδα. Αν x είναι ο αριθμός των διαφορετικών ομάδων που μπορούμε να επιλέξουμε, τότε από κάθε τέτοια ομάδα μπορούν να προκύψουν 3! διατεταγμένες ομάδες. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των διατεταγμένων ομάδων θα είναι 3!x. Ο αριθμός αυτός όμως είναι το πλήθος των διατάξεων Δ_3^5. Επομένως, θα είναι $\Delta_3^5 = 3!x$, οπότε

$$x = \frac{\Delta_3^5}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10.$$

Πιο συγκεκριμένα οι ομάδες αυτές θα είναι:

{Α, Β, Γ}, {Α, Β, Δ}, {Α, Β, Ε}, {Α, Γ, Δ}, {Α, Γ, Ε}, {Α, Δ, Ε}, {Β, Γ, Δ}, {Β, Γ, Ε}, {Β, Δ, Ε} και {Γ, Δ, Ε}. Κάθε τέτοια επιλογή λέγεται **συνδυασμός** των 5 ανά 3.

Γενικά:

Συνδυασμός των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ λέγεται κάθε υποσύνολο του Α με κ στοιχεία.

Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά κ συμβολίζεται με $\binom{\nu}{\kappa}$ και αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ότι

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\Delta^{\nu}_{\kappa}}{\kappa!} = \frac{\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}}{\kappa!} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}.$$

Επομένως,

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}.$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δύο συνδυασμοί των ν ανά κ είναι διαφορετικοί αν διαφέρουν κατά ένα τουλάχιστον στοιχείο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Στο τυχερό παιχνίδι του ΠΡΟΠΟ συμπληρώνουμε καθεμιά από τις 13 θέσεις με ένα από τα στοιχεία 1, 2, Χ που αντιστοιχούν σε πρόβλεψη: νίκης της γηπεδούχου ομάδας (1), νίκης της φιλοξενούμενης ομάδας (2), ισοπαλίας (Χ).

i) Να προσδιοριστεί το πλήθος των διαφορετικών στηλών που μπορούμε να συμπληρώσουμε.

ii) Αν συμπληρώσουμε τυχαία μια στήλη ΠΡΟΠΟ, να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων
Α: "να πιάσουμε ακριβώς 12 αγώνες".
Β: "να πιάσουμε ακριβώς 11 αγώνες".

ΛΥΣΗ

i) Μια στήλη ΠΡΟΠΟ είναι μια 13-άδα, στην οποία κάθε θέση μπορεί να συμπληρωθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, υπάρχουν συνολικά

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \ldots 3}_{13 \text{ παράγοντες}} = 3^{13} = 1.594.323 \text{ διαφορετικές στήλες.}$$

ii) • Ευνοϊκή περίπτωση για το Α είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά από τις 12 θέσεις συμπληρώνεται με

το σωστό αποτέλεσμα και η εναπομένουσα θέση συμπληρώνεται με λαθεμένη πρόβλεψη. Υπάρχουν $\binom{13}{11}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους 12 αγώνες που συμπληρώνονται με το σωστό αποτέλεσμα, και 2 τρόποι για να συμπληρώσουμε τον αγώνα που απομένει με λάθος πρόβλεψη.

Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το Α είναι $N(A) = \binom{13}{12} \cdot 2$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{13}{12} \cdot 2}{3^{13}} = \frac{13 \cdot 2}{3^{13}} = \frac{26}{3^{13}} \approx 0{,}000016.$$

- **Ευνοϊκή περίπτωση για το Β είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά από τις 11 θέσεις συμπληρώνεται με το σωστό αποτέλεσμα και καθεμιά από τις υπόλοιπες 2 θέσεις συμπληρώνεται με μια λαθεμένη πρόβλεψη.**

Υπάρχουν $\binom{13}{11}$ τρόποι για να επιλέξουμε τις 11 θέσεις

με το σωστό αποτέλεσμα και 2 τρόποι για να συμπληρώσουμε καθεμιά από τις υπόλοιπες 2 θέσεις με λαθεμένη πρόβλεψη. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το Β είναι $N(B) = \binom{13}{11} \cdot 2 \cdot 2$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{13}{11} \cdot 2 \cdot 2}{3^{13}} = \frac{312}{3^{13}} \approx 0,000196.$$

2. **Στο τυχερό παιχνίδι του ΛΟΤΤΟ "6 από 49", αν παίξουμε μια στήλη, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: "να πετύχουμε 4 ακριβώς σωστά νούμερα";**

ΛΥΣΗ

Επειδή τελικά δεν έχει σημασία η σειρά κλήρωσης του κάθε αριθμού, οι δυνατές περιπτώσεις του πειράματος είναι τόσες όσοι και οι συνδυασμοί των 49 ανά 6, δηλαδή $N(\Omega) = \binom{49}{6}$.

Για να βρούμε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων σκεφτόμαστε ως εξής:

Υπάρχουν $\binom{6}{4}$ τρόποι για να επιλέξουμε 4 σωστά νούμερα από τα 6 που κληρώθηκαν. Στη συνέχεια μένουν $\binom{49-6}{6-4} = \binom{43}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα 2 λάθος νούμερα. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι $N(A) = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}$. Άρα

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13545}{13983816} \approx 0{,}000969 \text{ ή } 1‰ \text{ περίπου.}$$

3. Ποια είναι η πιθανότητα μεταξύ κ μαθητών (κ ≤ 365) δύο τουλάχιστον να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα; (Ο χρόνος υπολογίζεται με 365 μέρες).

ΛΥΣΗ

Αν Α είναι το ενδεχόμενο “δύο τουλάχιστον μαθητές να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα”, τότε Α′ είναι το ενδεχόμενο “οι κ μαθητές να έχουν γενέθλια σε διαφορετικές

μέρες” και ισχύει $P(A) = 1 - P(A')$. Επομένως ο υπολογισμός της $P(A)$ ανάγεται στον υπολογισμό της $P(A')$.
Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων του πειράματος είναι $N(\Omega) = 365 \cdot 365 \cdot 365 ... 365 = 365^{\kappa}$, αφού ένας μαθητής μπορεί να έχει γεννηθεί σε μια από τις 365 μέρες του έτους. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το A' είναι
$365 \cdot (365 - 1) \cdot (365 - 2) ... [(365 - (\kappa - 1)]$, αφού οι κ μαθητές πρέπει να έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές μέρες του έτους.

Επομένως,

$$P(A') = \frac{365 \cdot (365 - 1) \cdot (365 - 2) ... (365 - \kappa + 1)}{365^{\kappa}} =$$

$$= \frac{365 \cdot 364 ... (365 - \kappa + 1)}{365^{\kappa}}.$$

Άρα $$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 ... (365 - \kappa + 1)}{365^{\kappa}}.$$

Οι τιμές του $P(A)$ για μερικές τιμές του κ δίνονται στον επόμενο πίνακα:

κ	10	20	23	30	60	70
P(A)	0,117	0,411	0,507	0,706	0,994	0,999

Παρατηρούμε ότι ήδη μεταξύ 23 ατόμων η πιθανότητα δύο άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα είναι μεγαλύτερη από 50%, ενώ μεταξύ 70 ατόμων το ενδεχόμενο αυτό είναι σχεδόν βέβαιο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν κάποιος διαθέτει 3 σακάκια, 4 παντελόνια, 5 πουκάμισα, 10 ζευγάρια κάλτσες και 2 ζευγάρια παπούτσια, με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας από όλα τα είδη; Ποια είναι η πιθανότητα να φοράει ένα ορισμένο σακάκι;

2. Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας μπορούμε να κατασκευάσουμε που να περιέχουν στη σειρά τρία κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από έναν τετραψήφιο αριθμό; Ποια είναι η πιθανότητα μια τέτοια πινακίδα να αρχίζει με φωνήεν και να τελειώνει σε άρτιο ψηφίο;

22-0088_I_c_math_bm_137-192_18b.indd 61 22/08/2017 11:32

3. **Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 4 άτομα σε 6 θέσεις μιας σειράς; Ποιά είναι η πιθανότητα η τελευταία θέση να μείνει κενή;**

4. **Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά 4 αγόρια και 3 κορίτσια; Ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια;**

5. **Να αποδείξετε ότι** $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}$.

6. **Σε έναν κύκλο δίνονται 8 σημεία** $A_1, A_2, \ldots, A_8$. **Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα σημεία αυτά; Ποια είναι η πιθανότητα ένα από τα παραπάνω τμήματα που επιλέγεται τυχαία να μη διέρχεται από το σημείο** A_1**;**

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **Με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 φτιάχνουμε τετραψήφιους αριθμούς στους οποίους το κάθε ψηφίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερο από**

μια φορά. Αν πάρουμε τυχαία έναν τέτοιο αριθμό, ποια είναι η πιθανότητα να έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά;

2. Από το σύνολο των μεταθέσεων των στοιχείων 1, 2, 3, …, ν επιλέγουμε τυχαίως μία. Να βρείτε ποια είναι η πιθανότητα να μην αρχίζει από 1.

3. Δέκα παιδιά, μεταξύ των οποίων ο Κώστας και η Ελένη, θα καθίσουν τυχαία ο ένας δίπλα στον άλλον σε δέκα θέσεις. Ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστας και η Ελένη να καθίσουν σε διπλανές θέσεις;

4. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου τέσσερα άτομα να έχουν γεννηθεί σε τέσσερις διαφορετικές εποχές του έτους.

5. Από ένα σύλλογο καθηγητών με 7 άνδρες και 6 γυναίκες επιλέγουμε τυχαίως 4 άτομα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
i) τα άτομα να είναι γυναίκες
ii) ένα τουλάχιστον να είναι άνδρας
iii) να υπάρχει μία μόνο γυναίκα.

6. Ένα κουτί περιέχει 20 ηλεκτρικές ασφάλειες, από τις οποίες οι 5 είναι ελαττωματικές. Επιλέγουμε τυχαίως 4 ασφάλειες και τις δοκιμάζουμε. Αν βρεθούν περισσότερες από μία ελαττωματικές, το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου το κουτί να γίνει αποδεκτό.

7. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$. Στην $ε_1$ ορίζουμε 10 σημεία και στην $ε_2$ 20 σημεία. Πόσα τρίγωνα ορίζουν τα σημεία αυτά; Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα τέτοιο τρίγωνο, ποια είναι η πιθανότητα να έχει μία πλευρά του στην $ε_1$;

8. Ρίχνουμε ένα νόμισμα ν φορές. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να μη φέρουμε σε δύο διαδοχικές ρίψεις ίδιο αποτέλεσμα.

9. Ο υπάλληλος ενός χώρου στάθμευσης δίνει τυχαία τα τρία κλειδιά αυτοκινήτων στους τρεις κατόχους των αυτοκινήτων αυτών. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: “Κάθε οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί”

Β: “Μόνο ένας οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί”

Γ: “Κανένας οδηγός να μην πάρει το δικό του κλειδί”.

10. Από μια τάξη στην οποία φοιτούν 10 κορίτσια και 12 αγόρια επιλέγονται στην τύχη τρία άτομα για να εκπροσωπήσουν την τάξη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα τα επιλεγμένα άτομα να είναι του ίδιου φύλου.

11. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε τουλάχιστον ένα “έξι” σε 4 ρίψεις ενός ζαριού και να τη συγκρίνετε με την πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον μια φορά “εξάρες” σε 24 ρίψεις δύο ζαριών.

3.4 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ - ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Για το διοικητικό συμβούλιο μιας επιχείρησης θα εκλεγεί ένας αντιπρόσωπος. Υποψήφιοι είναι 7 άνδρες και

8 γυναίκες. Από τους υποψηφίους 3 άνδρες και 6 γυναίκες είναι διοικητικοί υπάλληλοι, ενώ 4 άνδρες και 2 γυναίκες είναι τεχνικοί υπάλληλοι. Σύμφωνα με αυτά τα δεδομένα οι υποψήφιοι μπορούν να ταξινομηθούν στον ακόλουθο πίνακα ως εξής:

	Διοικητικός	Τεχνικός	Άθροισμα γραμμής
Άνδρας	3	4	7
Γυναίκα	6	2	8
Άθροισμα στήλης	9	6	15

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

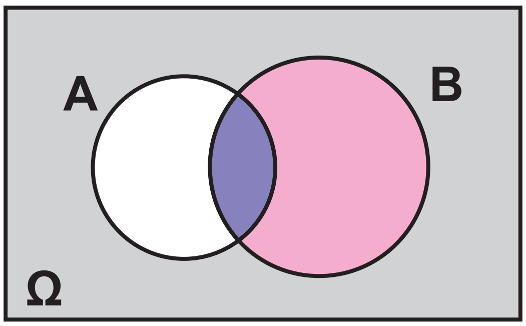
A: “Να εκλεγεί διοικητικός”

B: “Να εκλεγεί γυναίκα”.

Με την παραδοχή ότι τα 15 στοιχεία του δειγματικού χώρου είναι ισοπίθανα, έχουμε

$$P(A) = \frac{9}{15} \text{ και } P(B) = \frac{8}{15}.$$

Ύστερα από την εκλογή και πριν από την ανακοίνωση του αποτελέσματος έγινε γνωστό ότι εκλέγεται γυναίκα. Αυτό συνεπάγεται ότι ο αντιπρόσωπος θα είναι μία από τις 8 γυναίκες και επομένως η πιθανότητα να εκλεγεί διοικητικός γίνεται $\frac{6}{8}$. Αυτή λοιπόν είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου: “Να εκλεγεί διοικητικός με δεδομένο ότι έχει ήδη εκλεγεί γυναίκα”. Το ενδεχόμενο αυτό συμβολίζεται με $A|B$ και η πιθανότητα του $P(A|B)$ λέγεται **δεσμευμένη πιθανότητα** του A με δεδομένο το B, δηλαδή $P(A|B) = \frac{6}{8} \neq P(A)$. Ομοίως βρίσκουμε ότι $P(B|A) = \frac{6}{9} \neq P(B)$.



Γενικά, έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(B) > 0$. Ας υποθέσουμε ότι ζητάμε την πιθανότητα του A με δεδομένο ότι το B έχει ήδη πραγματοποιηθεί.

Αφού έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B, η απλή λογική μας λέει ότι πρέπει να περιοριστούμε στα στοιχεία του B και από αυτά να βρούμε ποια είναι τα ευνοϊκά για το A. Με άλλα λόγια η πληροφορία για την πραγματοποίηση του B περιορίζει το δειγματικό χώρο Ω στο

22-0088_I_c_math_bm_137-192_18b.indd 67 22/08/2017 11:32

Β και το ενδεχόμενο Α στο $A \cap B$.

Επομένως, αν υποθέσουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα αποτελέσματα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A\,|\,B) = \frac{N(A\cap B)}{N(B)} = \frac{\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}}{\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ .$$

Η πιθανότητα αυτή λέγεται **δεσμευμένη πιθανότητα του Α με δεδομένο το Β.**

Γενικά:

Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος και $P(B) > 0$, τότε ο λόγος $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ λέγεται δεσμευμένη πιθανότητα του Α με δεδομένο το Β και συμβολίζεται με $P(A|B)$. Δηλαδή:

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ .$$

Ομοίως, αν $P(A) > 0$, τότε $P(B\,|\,A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα η πιθανότητα να εκλεγεί διοικητικός με δεδομένο ότι έχει εκλεγεί γυναίκα είναι:

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{6}{8} \text{ και}$$

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{6}{9}.$$

Άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι ότι

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Οι παραπάνω ισότητες εκφράζουν τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων.

22-0088_I_c_math_bm_137-192_18b.indd 69 22/08/2017 11:32

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

Στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε ότι η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου Α, με δεδομένο ότι το ενδεχόμενο Β έχει ήδη πραγματοποιηθεί, είναι $P(A|B) = \frac{6}{8}$, ενώ $P(A) = \frac{9}{15}$. Δηλαδή, $P(A|B) \neq P(A)$.

Με άλλα λόγια η πραγματοποίηση του Β επηρέασε την πιθανότητα πραγματοποίησης του Α.

Υπάρχουν όμως και ενδεχόμενα στα οποία η πληροφορία για την πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου. Για παράδειγμα, αν στο πείραμα της ρίψης δύο ζαριών θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα Α: “Το πρώτο ζάρι να φέρει 1” και Β: “Το δεύτερο ζάρι να φέρει άρτιο”, έχουμε:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},\ P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{3}{36}.$$

Επομένως, $P(A|B) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ **και** $P(B|A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι $P(A|B) = P(A)$ και

$P(B|A) = P(B)$. Γι’ αυτό λέμε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα. Γενικά:

22-0088_I_c_math_bm_137-192_18b.indd 70 22/08/2017 11:32

Δύο ενδεχόμενα Α και Β με $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$ λέγονται ανεξάρτητα, αν και μόνον αν $P(A|B) = P(A)$ και $P(B|A) = P(B)$.

Λαμβάνοντες υπόψη τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων συμπεραίνουμε ότι για δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα έχουμε $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Η ισότητα αυτή χρησιμοποιείται και ως ορισμός των ανεξάρτητων ενδεχομένων, χωρίς μάλιστα τον περιορισμό $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$. Δηλαδή:

Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ανεξάρτητα, αν

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Δύο ενδεχόμενα που δεν είναι ανεξάρτητα λέγονται εξαρτημένα.

ΣΧΟΛΙΟ

Με την ισότητα $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ μπορούμε να διαπιστώσουμε αν δύο ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα. Στην πράξη, όμως, η ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων ή ισχύει από μόνη της, λόγω της φύσης του πειράματος ή έχει περιληφθεί στις υποθέσεις κατασκευής του μοντέλου που περιγράφει κάποια φαινόμενα.

Για παράδειγμα, είναι εύλογο να δεχτούμε ότι είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα Α: “ο συμπλέκτης του αυτοκινήτου είναι σε καλή κατάσταση” και Β: “η μπαταρία του αυτοκινήτου είναι σε καλή κατάσταση”.

Αντιθέτως, είναι λάθος να δεχτούμε ως ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα

Α: “ Ένα άτομο είναι μανιώδης καπνιστής” και Β: “ Ένα άτομο θα προσβληθεί από ασθένεια των πνευμόνων”.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Για την ασφαλή πτήση ενός αεροπλάνου με δύο κινητήρες, πρέπει να δουλεύει ο ένας τουλάχιστον κινητήρας. Οι κινητήρες δουλεύουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Αν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να πάθει κάποιος κινητήρας βλάβη είναι 0,003, να βρεθεί η πιθανότητα για μια ασφαλή πτήση.**

ΛΥΣΗ

Το αεροπλάνο δεν εκτελεί ασφαλή πτήση, όταν πάθουν βλάβη και οι δύο κινητήρες. Επειδή οι κινητήρες λειτουργούν ανεξαρτήτως ο ένας από τον άλλον, η πιθανότητα να πάθουν βλάβη και οι δύο συγχρόνως είναι

ίση με $0{,}003 \cdot 0{,}003$. Άρα, η πιθανότητα μιας ασφαλούς πτήσης είναι ίση με

$$1 - 0{,}003 \cdot 0{,}003 = 0{,}999991 \text{ δηλαδή } 99{,}9991\%.$$

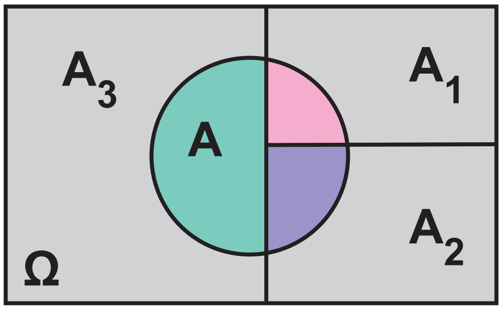
2. Από τρεις όμοιες μηχανές ενός εργοστασίου η πρώτη (I) παράγει το 20%, η δεύτερη (II) το 30% και η τρίτη (III) το 50% της συνολικής παραγωγής ενός εξαρτήματος. Επιπλέον, το 5% της παραγωγής της μηχανής I, το 4% της II και το 2% της III είναι ελαττωματικά εξαρτήματα. Δύο ερωτήσεις του λεγόμενου ποιοτικού ελέγχου είναι οι εξής:

i) Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα εξάρτημα σε ένα κατάστημα πωλήσεων ποια είναι η πιθανότητα να είναι ελαττωματικό;

ii) Αν ένα εξάρτημα που επιλέχθηκε τυχαία είναι ελαττωματικό, ποια είναι η πιθανότητα να προέρχεται από τη μηχανή I;

ΛΥΣΗ

Αν A_1, A_2 και A_3 είναι τα ενδεχόμενα το επιλεγμένο εξάρτημα να προέρχεται από τις μηχανές I, II και III αντιστοίχως, τότε $P(A_1) = 0{,}2$, $P(A_2) = 0{,}3$ και $P(A_3) = 0{,}5$. Τα A_1, A_2 και A_3 είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους και επιπλέον $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$.



Αν Α είναι το ενδεχόμενο το επιλεγμένο εξάρτημα να είναι ελαττωματικό, τότε

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup (A \cap A_3)$$

και

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3).$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε $P(A|A_1) = 0{,}05$, $P(A|A_2) = 0{,}04$ και $P(A|A_3) = 0{,}02$. Επομένως:

i) Από την (1) και τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A|A_1) + P(A_2)\, P(A|A_2) + P(A_3)\, P(A|A_3) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}032.$$

ii) Ζητάμε την πιθανότητα $P(A_1|A)$. Έχουμε

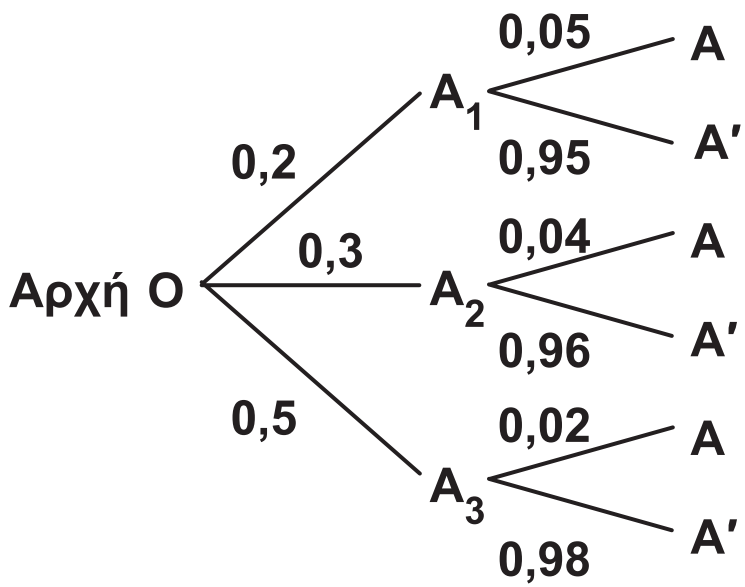
$$P(A_1 \mid A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid A_1) \cdot P(A_1)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{0{,}032} =$$

$$= \frac{0{,}01}{0{,}032} = 0{,}3125,$$

δηλαδή, 31,25%.

Η λύση προβλημάτων όπως το προηγούμενο, διευκολύνεται με τη βοήθεια ενός δεντροδιαγράμματος, όπως φαίνεται στο σχήμα:

Προέλευση εξαρτήματος	Ποιότητα εξαρτήματος	Αποτέλεσμα	Πιθανότητα αποτελέσματος



Αποτέλεσμα	Πιθανότητα αποτελέσματος
• $A_1 \cap A$	$0{,}2 \cdot 0{,}05$
$A_1 \cap A'$	$0{,}2 \cdot 0{,}95$
• $A_2 \cap A$	$0{,}3 \cdot 0{,}04$
$A_2 \cap A'$	$0{,}3 \cdot 0{,}96$
• $A_3 \cap A$	$0{,}5 \cdot 0{,}02$
$A_3 \cap A'$	$0{,}5 \cdot 0{,}98$

Οι κλάδοι OA_1, OA_2 και OA_3 αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα προέλευσης του εξαρτήματος από τις μηχανές I, II και III αντιστοίχως, και οι αντίστοιχες πιθανότητες των ενδεχομένων αυτών είναι γραμμένες πάνω στους κλάδους. Από το τέλος κάθε τέτοιου κλάδου ξεκινούν δύο άλλοι κλάδοι, που αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα το εξάρτημα να είναι ελαττωματικό ή μη ελαττωματικό με γραμμένες πάλι επάνω τους τις αντίστοιχες πιθανότητες.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα (i) επισημαίνουμε πρώτα τις διαδρομές που οδηγούν σε ελαττωματικό εξάρτημα.

Οι διαδρομές αυτές είναι οι OA_1A, OA_2A και OA_3A και αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα $A_1 \cap A$, $A_2 \cap A$ και $A_3 \cap A$.

Στη συνέχεια με εφαρμογή του πολλαπλασιαστικού νόμου των πιθανοτήτων υπολογίζουμε τις πιθανότητες των ενδεχομένων αυτών. Έχουμε

$P(A_1 \cap A) = 0{,}2 \cdot 0{,}05$, $P(A_2 \cap A) = 0{,}3 \cdot 0{,}04$

και $P(A_3 \cap A) = 0{,}5 \cdot 0{,}02$.

Τέλος, επειδή τα ενδεχόμενα που παριστάνουν οι διαδρομές είναι ασυμβίβαστα, προσθέτουμε τις παραπάνω πιθανότητες και βρίσκουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου A. Επομένως

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}032.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Στο δεύτερο ερώτημα της παραπάνω εφαρμογής γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του πειράματος και ζητάμε την πιθανότητα να προέρχεται το εξάρτημα από τη μηχανή Ι. Η πιθανότητα αυτή $P(A_1|A)$ λέγεται "εκ των υστέρων (a posteriori) πιθανότητα", ενώ η $P(A_1)$ λέγεται "εκ των προτέρων (a priori) πιθανότητα".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ρίχνει κάποιος ένα ζάρι και αναγγέλλει ότι έφερε ζυγό αριθμό. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει φέρει 6;

2. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνει κάποιος τυχαία ένα φύλλο και λέει ότι είναι "σπαθί". Ποια είναι η πιθανότητα το φύλλο να είναι φιγούρα;

3. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύουν $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και $P(A|B) = \frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(B \mid A)$ και $P(A' \cup B)$.

4. Αν $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$ και $P(A) = \frac{2}{3}$, να βρείτε την $P(B)$.

5. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε 6 στην πρώτη ρίψη και περιττό αριθμό στη δεύτερη ρίψη.

6. Ένα κουτί περιέχει 6 κόκκινες και 8 μαύρες μπάλες. Παίρνουμε από το κουτί τυχαίως μια μπάλα, σημειώνουμε το χρώμα της και την επανατοποθετούμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα.
Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου η πρώτη μπάλα να είναι μαύρη και η δεύτερη κόκκινη.

7. Τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα και ισχύουν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. Να βρείτε τις $P(B)$ και $P(A \cup B)$.

8. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύουν $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{2}{3}$ και $P(B|A) = \frac{1}{2}$.

i) Είναι τα Α και Β ανεξάρτητα; ii) Είναι τα Α και Β ξένα μεταξύ τους;

iii) Να υπολογίσετε την $P(B)$.

9. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β του δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι

$$P(A|B) + P(A'|B) = 1.$$

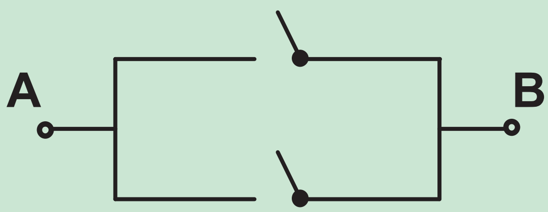
10. Σε ένα Γυμνάσιο στις εξετάσεις του Ιουνίου το 25% έγραψε στα Μαθηματικά κάτω από τη βάση, το 15% έγραψε στη Φυσική κάτω από τη βάση και το 10% των μαθητών έγραψε και στα δύο μαθήματα κάτω από τη βάση. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή του Γυμνασίου αυτού.

i) Αν έχει αποτύχει στη Φυσική, ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Μαθηματικά;

ii) Αν έχει αποτύχει στα Μαθηματικά ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στη Φυσική;

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο παρακάτω κύκλωμα “εν παραλλήλω” η πιθανότητα κάθε διακόπτης να είναι κλειστός (δηλαδή να επιτρέπει τη διέλευση ρεύματος) είναι 0,8. Οι διακόπτες λειτουργούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να διέρχεται ρεύμα από το Α στο Β.



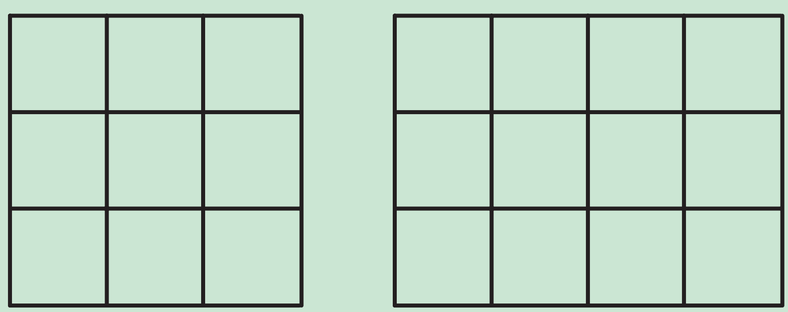
2. Η πιθανότητα να πάθει βλάβη μέσα στον πρώτο χρόνο λειτουργίας της μια μηχανή ορισμένου τύπου είναι 10%. Αν μια βιομηχανία έχει δύο τέτοιες μηχανές, οι οποίες άρχισαν να λειτουργούν συγχρόνως και ανεξάρτητα η μια από την άλλη, να βρείτε την πιθανότητα η μία μόνο να πάθει βλάβη μέσα στον πρώτο χρόνο λειτουργία τους.

3. Σε ένα νησί φτάνουν καθημερινά πλοία, που αναχωρούν από Πειραιά και Ραφήνα και σε ποσοστά 60% και 40% αντιστοίχως. Το 10% των πλοίων από Πειραιά και το 5% των πλοίων από Ραφήνα φθάνουν με καθυστέρηση στο νησί. Αν μια μέρα επιλέξουμε τυχαία ένα πλοίο που φτάνει στο νησί, να βρεθούν οι πιθανότητες:
i) Να φτάσει με καθυστέρηση ii) Αν φτάσει με καθυστέρηση, να έρχεται από Πειραιά.

4. **Σε ένα εργοστάσιο το 60% των εργαζομένων είναι άνδρες και το 40% είναι γυναίκες. Από τους άνδρες καπνίζει το 50% και από τις γυναίκες το 30%. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο που καπνίζει, ποια η πιθανότητα να είναι γυναίκα;**

5. **Μια κληρωτίδα περιέχει ν λαχνούς από τους οποίους κερδίζει μόνο ένας. Δύο άτομα παίρνουν το ένα μετά το άλλο από την κληρωτίδα ένα ακριβώς λαχνό χωρίς επανατοποθέτηση. Κάποιος υποστηρίζει ότι το πρώτο άτομο έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει από το δεύτερο. Να εξετάσετε αν έχει δίκιο.**

6. **Δύο κτήματα έχουν χωριστεί σε 9 και 12 οικόπεδα, όπως φαίνεται παρακάτω:**



Επιλέγουμε τυχαίως και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο ένα οικόπεδο από κάθε κτήμα.

i) **Ποια είναι η πιθανότητα και τα δύο οικόπεδα να είναι γωνιακά;**

ii) Ποια είναι η πιθανότητα ένα τουλάχιστον από τα οικόπεδα να είναι γωνιακό;

iii) Ποια είναι η πιθανότητα κανένα από τα οικόπεδα να μην είναι γωνιακό;

7. Το 1‰ ενός πληθυσμού πάσχει από μια σοβαρή ασθένεια. Ένα καινούργιο τεστ διάγνωσης της ασθένειας έχει πιθανότητα θετικού σφάλματος (θετικό τεστ, ενώ το άτομο είναι υγιές) 1% και πιθανότητα αρνητικού σφάλματος (αρνητικό τεστ, ενώ το άτομο πάσχει από την ασθένεια) 5%. Για ένα τυχαίο άτομο από τον πληθυσμό αυτό το τεστ είναι θετικό. Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο να πάσχει πράγματι από την ασθένεια αυτή.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, 3, ..., 100\}$. Δίνονται και οι πιθανότητες $P(\kappa) = \frac{1}{2^{\kappa}}$, $\kappa = 1, 2, 3, ..., 100$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(0)$.

2. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και Α, Β υποσύνολα του Ω. Υποθέτουμε ότι $P(A') \leq 0{,}28$ και $P(B') \leq 0{,}71$. Να αποδείξετε ότι
i) $P(A \cap B) \geq 1{,}01 - P(A \cup B)$ και ii) $A \cap B \neq \varnothing$.

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu - 1}{\kappa} + \binom{\nu - 1}{\kappa - 1}$$

4. Ένα κουτί περιέχει μπάλες όμοιες σε σχήμα και σε μέγεθος, αλλά οι κ από αυτές είναι άσπρες και οι υπόλοιπες λ είναι μαύρες. Παίρνουμε δύο μπάλες τη μια κατόπιν της άλλης και χωρίς επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας. Να βρείτε

την πιθανότητα του ενδεχομένου η 2η μπάλα να είναι μαύρη. Αν επανατοποθετήσουμε την 1η μπάλα, ποια είναι τότε η πιθανότητα η 2η μπάλα να είναι μαύρη; Τι παρατηρείτε;

5. **Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα, να αποδείξετε ότι είναι ανεξάρτητα και τα ενδεχόμενα: i) Α′ και Β   ii) Α και Β′,   iii) Α′ και Β′.**

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Αν ρίξουμε δύο νομίσματα τα αποτελέσματα μπορεί να είναι δύο “κεφαλές”, μια “κεφαλή” και μια “γράμματα”, η δύο “γράμματα”, και επομένως, καθένα από αυτά τα ενδεχόμενα έχει πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Τι είναι λάθος στο επιχείρημα αυτό; Ποιο είναι το σωστό;

2. Ένα νόμισμα ρίχνεται 5 φορές και έρχεται κάθε φορά “κεφαλή”. Επομένως, η πιθανότητα να φέρουμε “κεφαλή” σε μια ρίψη του νομίσματος είναι $\frac{5}{5}=1$. Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα αυτό.

3. Τρία συνηθισμένα ζάρια, ένα άσπρο, ένα μαύρο και ένα κόκκινο, τοποθετούνται σε ένα κουτί. Ένα πείραμα συνίσταται στην τυχαία επιλογή ενός ζαριού από το κουτί, στη ρίψη του ζαριού αυτού και στην παρατήρηση του χρώματος και της ένδειξης της άνω έδρας του.
α) Τι σημαίνει εδώ η λέξη “τυχαία”;

β) Το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου του πειράματος είναι

i) $3 \cdot 6$ ii) 3^6 iii) $6!$ iv) 6^3 v) $3 \cdot 6^3$.

(Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση)

(Σε καθεμιά από τις ερωτήσεις 4-7 μία μόνο από τις συνοδευτικές απαντήσεις είναι σωστή. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση).

4. Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι 0,4, ποια είναι η πιθανότητα της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου αυτού;

α) 0,2   β) 0,8   γ) 0,6   δ) 1,4.

5. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι τέτοια ώστε

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, ποια είναι η $P(A \cup B)$;

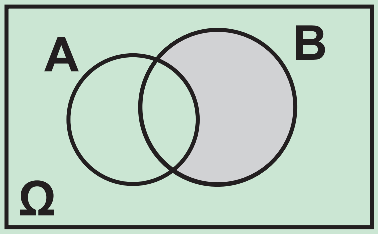
α) 1   β) $\frac{3}{4}$ γ) $\frac{1}{4}$ δ) $\frac{1}{16}$

ε) τίποτα από τα προηγούμενα.

6. Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο παρακάτω διάγραμμα Venn το σκιασμένο εμβαδόν;

22-0088_I_c_math_bm_137-192_18b.indd 87 22/08/2017 11:32

α) Β   β) Α′   γ) Α − Β   δ) Β − Α.



7. Ποιος είναι ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 2 αγόρια και 3 κορίτσια από 10 αγόρια και 8 κορίτσια;

(α) $\Delta_2^{10} \cdot \Delta_3^{8}$ (β) $\Delta_2^{10} + \Delta_3^{8}$ (γ) $\binom{10}{2} + \binom{8}{3}$

(δ) $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3}$

(Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις 8-13 είναι σωστή ή λάθος. Αν είναι σωστή, κυκλώστε το Σ, αν είναι λάθος, κυκλώστε το Λ).

8. Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους.   Σ   Λ

9. Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι αντίθετα.   Σ   Λ

10. Αν δύο ενδεχόμενα Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους, τότε και τα συμπληρωματικά τους Α′ και Β′ είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

11. Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι και ανεξάρτητα. Σ Λ

12. Δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

13. Αν δύο ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα, τότε και τα αντίθετά τους είναι ανεξάρτητα.

Σ Λ

14. Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα, με $P(A) = 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}2$. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Ι στο ίσο του της στήλης ΙΙ.

Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
$P(A \cap B)$	0,8
$P(A \cup B)$	0,6
$P(A\|B)$	0
$P(B\|A)$	0,2
	0,12

15. Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα, με $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,2$. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Ι στο ίσο του της στήλης ΙΙ.

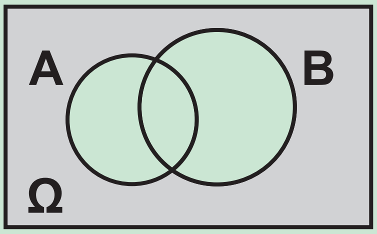
Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
$P(A \cap B)$	0,6
$P(A \cup B)$	0,68
$P(A\|B)$	0,2
$P(B\|A)$	0,12

16. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους, μπορεί να ισχύει $P(A) + P(B) = 1,3$;
-Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

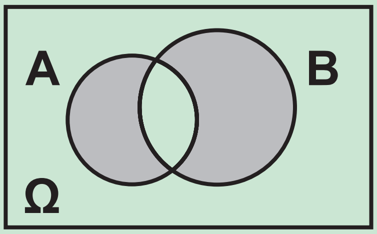
22-0088_I_c_math_bm_137-192_18b.indd 90 22/08/2017 11:32

17. **Να γράψετε με τη βοήθεια των πράξεων των συνόλων το ενδεχόμενο που παριστάνει το σκιασμένο εμβαδόν σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα Venn:**

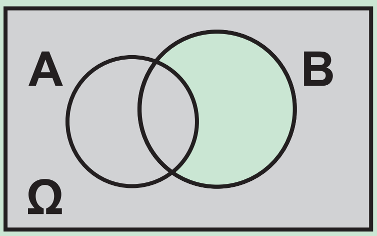
i)



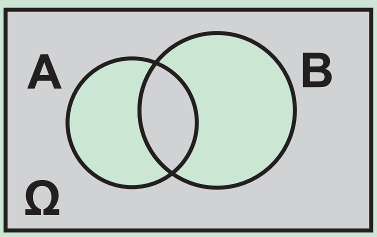
ii)



iii)



iv)



ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

§ 3.1 Α΄ Ομάδας

1-5. Να χρησιμοποιήσετε δενδροδιαγράμματα.

6. i) Ασυμβίβαστα ii) Δεν είναι ασυμβίβαστα iii) Δεν είναι ασυμβίβαστα iv) Ασυμβίβαστα.

7. {ααα, αακ, ακα, ακκ, καα, κακ, κκα, κκκ}.

§ 3.1 Β΄ Ομάδας

1. Ω = {αα, αβα, αββ, βαα, βαβ, ββ}.

2. Να βρείτε το δειγματικό χώρο και τα ενδεχόμενα με τη βοήθεια πίνακα διπλής εισόδου.

3. Αν $x \in B'$, τότε $x \notin B$ κτλ.

4. Να χρησιμοποιήσετε διαγράμματα Venn.

§ 3.2 Α΄ Ομάδας

1. i) $\frac{1}{13}$ ii) $\frac{12}{13}$.

2. $\frac{1}{4}$.

3. i) $\frac{15}{40}$ ii) $\frac{25}{40}$ iii) $\frac{25}{40}$.

4. $\frac{9}{30}$.

5. i) $\frac{3}{11}$ ii) $\frac{8}{11}$.

6. i) 50% ii) 30%.

7. $\frac{11}{30}$.

8. $\frac{2}{3}$.

9. 0,4.

10. $\frac{3}{4}$.

11. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$ κτλ.

12. 65%.

13. α) 14% β) 12%.

14. 10%.

§ 3.2 Β΄ Ομάδας

1. i) $\kappa + \lambda - \mu$ ii) $1 - \kappa - \lambda + \mu$ iii) $\kappa + \lambda - 2\mu$.
2. 55%.
3. $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}$.
4. Αν $P(A) = x$, τότε $P(A') = 1 - x$ κτλ.
5. Να λάβετε υπόψη ότι $A \cap B \subseteq A$ και $P(A \cup B) \leq 1$.
6. Να λάβετε υπόψη ότι $P(A') = 1 - P(A)$ και $P(A \cup B) \leq 1$.

§ 3.3 Α΄ Ομάδας

1. 1200, $\frac{1}{3}$.

2. 124416000, $\frac{7}{48}$.

3. 360, $\frac{1}{3}$.

4. 7!, $\frac{2}{35}$.

5. $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\kappa!}$ κτλ.

6. $\binom{8}{2}$, $\frac{3}{4}$.

§ 3.3 Β΄ Ομάδας

1. $\frac{5!}{5^4} = \frac{24}{125}$.

2. $1-\frac{1}{\nu}$.

3. $\frac{1}{5}$.

4. $\frac{3}{32}$.

5. i) $\frac{3}{143}$ ii) $\frac{140}{143}$ iii) $\frac{42}{143}$.

6. Περίπου 75%.

7. 2800, $\frac{9}{28}$.

8. $\frac{1}{2^{\nu-1}}$.

9. $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

10. $\frac{17}{77}$.

11. $1-\frac{5^4}{6^4} \approx 0{,}518,\ 1-\frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0{,}491$.

§ 3.4 Α΄ Ομάδας

1. $\frac{1}{3}$.

2. $\frac{3}{13}$.

3. $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{10}$.

4. $\frac{1}{3}$.

5. $\frac{1}{12}$.

6. $\frac{12}{49}$.

7. $\frac{4}{5}, \frac{17}{20}$.

8. i) Όχι ii) Όχι iii) $\frac{1}{4}$.

9. Να λάβετε υπόψη ότι $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

10. i) $\frac{2}{3}$ ii) $\frac{2}{5}$.

§ 3.4 Β΄ Ομάδας

1. 0,96.

2. 18%.

3. i) 8% ii) 75%.

4. $\frac{2}{7}$.

5. Όχι, έχουν ίδια πιθανότητα.

6. i) $\frac{4}{27}$ ii) $\frac{17}{27}$ iii) $\frac{10}{27}$.

7. $\frac{95}{1094} \approx 0{,}087$, δηλαδή 8,7%.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λάβετε υπόψη ότι $P(0) + P(1) + ... + P(100) = 1$.

2. i) $P(A') = 1 - P(A)$ κτλ.
   ii) Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.

3. Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο των συνδυασμών.

4. • Χωρίς επανατοποθέτηση: $\frac{\lambda}{\kappa + \lambda}$

   • Με επανατοποθέτηση: $\frac{\lambda}{\kappa + \lambda}$.

5. i) Να λάβετε υπόψη ότι
   $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

ii) Να λάβετε υπόψη ότι

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

iii) $B' = (B' \cap A) \cup (B' \cap A')$ κτλ.

Ευρετήριο Όρων

Στο Ευρετήριο όρων τα γράμματα Α, Β και Γ δηλώνουν τον 1ο, 2ο και 3ο τόμο αντίστοιχα, ενώ οι αριθμοί αναφέρονται στην πρώτη από τις δύο ενδείξεις που αναγράφονται σε κάθε σελίδα.

22-0088_I_c_math_bm_137-192_18b.indd 101 22/08/2017 11:32

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 3ου ΤΟΜΟΥ

22-0088_I_c_math_bm_137-192_18b.indd 107 22/08/2017 11:32

22-0088_I_c_math_bm_137-192_18b.indd 110 22/08/2017 11:32