

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 5ος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ:

Αδαμόπουλος Λεωνίδας

**Επ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ιν-
στιτούτου**

Δαμιανού Χαράλαμπος

**Αναπλ. Καθηγητής Παν/μίου Αθη-
νών**

Σβέρκος Ανδρέας

Σχολικός Σύμβουλος

ΚΡΙΤΕΣ:

Κουνιάς Στρατής

Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Μακρής Κωνσταντίνος

Σχολικός Σύμβουλος

Τσικαλουδάκης Γεώργιος
Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

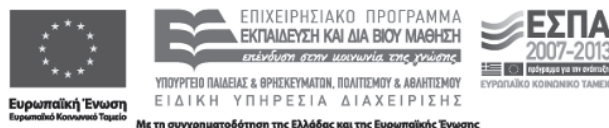
Γλωσσική Επιμέλεια:
Μπουσούνη Λία
Καθηγήτρια Β/θμιας Εκπαίδευσης

Δακτυλογράφηση:
Μπολιώτη Πόπη

Σχήματα:
Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».



Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση των προσαρμογών και η επιστημονική επιμέλεια του προσαρμοσμένου βιβλίου πραγματοποιείται από τη Μονάδα Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου για μαθητές με μειωμένη όραση από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ πραγματοποιείται με βάση τις προδιαγραφές που έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ
ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**

**ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ
ΔΑΜΙΑΝΟΥ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ
ΣΒΕΡΚΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ**

**Η συγγραφή και η επιστημονική
επιμέλεια του βιβλίου
πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα
του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 5ος

Ι.Τ.Υ.Ε. «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

3.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Εισαγωγή

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης, όπως είδαμε, είναι η αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα του πειράματος θα εμφανιστεί σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του. Επομένως, αν A είναι ένα ενδεχόμενο, δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε αν το A θα πραγματοποιηθεί ή όχι. Γι' αυτό είναι χρήσιμο να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ενδεχόμενο A έναν αριθμό, που θα είναι ένα μέτρο της “προσδοκίας” με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίησή του.

Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε πιθανότητα του A και τον συμβολίζουμε με $P(A)$. Πώς όμως θα προσδιορίσουμε για κάθε ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης την πιθανότητά του; Δηλαδή πώς θα βρούμε μια διαδικασία με την οποία σε κάθε ενδεχόμενο θα αντιστοιχίζουμε την πιθανότητά του; Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά.

Έννοια και Ιδιότητες Σχετικής Συχνότητας

Αν σε n εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται k φορές, τότε ο λόγος $\frac{k}{n}$ ονομάζεται σχετική συχνότητα του A και συμβολίζεται με f_A . Ιδιαίτερα αν ο

δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\lambda\}$ και σε v εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_\lambda\}$ πραγματοποιούνται $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_\lambda$ φορές αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες

$$f_1 = \frac{\kappa_1}{v}, f_2 = \frac{\kappa_2}{v}, \dots, f_\lambda = \frac{\kappa_\lambda}{v} \text{ των}$$

απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

$$1. 0 \leq f_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, \lambda$$

(αφού $0 \leq \kappa_i \leq v$)

$$2. f_1 + f_2 + \dots + f_\lambda =$$

$$= \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_\lambda}{v} = \frac{v}{v} = 1.$$

Ας εκτελέσουμε τώρα το ακόλουθο πείραμα: Ρίχνουμε ένα συμμετρικό

και ομογενές νόμισμα και σημειώ-
νουμε με K το αποτέλεσμα “κεφα-
λή” και με Γ το αποτέλεσμα “γράμ-
ματα”.

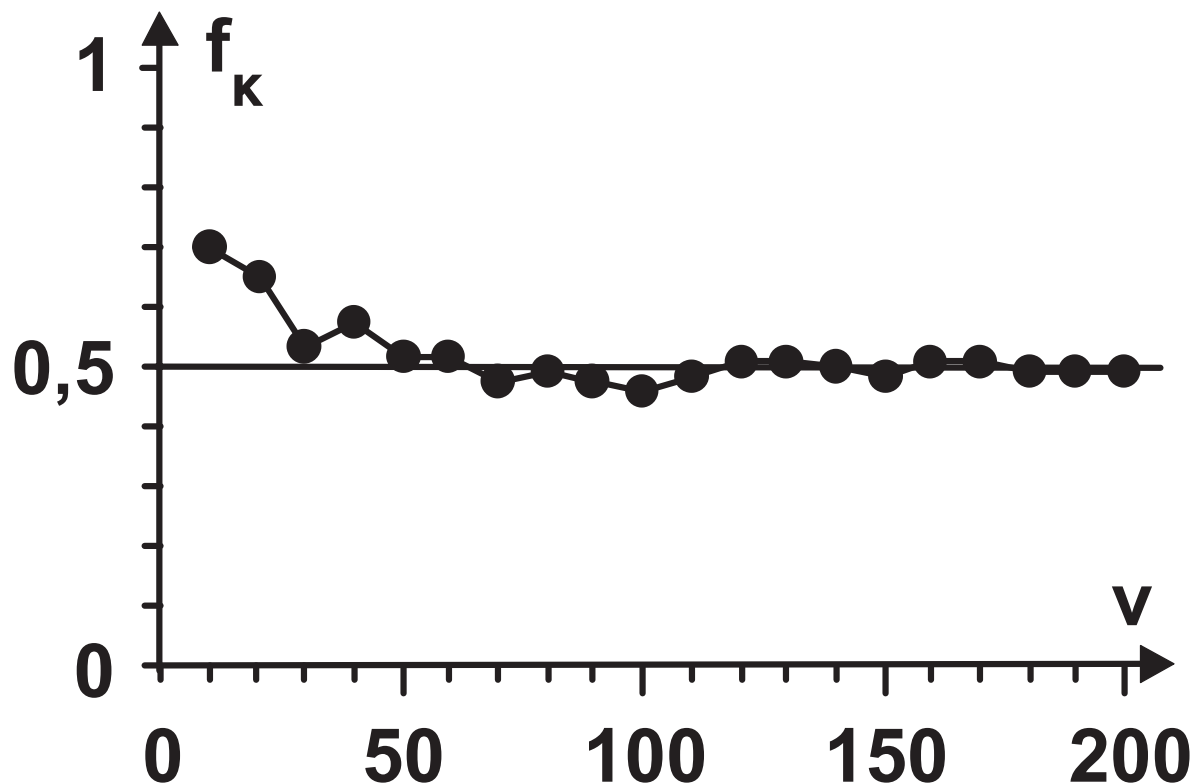
Στον παρακάτω πίνακα αναφέρο-
νται το πλήθος των K και οι αντί-
στοιχες σχετικές συχνότητες στις
10, 20, 30, ..., 200 ρίψεις του νομί-
σματος ενώ στο σχήμα 1 παριστά-
νεται το αντίστοιχο διάγραμμα σχε-
τικών συχνοτήτων.

Πίνακας ρίψεων ενός νομίσματος		
v	K	f_K
10	7	0,700
20	13	0,650
30	16	0,533
40	23	0,575
50	26	0,520

**Πίνακας
ρίψεων ενός νομίσματος**

v	κ	f_{κ}
60	31	0,517
70	33	0,471
80	39	0,488
90	43	0,478
100	46	0,460
110	53	0,482
120	61	0,508
130	66	0,508
140	70	0,500
150	73	0,486
160	81	0,506
170	87	0,512
180	89	0,494
190	93	0,489
200	99	0,495

Διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων



Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός v των ρίψεων η σχετική συχνότητα f_k εμφάνισης της “κεφαλής” σταθεροποιείται γύρω από την τιμή $0,5$ ή, όπως λέμε “τείνει” στον αριθμό $0,5$. Αυτό επιβεβαιώνει

την “προσδοκία” μας ότι στη ρίψη ενός συμμετρικού και ομογενούς νομίσματος ή, όπως λέμε, ενός “αμερόληπτου” νομίσματος, οι σχετικές συχνότητες των ενδεχομένων $\{K\}$, $\{\Gamma\}$ είναι ίσες. Ανάλογα παραδείγματα μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται **στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών.**

Θα προσπαθήσουμε τώρα στηριζόμενοι στις προηγούμενες διαπιστώσεις να ορίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση του αμερόληπτου νομίσματος. Ρίχνουμε ένα τέτοιο νόμισμα και παρατηρούμε την όψη που θα εμφανιστεί. Όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα $\{Κ\}$, $\{Γ\}$ τείνει στον αριθμό $\frac{1}{2}$. Ομοίως θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε ότι στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ και $\{6\}$ τείνει στον αριθμό $\frac{1}{6}$.

Σε πειράματα όπως τα προηγούμενα λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα ή, ισοδύναμα, τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθانا.

Ας δούμε τώρα ποια αναμένουμε να είναι η σχετική συχνότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου σε ένα πείραμα με ισοπίθانا αποτελέσματα.

Έστω για παράδειγμα, το ενδεχόμενο να φέρουμε ζυγό αριθμό στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού.

Επειδή το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι 2 ή 4 ή 6 και καθένα από τα αποτελέσματα αυτά εμφανίζεται με σχετική συχνότητα

τα $\frac{1}{6}$, η συχνότητα εμφάνισης του

ζυγού αριθμού αναμένεται να είναι

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}.$$

Γενικά, σε ένα πείραμα με n ισοπίθανα αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με k στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{k}{n}$. Γι' αυτό είναι εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Έτσι, έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, που διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

14 / 148 - 149

$$1. P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$$

$$2. P(\emptyset) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$$

3. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Για να μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας σε ένα δειγματικό χώρο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, είναι απαραίτητο τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα. Υπάρχουν

όμως πολλά πειράματα τύχης, των οποίων ο δειγματικός χώρος δεν αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Όπως για παράδειγμα ο αριθμός των αυτοκινητιστικών δυστυχημάτων μια ορισμένη εβδομάδα, η ρίψη ενός ζαριού που δεν είναι συμμετρικό κτλ. Για τις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος έχει ανάλογες ιδιότητες με τη σχετική συχνότητα.

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$,

έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_v) = 1.$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$ ορίζουμε το άθροισμα

$P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_k)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου \emptyset ορίζουμε τον αριθμό $P(\emptyset) = 0.$

Αν $P(\omega_i) = \frac{1}{v}$, $i = 1, 2, \dots, v$, τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου. Στην πράξη, ιδιαίτερα στην περίπτωση

που δεν ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου A λαμβάνεται το όριο της σχετικής του συχνότητας.

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ και χρησιμοποιούμε τη φράση “παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω ”, εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες,

18 / 149 - 150

γνωστές ως “κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων”. Οι κανόνες αυτοί θα αποδειχθούν στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθانا. Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύουν και στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθانا.

1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

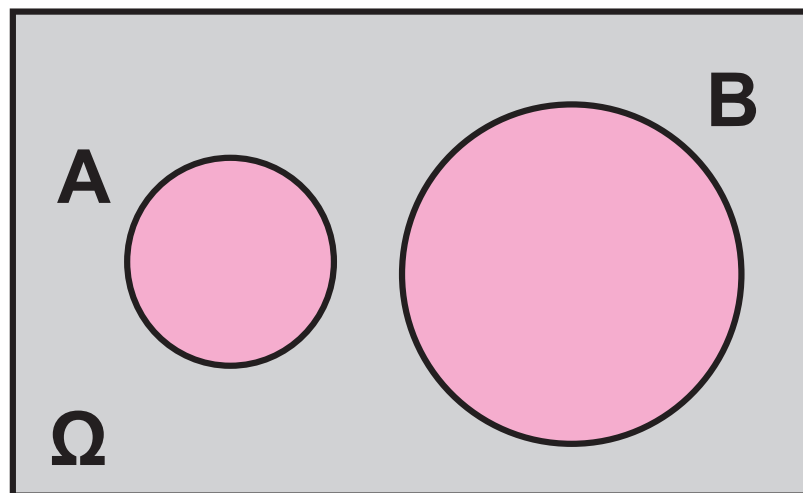
Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$, τότε το $A \cup B$ έχει $\kappa + \lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δε θα ήταν ασυμβίβαστα.

Δηλαδή, έχουμε

$$N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B).$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \\ &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B). \end{aligned}$$



$A \cup B$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως απλός προσθετικός νόμος (simply

additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A , B και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma).$$

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

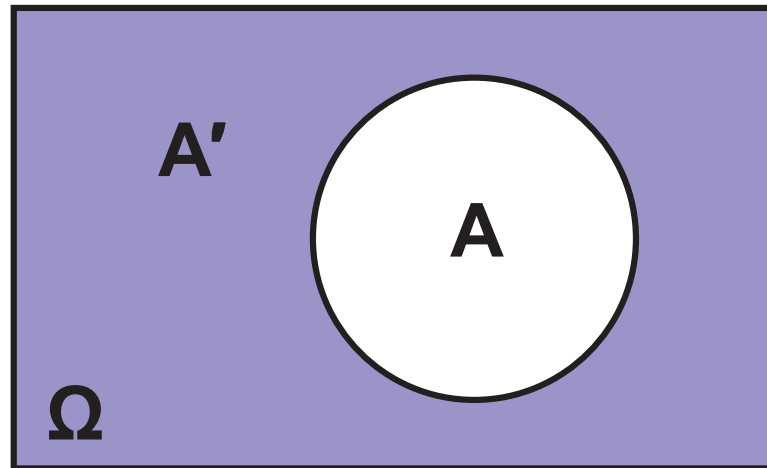
Επειδή $A \cap A' = \emptyset$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A')$$

Οπότε $P(A') = 1 - P(A)$.



3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B), \quad (1)$$

αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το

**πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$
υπολογίζεται δυο φορές.**

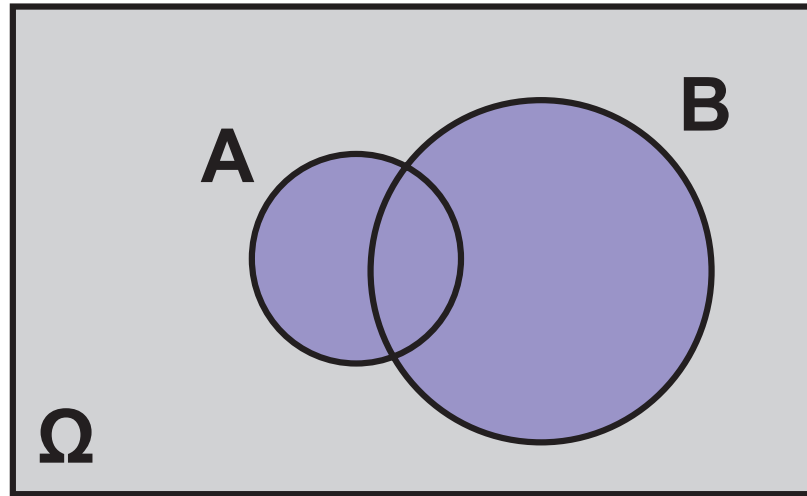
**Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με
 $N(\Omega)$ έχουμε:**

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

**Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως
προσθετικός νόμος (additive law).**



$$A \cup B$$

4. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

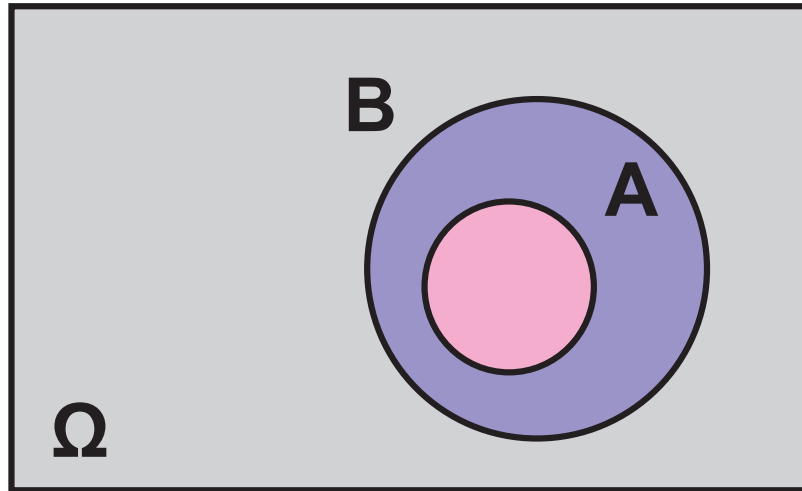
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \leq N(B)$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$P(A) \leq P(B).$$



5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

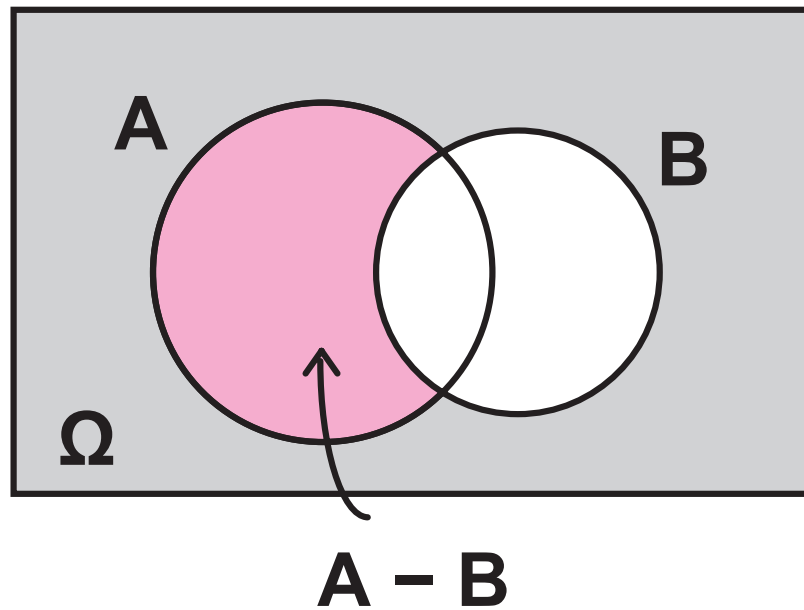
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A - B) \cup (A \cap B) = A$, έχουμε:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B).$$

Άρα $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ρίχνουμε δύο “αμερόληπτα” ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς.

ΛΥΣΗ

- Για να βρούμε το δειγματικό χώρο του πειράματος, χρησιμοποιούμε έναν πίνακα “διπλής εισόδου”, όπως φαίνεται στο ακόλουθο

σχήμα.

1° \ 2°	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Από τον πίνακα αυτόν έχουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω έχει 36 ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή $N(\Omega) = 36$.

• Το ενδεχόμενο A : “να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς”, είναι το $A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4),$

$(4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)$

δηλαδή $N(A) = 10$

• Επομένως,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Άρα, η πιθανότητα να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς είναι $\frac{5}{18} \approx 0,28$ ή, στη γλώσσα των ποσοστών, περίπου 28%.

2. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ και $P(A \cap B) = 0,2$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:

i) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.

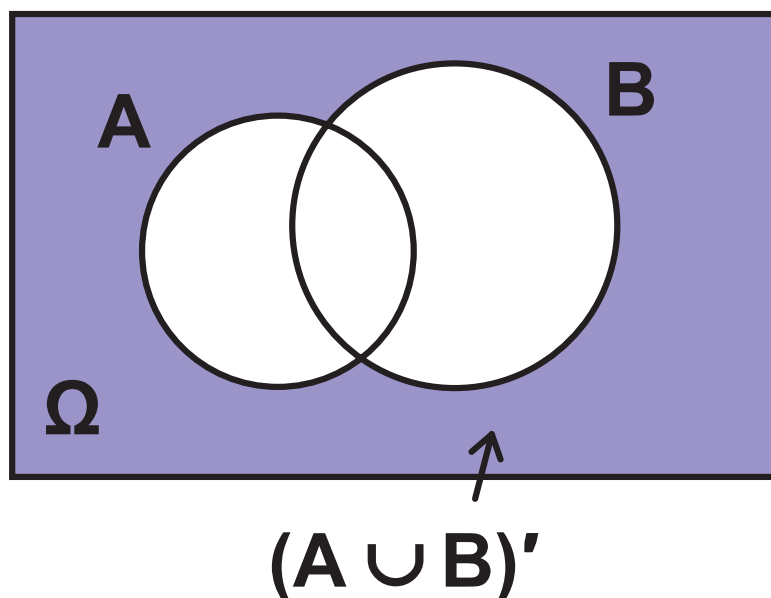
28 / 152 - 153

ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.

ΛΥΣΗ

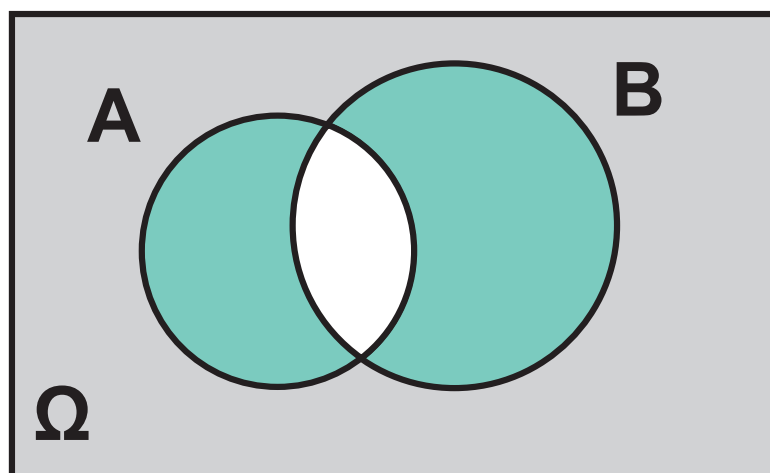
i) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B είναι το $(A \cup B)'$. Επομένως

$$\begin{aligned} P((A \cup B)') &= 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = \\ &= 1 - (0,5 + 0,4 - 0,2) = \\ &= 1 - 0,7 = \\ &= 0,3. \end{aligned}$$



ii) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B είναι το $(A - B) \cup (B - A)$. Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:

$$\begin{aligned} P((A - B) \cup (B - A)) &= \\ &= P(A - B) + P(B - A) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \\ &= 0,5 + 0,4 - 2 \cdot 0,2 = \\ &= 0,5. \end{aligned}$$



$$(A - B) \cup (B - A)$$

3. Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματολογικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,5$.

i) Να εξεταστεί αν τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

ii) Να αποδείξετε ότι $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,5$.

ΛΥΣΗ

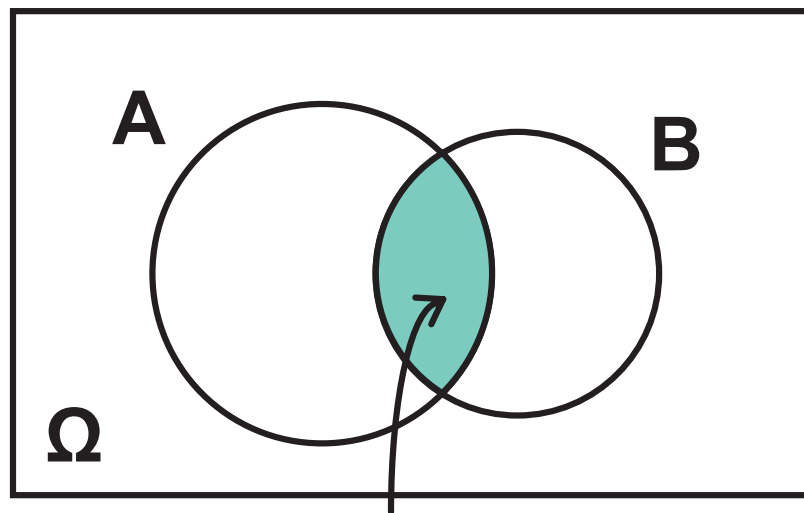
i) Αν τα A και B ήταν ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων θα είχαμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,6 + 0,5 = 1,1$$

ισχύει, δηλαδή, $P(A \cup B) > 1$, που είναι άτοπο. Άρα, τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

ii) Επειδή $A \cap B \subseteq B$ και $A \cap B \subseteq A$, έχουμε $P(A \cap B) \leq P(B)$ και $P(A \cap B) \leq P(A)$,

επομένως $P(A \cap B) \leq 0,5$ (1)



$A \cap B$

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - P(A \cap B).$$

Όμως $P(A \cup B) \leq 1$.

$$\text{Επομένως: } 0,6 + 0,5 - P(A \cap B) \leq 1$$

$$0,6 + 0,5 - 1 \leq P(A \cap B)$$

$$0,1 \leq P(A \cap B). \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,5.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

- 1.** Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων i) το χαρτί να είναι πέντε ii) το χαρτί να μην είναι πέντε.
- 2.** Να βρείτε την πιθανότητα στη ρίψη δύο νομισμάτων να εμφανιστούν δύο “γράμματα”.
- 3.** Ένα κουτί περιέχει μπάλες: 10 άσπρες, 15 μαύρες, 5 κόκκινες και 10 πράσινες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι:

i) μαύρη ii) άσπρη ή μαύρη iii)
ούτε κόκκινη ούτε πράσινη.

4. Σε μια τάξη με 30 μαθητές,
ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα
αδέλφια έχουν. Οι απαντήσεις
τους φαίνονται στον επόμενο
πίνακα:

Αριθμός μαθητών	4	11	9	3	2	1
Αριθμός αδελφών	0	1	2	3	4	5

Αν επιλέξουμε τυχαία από την
τάξη ένα μαθητή, να βρείτε την
πιθανότητα η οικογένειά του
να έχει τρία παιδιά.

5. Έστω τα σύνολα

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{N} \mid 10 \leq \omega \leq 20\},$$

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 3\} \text{ και}$$

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 4\}.$$

Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα στοιχείο του Ω , να βρείτε τις πιθανότητες i) να ανήκει στο A ii) να μην ανήκει στο B .

6. Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30%, η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40%. Να βρείτε την πιθανότητα i) να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος ii) να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος.

7. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω

$$\text{ισχύουν } P(A) = \frac{17}{30}, P(B) = \frac{7}{15}$$

$$\text{και } P(A \cup B) = \frac{2}{3}. \text{ Να βρείτε}$$

την $P(A \cap B)$.

8. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω

$$\text{ισχύουν } P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

$$\text{και } P(A \cap B) = \frac{1}{3}. \text{ Να βρείτε την}$$

$P(B)$.

9. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου είναι γνωστό ότι $P(A) = P(B)$, $P(A \cup B) = 0,6$ και $P(A \cap B) = 0,2$. Να βρείτε την $P(A)$.

10. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Να βρείτε την $P(A \cup B)$.

11. Για δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

12. Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχουν κάρτα D, το 55% έχουν κάρτα V και το 15% έχουν και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μία τουλάχιστον από τις δυο κάρτες;

13. Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει
α) τουλάχιστον μία ασθένεια;
β) μόνο μία ασθένεια;

14. Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μη μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες.

B' ΟΜΑΔΑΣ

- 1.** Αν για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω έχουμε $P(A) = \kappa$, $P(B) = \lambda$ και $P(A \cap B) = \mu$, να βρείτε τις πιθανότητες:
- i) να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A και B

- ii) να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B
- iii) να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.

2. Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση, το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαίως ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο.

3. Αν $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A')$.

4. Αν $0 < P(A) < 1$, να αποδείξετε

$$\text{ότι } \frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} \geq 4.$$

5. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,7$, να δείξετε ότι $0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,6$.

6. Για δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(B) - P(A') \leq P(A \cap B)$.

3.3 ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Είδαμε ότι όταν ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης έχει πεπερασμένο πλήθος απλών ενδεχομένων και τα απλά αυτά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, τότε η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

Επομένως, όταν έχουμε ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, ο υπολογισμός της $P(A)$ ανάγεται στην απαρίθμηση των στοιχείων των συνόλων Ω και A .

Σε πολλά προβλήματα όμως, η απευθείας απαρίθμηση των στοιχείων του δειγματικού χώρου και

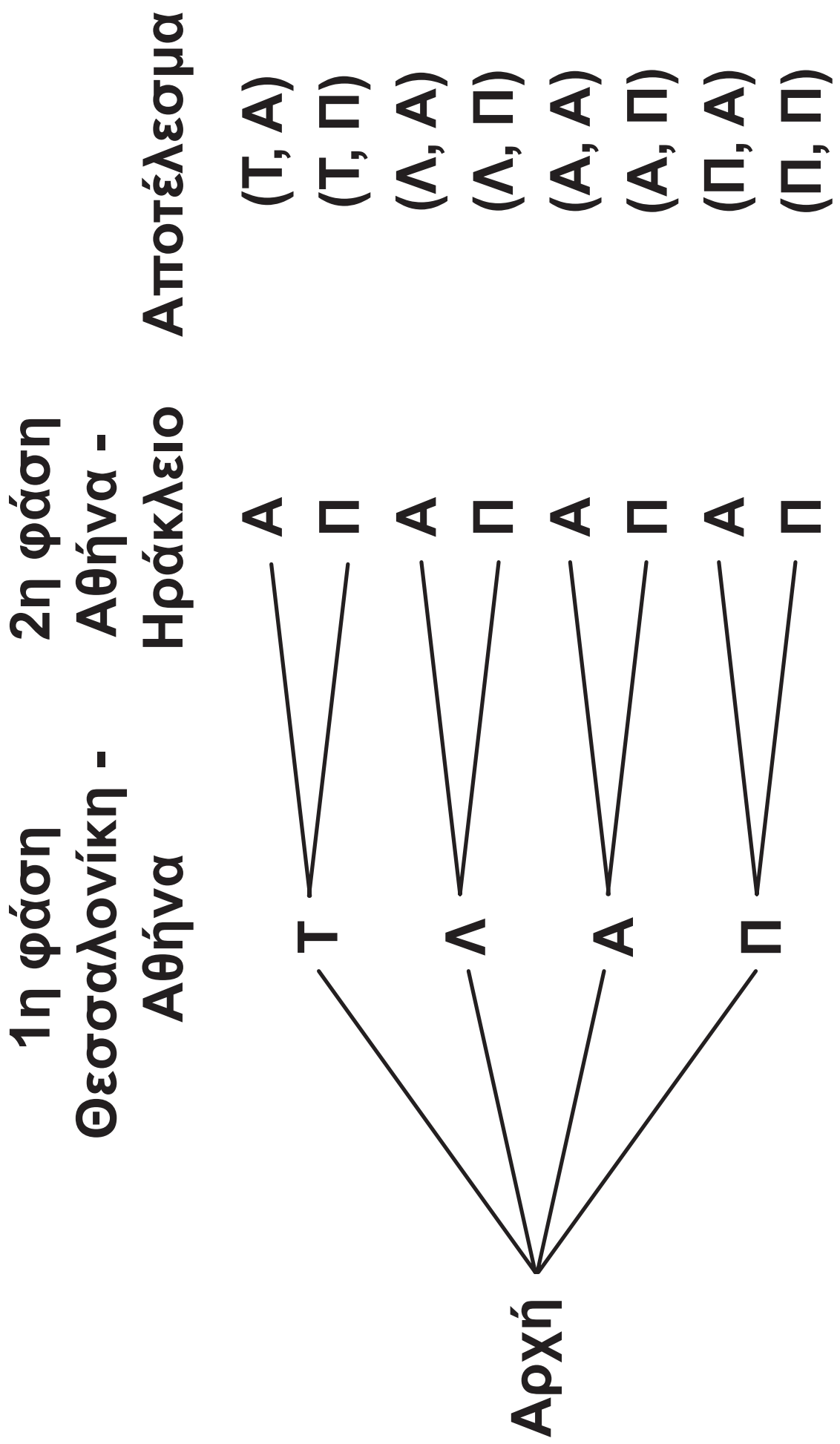
των ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν είναι δύσκολη ή και πρακτικά αδύνατη. Στις περιπτώσεις αυτές η απαρίθμηση διευκολύνεται με τις επόμενες μεθόδους της Συνδυαστικής η οποία είναι ένας από τους βασικούς κλάδους των Μαθηματικών.

Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος επιθυμεί να ταξιδέψει από τη Θεσσαλονίκη, μέσω Αθηνών, στο Ηράκλειο Κρήτης χωρίς να χρησιμοποιήσει το ΙΧ αυτοκίνητό του. Από τη Θεσσαλονίκη μπορεί να ταξιδέψει στην Αθήνα με τρένο (Τ) ή λεωφορείο (Λ) ή αεροπλάνο (Α) ή πλοίο (Π) και από την Αθήνα στο Ηράκλειο με πλοίο ή αεροπλάνο. Ενδιαφερόμαστε για τους διαφορετικούς τρόπους ως προς το ταξιδιωτικό μέσο

με τους οποίους μπορεί να πάει κάποιος από τη Θεσσαλονίκη στο Ηράκλειο.

Το ταξίδι λοιπόν γίνεται σε δύο φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η μετάβαση από τη Θεσσαλονίκη στην Αθήνα και η δεύτερη από την Αθήνα στο Ηράκλειο. Η πρώτη φάση του ταξιδιού μπορεί να γίνει με 4 τρόπους και η δεύτερη με 2 τρόπους. Σε κάθε τρόπο της πρώτης φάσης αντιστοιχούν οι δύο τρόποι της δεύτερης φάσης. Άρα το ταξίδι Θεσσαλονίκη-Ηράκλειο μπορεί να γίνει με $4 \cdot 2 = 8$ διαφορετικούς τρόπους. Τα παραπάνω φαίνονται παραστατικά στο επόμενο δεντροδιάγραμμα:



Γενικά ισχύει η επόμενη βασική αρχή απαρίθμησης:

Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε n διαδοχικές φάσεις $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Αν η φάση φ_1 μπορεί να πραγματοποιηθεί με k_1 τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φάση φ_2 μπορεί να πραγματοποιηθεί με k_2 τρόπους, ..., και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φάση φ_n μπορεί να πραγματοποιηθεί με k_n τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ τρόπους.

Επομένως, αν με μια διαδικασία η οποία πραγματοποιείται όπως ορίστηκε προηγουμένως, στην πρώτη φάση συμπληρώνεται το πρώτο στοιχείο μιας διατεταγμένης n -άδας με k_1 τρόπους, στη δεύτερη φάση το δεύτερο στοιχείο με k_2 τρόπους, ..., στη n -οστή φάση το n -στό στοιχείο με k_n , τότε σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης μπορούν να σχηματισθούν $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ διαφορετικές διατεταγμένες n -άδες.

Διατάξεις

Ας υποθέσουμε ότι μία επιτροπή με 5 μαθητές συνεδριάζει για να εκλέξει πρόεδρο, γραμματέα, και ταμία. Αν θέλουμε να βρούμε το πλήθος

των διαφορετικών τριάδων που θα εκλεγούν για τις τρεις θέσεις σκεπτόμαστε ως εξής:

1η θέση	2η θέση	3η θέση
5 τρόποι	4 τρόποι	3 τρόποι

Η διαδικασία εκλογής μπορεί να χωριστεί σε τρεις φάσεις: 1η φάση εκλογή προέδρου, 2η φάση εκλογή γραμματέα και 3η φάση εκλογή ταμιά. Η 1η φάση μπορεί να γίνει με 5 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής. Η 2η φάση μπορεί να γίνει με 4 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής που απέμειναν ύστερα από την εκλογή του προέδρου. Η 3η φάση μπορεί να γίνει με 3 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη

της επιτροπής που απέμειναν ύστερα και από την εκλογή του ταμιά.

Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος των διαφορετικών δυνατών τριάδων είναι $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Καθεμιά από τις παραπάνω τριάδες λέγεται **διάταξη των 5 ανά 3**.

Γενικά:

Διάταξη των n στοιχείων ενός συνόλου A ανά k , με $k \leq n$, λέγεται καθενας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε k διαφορετικά στοιχεία του A και να τα βάλουμε σε μια σειρά.

Το πλήθος των διατάξεων των n ανά k συμβολίζεται με Δ_k^n και αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο

παράδειγμα, βρίσκουμε ότι:

$$\Delta_{\kappa}^{\nu} = \nu(\nu - 1)(\nu - 2)\dots(\nu - \kappa + 1) \quad (1)$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δύο διατάξεις των ν ανά κ είναι διαφορετικές αν διαφέρουν ως προς ένα τουλάχιστον στοιχείο ή ως προς τη θέση που κατέχουν τα στοιχεία. Για παράδειγμα, οι διατάξεις $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 3)$ και $(3, 2, 1)$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Στην περίπτωση που πάρουμε και τα ν στοιχεία ενός συνόλου A και τα βάλουμε σε μια σειρά, τότε έχουμε μια διάταξη των ν στοιχείων ανά ν η οποία λέγεται μετάθεση των ν στοιχείων. Το πλήθος Δ_{ν}^{ν} των μεταθέσεων των ν στοιχείων συμβολίζεται με M_{ν} και σύμφωνα με τον τύπο (1) είναι

$$M_v = v(v - 1)(v - 2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Το γινόμενο $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (v - 2)(v - 1)v$ συμβολίζεται με $v!$ και διαβάζεται v παραγοντικό. Επομένως

$$M_v = v! \quad (2)$$

Έτσι, αν στο προηγούμενο παράδειγμα θέλουμε να βάλουμε τους 5 μαθητές σε μια σειρά, τότε υπάρχουν $M_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τους τοποθετήσουμε. Αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο του παραγοντικού για να εκφράσουμε το πλήθος των διατάξεων των v ανά k με $k < v$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Delta_k^v &= v(v-1)(v-2)\dots(v-k+1) = \\
&= \frac{v(v-1)(v-2)\dots(v-k+1)(v-k)(v-k-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(v-k)(v-k-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \\
&= \frac{v!}{(v-k)!} .
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\Delta_{\kappa}^{\nu} = \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)!} \quad (3)$$

Αν τώρα θέλουμε ο τύπος (3) να ισχύει και για $\kappa = \nu$, επειδή

$\Delta_{\nu}^{\nu} = M_{\nu} = \nu!$, πρέπει $\frac{\nu!}{0!} = \nu!$. Είναι λοιπόν λογικό να ορίσουμε $0! = 1$.

Συνδυασμοί

Ας υποθέσουμε ότι από 5 άτομα Α, Β, Γ, Δ και Ε θέλουμε να επιλέξουμε μια ομάδα 3 ατόμων, χωρίς να μας ενδιαφέρει η κατάταξη μέσα σ' αυτήν την ομάδα. Αν x είναι ο αριθμός των διαφορετικών ομάδων που μπορούμε να επιλέξουμε, τότε από κάθε τέτοια ομάδα μπορούν να

53 / 159 - 160

προκύψουν $3!$ διατεταγμένες ομάδες. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των διατεταγμένων ομάδων θα είναι $3!x$. Ο αριθμός αυτός όμως είναι το πλήθος των διατάξεων Δ_3^5 . Επομένως, θα είναι $\Delta_3^5 = 3!x$, οπότε

$$x = \frac{\Delta_3^5}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10.$$

Πιο συγκεκριμένα οι ομάδες αυτές θα είναι:

$\{A, B, \Gamma\}$, $\{A, B, \Delta\}$, $\{A, B, E\}$,
 $\{A, \Gamma, \Delta\}$, $\{A, \Gamma, E\}$, $\{A, \Delta, E\}$,
 $\{B, \Gamma, \Delta\}$, $\{B, \Gamma, E\}$, $\{B, \Delta, E\}$ και
 $\{\Gamma, \Delta, E\}$. Κάθε τέτοια επιλογή λέγεται συνδυασμός των 5 ανά 3.

Γενικά:

Συνδυασμός των n στοιχείων ενός συνόλου A ανά k λέγεται κάθε υποσύνολο του A με k στοιχεία.

Το πλήθος των συνδυασμών των n στοιχείων ανά k συμβολίζεται με

$\binom{n}{k}$ και αν εργαστούμε όπως στο

προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ότι

$$\binom{n}{k} = \frac{\Delta_k^n}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Επομένως,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δύο συνδυασμοί των n ανά k είναι διαφορετικοί αν διαφέρουν κατά ένα τουλάχιστον στοιχείο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1. Στο τυχερό παιχνίδι του ΠΡΟ-ΠΟ συμπληρώνουμε καθεμιά από τις 13 θέσεις με ένα από τα στοιχεία 1, 2, X που αντιστοιχούν σε πρόβλεψη: νίκης της γηπεδούχου ομάδας (1), νίκης της φιλοξενούμενης ομάδας (2), ισοπαλίας (X).**
- i) Να προσδιοριστεί το πλήθος των διαφορετικών στηλών που μπορούμε να συμπληρώσουμε.**
- ii) Αν συμπληρώσουμε τυχαία μια στήλη ΠΡΟΠΟ, να βρεθούν οι**

πιθανότητες των ενδεχομένων
A: "να πιάσουμε ακριβώς 12 αγώνες".
B: "να πιάσουμε ακριβώς 11 αγώνες".

ΛΥΣΗ

i) Μια στήλη ΠΡΟΠΟ είναι μια 13-άδα, στην οποία κάθε θέση μπορεί να συμπληρωθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, υπάρχουν συνολικά

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \dots 3}_{13 \text{ παράγοντες}} = 3^{13} = 1.594.323 \text{ διαφορετικές στήλες.}$$

ii) • Ευνοϊκή περίπτωση για το A είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά

από τις 12 θέσεις συμπληρώνεται με το σωστό αποτέλεσμα και η εναπομένονσα θέση συμπληρώνεται με λαθεμένη πρόβλεψη. Υπάρχουν

$\binom{13}{12}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους

12 αγώνες που συμπληρώνονται με το σωστό αποτέλεσμα, και 2 τρόποι για να συμπληρώσουμε τον αγώνα που απομένει με λάθος πρόβλεψη.

Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το A είναι

$$N(A) = \binom{13}{12} \cdot 2. \text{ Άρα, η ζητούμενη}$$

πιθανότητα είναι ίση με

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{13}{12} \cdot 2}{3^{13}} =$$

$$= \frac{13 \cdot 2}{3^{13}} = \frac{26}{3^{13}} \approx 0,000016.$$

- Ευνοϊκή περίπτωση για το B είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά από τις 11 θέσεις συμπληρώνεται με το σωστό αποτέλεσμα και καθεμιά από τις υπόλοιπες 2 θέσεις συμπληρώνεται με μια λαθεμένη πρό-

βλεψη. Υπάρχουν $\binom{13}{11}$ τρόποι για

να επιλέξουμε τις 11 θέσεις με το σωστό αποτέλεσμα και 2 τρόποι για να συμπληρώσουμε καθεμιά από

τις υπόλοιπες 2 θέσεις με λαθεμένη πρόβλεψη. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το

B είναι $N(B) = \binom{13}{11} \cdot 2 \cdot 2$. Άρα, η

ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{13}{11} \cdot 2 \cdot 2}{3^{13}} = \frac{312}{3^{13}} \approx 0,000196.$$

2. Στο τυχερό παιχνίδι του ΛΟΤΤΟ “6 από 49”, αν παίξουμε μια στήλη, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A: “να πετύχουμε 4 ακριβώς σωστά νούμερα”;

60 / 162

ΛΥΣΗ

Επειδή τελικά δεν έχει σημασία η σειρά κλήρωσης του κάθε αριθμού, οι δυνατές περιπτώσεις του πειράματος είναι τόσες όσοι και οι συνδυασμοί των 49 ανά 6, δηλαδή

$$N(\Omega) = \binom{49}{6}.$$

Για να βρούμε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων σκεφτόμαστε ως εξής:

Υπάρχουν $\binom{6}{4}$ τρόποι για να επι-

λέξουμε 4 σωστά νούμερα από τα 6 που κληρώθηκαν. Στη συνέχεια μέ-

νουν $\binom{49-6}{6-4} = \binom{43}{2}$ τρόποι για

να επιλέξουμε τα 2 λάθος νούμερα.
Επομένως, το πλήθος των ευνοϊ-
κών περιπτώσεων είναι

$$N(A) = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}. \text{ Άρα}$$

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4} \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13545}{13983816} \approx$$

$\approx 0,000969$ ή 1‰ περίπου.

3. Ποια είναι η πιθανότητα μεταξύ κ μαθητών ($\kappa \leq 365$) δύο τουλάχιστον να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα; (Ο χρόνος υπολογίζεται με 365 μέρες).

62 / 162

ΛΥΣΗ

Αν A είναι το ενδεχόμενο “δύο τουλάχιστον μαθητές να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα”, τότε A' είναι το ενδεχόμενο “οι k μαθητές να έχουν γενέθλια σε διαφορετικές μέρες” και ισχύει $P(A) = 1 - P(A')$. Επομένως ο υπολογισμός της $P(A)$ ανάγεται στον υπολογισμό της $P(A')$. Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων του πειράματος είναι

$$N(\Omega) = 365 \cdot 365 \cdot 365 \dots 365 = 365^k,$$

αφού ένας μαθητής μπορεί να έχει γεννηθεί σε μια από τις 365 μέρες του έτους. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το A' είναι

$$365 \cdot (365 - 1) \cdot (365 - 2) \dots [(365 - (k - 1))],$$

αφού οι k μαθητές πρέπει να έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές μέρες του έτους.

Επτομένως,

$$P(A') = \frac{365 \cdot (365 - 1) \cdot (365 - 2) \dots (365 - \kappa + 1)}{365^\kappa} =$$

$$= \frac{365 \cdot 364 \dots (365 - \kappa + 1)}{365^\kappa} .$$

$$\text{Άρα } P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \dots (365 - \kappa + 1)}{365^\kappa} .$$

Οι τιμές του $P(A)$ για μερικές τιμές του k δίνονται στον επόμενο πίνακα:

k	10	20	23	30	60	70
$P(A)$	0,117	0,411	0,507	0,706	0,994	0,999

65 / 163

Παρατηρούμε ότι ήδη μεταξύ 23 ατόμων η πιθανότητα δύο άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα είναι μεγαλύτερη από 50%, ενώ μεταξύ 70 ατόμων το ενδεχόμενο αυτό είναι σχεδόν βέβαιο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

- 1. Αν κάποιος διαθέτει 3 σακάκια, 4 παντελόνια, 5 πουκάμισα, 10 ζευγάρια κάλτσες και 2 ζευγάρια παπούτσια, με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας από όλα τα είδη; Ποια είναι η πιθανότητα να φοράει ένα ορισμένο σακάκι;**
- 2. Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας μπορούμε να κατασκευάσουμε που να περιέχουν στη σειρά τρία κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από έναν τετραψήφιο**

αριθμό; Ποια είναι η πιθανότητα μια τέτοια πινακίδα να αρχίζει με φωνήεν και να τελειώνει σε άρτιο ψηφίο;

3. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 4 άτομα σε 6 θέσεις μιας σειράς; Ποιά είναι η πιθανότητα η τελευταία θέση να μείνει κενή;

4. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά 4 αγόρια και 3 κορίτσια; Ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια;

5. Να αποδείξετε ότι

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v} - \mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

6. Σε έναν κύκλο δίνονται 8 σημεία A_1, A_2, \dots, A_8 . Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα σημεία αυτά; Ποια είναι η πιθανότητα ένα από τα παραπάνω τμήματα που επιλέγεται τυχαία να μη διέρχεται από το σημείο A_1 ;

B' ΟΜΑΔΑΣ

- 1. Με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 φτιάχνουμε τετραψήφιους αριθμούς στους οποίους το κάθε ψηφίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερο από μια φορά. Αν πάρουμε τυχαία έναν τέτοιο αριθμό, ποια είναι η πιθανότητα να έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά;**
- 2. Από το σύνολο των μεταθέσεων των στοιχείων 1, 2, 3, ..., n επιλέγουμε τυχαίως μία. Να βρείτε ποια είναι η πιθανότητα να μην αρχίζει από 1.**

- 3. Δέκα παιδιά, μεταξύ των οποίων ο Κώστας και η Ελένη, θα καθίσουν τυχαία ο ένας δίπλα στον άλλον σε δέκα θέσεις. Ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστας και η Ελένη να καθίσουν σε διπλανές θέσεις;**
- 4. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου τέσσερα άτομα να έχουν γεννηθεί σε τέσσερις διαφορετικές εποχές του έτους.**
- 5. Από ένα σύλλογο καθηγητών με 7 άνδρες και 6 γυναίκες επιλέγουμε τυχαίως 4 άτομα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:**

- i) τα άτομα να είναι γυναίκες
- ii) ένα τουλάχιστον να είναι άνδρας
- iii) να υπάρχει μία μόνο γυναίκα.

6. Ένα κουτί περιέχει 20 ηλεκτρικές ασφάλειες, από τις οποίες οι 5 είναι ελαττωματικές. Επιλέγουμε τυχαίως 4 ασφάλειες και τις δοκιμάζουμε. Αν βρεθούν περισσότερες από μία ελαττωματικές, το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου το κουτί να γίνει αποδεκτό.

- 7. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 . Στην ε_1 ορίζουμε 10 σημεία και στην ε_2 20 σημεία. Πόσα τρίγωνα ορίζουν τα σημεία αυτά; Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα τέτοιο τρίγωνο, ποια είναι η πιθανότητα να έχει μία πλευρά του στην ε_1 ;**
- 8. Ρίχνουμε ένα νόμισμα n φορές. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να μη φέρουμε σε δύο διαδοχικές ρίψεις ίδιο αποτέλεσμα.**
- 9. Ο υπάλληλος ενός χώρου στάθμευσης δίνει τυχαία τα τρία κλειδιά αυτοκινήτων**

στους τρεις κατόχους των αυτοκινήτων αυτών. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: “Κάθε οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί”

B: “Μόνο ένας οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί”

Γ: “Κανένας οδηγός να μην πάρει το δικό του κλειδί”.

10. Από μια τάξη στην οποία φοιτούν 10 κορίτσια και 12 αγόρια επιλέγονται στην τύχη τρία άτομα για να εκπροσωπήσουν την τάξη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα τα επιλεγμένα άτομα να είναι του ίδιου φύλου.

11. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε τουλάχιστον ένα “έξι” σε 4 ρίψεις ενός ζαριού και να τη συγκρίνετε με την πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον μια φορά “εξάρες” σε 24 ρίψεις δύο ζαριών.

3.4 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ - ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Για το διοικητικό συμβούλιο μιας επιχείρησης θα εκλεγεί ένας αντιπρόσωπος. Υποψήφιοι είναι 7 άνδρες και 8 γυναίκες. Από τους υποψηφίους 3 άνδρες και 6 γυναίκες είναι διοικητικοί υπάλληλοι, ενώ 4 άνδρες και 2 γυναίκες είναι τεχνικοί υπάλληλοι. Σύμφωνα με αυτά τα δεδομένα οι υποψήφιοι μπορούν να ταξινομηθούν στον ακόλουθο πίνακα ως εξής:

	Διοικητικός	
Άνδρας	3	
Γυναίκα	6	
Άθροισμα στήλης	9	

	Τεχνικός	Άθροισμα γραμμής
	4	7
	2	8
	6	15

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: “Να εκλεγεί διοικητικός”

B: “Να εκλεγεί γυναίκα”.

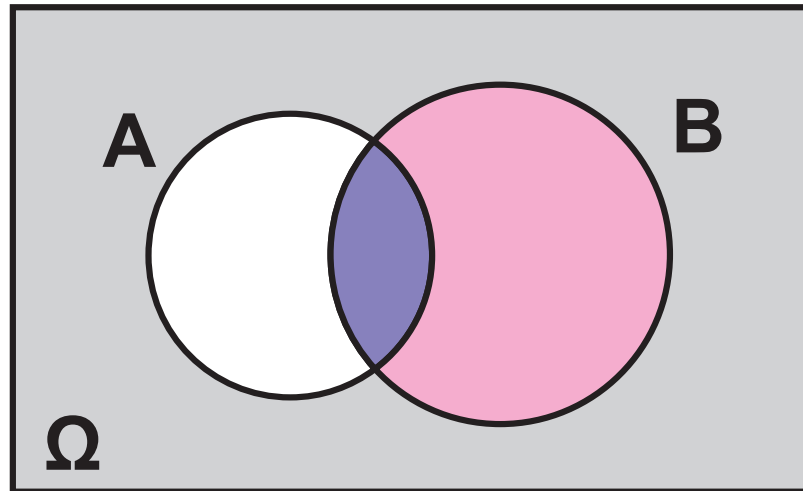
Με την παραδοχή ότι τα 15 στοιχεία του δειγματικού χώρου είναι ισοπίθανα, έχουμε

$$P(A) = \frac{9}{15} \text{ και } P(B) = \frac{8}{15} .$$

Ύστερα από την εκλογή και πριν από την ανακοίνωση του αποτελέσματος έγινε γνωστό ότι εκλέγεται γυναίκα. Αυτό συνεπάγεται ότι ο αντιπρόσωπος θα είναι μία από τις 8 γυναίκες και επομένως η πιθανότητα να εκλεγεί διοικητικός γίνεται $\frac{6}{8}$. Αυτή λοιπόν είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου: “Να

εκλεγεί διοικητικός με δεδομένο ότι έχει ήδη εκλεγεί γυναίκα”. Το ενδεχόμενο αυτό συμβολίζεται με $A|B$ και η πιθανότητα του $P(A|B)$ λέγεται δεσμευμένη πιθανότητα του A με δεδομένο το B , δηλαδή

$P(A | B) = \frac{6}{8} \neq P(A)$. Ομοίως βρίσκουμε ότι $P(B | A) = \frac{6}{9} \neq P(B)$.



Γενικά, έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(B) > 0$. Ας υποθέσουμε ότι ζητάμε την πιθανότητα του A με δεδομένο ότι το B έχει ήδη πραγματοποιηθεί. Αφού έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B , η απλή λογική μας λέει ότι πρέπει να περιοριστούμε στα στοιχεία του B και από αυτά να βρούμε ποια είναι τα ευνοϊκά για το A . Με άλλα λόγια η πληροφορία για την πραγματοποίηση του B περιορίζει το δειγματικό χώρο Ω στο B και το ενδεχόμενο A στο $A \cap B$.

Επομένως, αν υποθέσουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθانا αποτελέσματα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A | B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}}{\frac{N(B)}{N(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Η πιθανότητα αυτή λέγεται δεσμευμένη πιθανότητα του A με δεδομένο το B .

Γενικά:

Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος και $P(B) > 0$, τότε ο λόγος $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

λέγεται δεσμευμένη πιθανότητα του A με δεδομένο το B και συμβολίζεται με $P(A|B)$. Δηλαδή:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ομοίως, αν $P(A) > 0$, τότε

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα η πιθανότητα να εκλεγεί διοικητικός με δεδομένο ότι έχει εκλεγεί γυναίκα είναι:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{6}{8} \text{ και}$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{6}{9}.$$

Άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι ότι

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) = \\ &= P(B) \cdot P(A|B). \end{aligned}$$

Οι παραπάνω ισότητες εκφράζουν τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων.

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

Στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε ότι η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου A,

με δεδομένο ότι το ενδεχόμενο B έχει ήδη πραγματοποιηθεί, είναι

$$P(A | B) = \frac{6}{8}, \text{ ενώ } P(A) = \frac{9}{15}. \text{ Δηλαδή,}$$

$P(A|B) \neq P(A)$. Με άλλα λόγια η πραγματοποίηση του B επηρέασε την πιθανότητα πραγματοποίησης του A.

Υπάρχουν όμως και ενδεχόμενα στα οποία η πληροφορία για την πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου. Για παράδειγμα, αν στο πείραμα της ρίψης δύο ζαριών θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα A: “Το πρώτο ζάρι να φέρει 1” και B: “Το δεύτερο ζάρι να φέρει άρτιο”, έχουμε:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36}.$$

$$\text{Επομένως, } P(A | B) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \text{ και}$$

$$P(B | A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι $P(A|B) = P(A)$ και $P(B|A) = P(B)$. Γι' αυτό λέμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. Γενικά:

Δύο ενδεχόμενα A και B με $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$ λέγονται ανεξάρτητα, αν και μόνον αν $P(A|B) = P(A)$ και $P(B|A) = P(B)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων συμπεραίνουμε ότι για δύο

ανεξάρτητα ενδεχόμενα έχουμε $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Η ισότητα αυτή χρησιμοποιείται και ως ορισμός των ανεξάρτητων ενδεχομένων, χωρίς μάλιστα τον περιορισμό $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$. Δηλαδή:

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ανεξάρτητα, αν

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Δύο ενδεχόμενα που δεν είναι ανεξάρτητα λέγονται εξαρτημένα.

ΣΧΟΛΙΟ

Με την ισότητα $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ μπορούμε να διαπιστώσουμε αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. Στην πράξη,

**όμως, η ανεξαρτησία δύο ενδεχο-
μένων ή ισχύει από μόνη της, λόγω
της φύσης του πειράματος ή έχει
περιληφθεί στις υποθέσεις κατα-
σκευής του μοντέλου που περιγρά-
φει κάποια φαινόμενα.**

**Για παράδειγμα, είναι εύλογο να δε-
χτούμε ότι είναι ανεξάρτητα τα ενδε-
χόμενα A: “ο συμπλέκτης του αυτο-
κινήτου είναι σε καλή κατάσταση”
και B: “η μπαταρία του αυτοκινήτου
είναι σε καλή κατάσταση”.**

**Αντιθέτως, είναι λάθος να δεχτούμε
ως ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα
A: “ Ένα άτομο είναι μανιώδης κα-
πνιστής” και B: “ Ένα άτομο θα
προσβληθεί από ασθένεια των
πνευμόνων”.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Για την ασφαλή πτήση ενός αεροπλάνου με δύο κινητήρες, πρέπει να δουλεύει ο ένας τουλάχιστον κινητήρας. Οι κινητήρες δουλεύουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Αν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να πάθει κάποιος κινητήρας βλάβη είναι 0,003, να βρεθεί η πιθανότητα για μια ασφαλή πτήση.

ΛΥΣΗ

Το αεροπλάνο δεν εκτελεί ασφαλή πτήση, όταν πάθουν βλάβη και οι δύο κινητήρες. Επειδή οι κινητήρες λειτουργούν ανεξαρτήτως ο ένας από τον άλλον, η πιθανότητα να

πάθουν βλάβη και οι δύο συγχρό-
νως είναι ίση με $0,003 \cdot 0,003$. Άρα,
η πιθανότητα μιας ασφαλούς πτή-
σης είναι ίση με

$1 - 0,003 \cdot 0,003 = 0,999991$ δηλαδή
 $99,9991\%$.

**2. Από τρεις όμοιες μηχανές ενός
εργοστασίου η πρώτη (I) παράγει
το 20%, η δεύτερη (II) το 30%
και η τρίτη (III) το 50% της συ-
νολικής παραγωγής ενός εξαρτή-
ματος. Επιπλέον, το 5% της πα-
ραγωγής της μηχανής I, το 4%
της II και το 2% της III είναι
ελαττωματικά εξαρτήματα.**

**Δύο ερωτήσεις του λεγόμενου
ποιοτικού ελέγχου είναι οι εξής:**

- i) Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα εξάρτημα σε ένα κατάστημα πωλήσεων ποια είναι η πιθανότητα να είναι ελαττωματικό;
- ii) Αν ένα εξάρτημα που επιλέχθηκε τυχαία είναι ελαττωματικό, ποια είναι η πιθανότητα να προέρχεται από τη μηχανή I;

ΛΥΣΗ

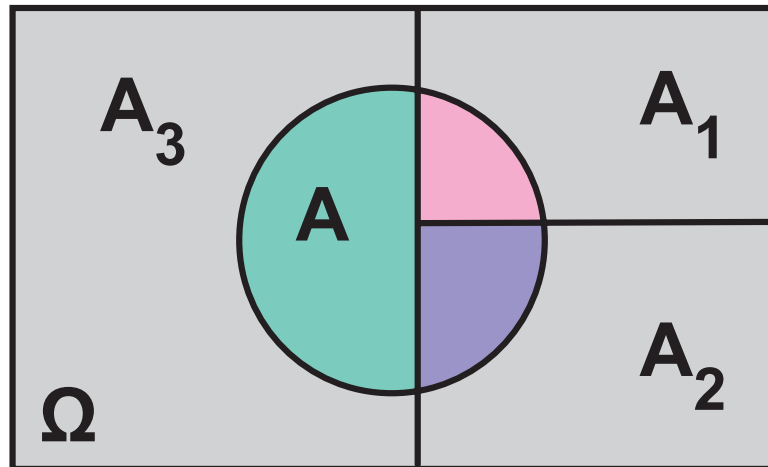
Αν A_1 , A_2 και A_3 είναι τα ενδεχόμενα το επιλεγμένο εξάρτημα να προέρχεται από τις μηχανές I, II και III

αντιστοίχως, τότε $P(A_1) = 0,2$,

$P(A_2) = 0,3$ και $P(A_3) = 0,5$. Τα A_1 ,

A_2 και A_3 είναι ανά δύο ξένα μεταξύ

τους και επιπλέον $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$.



Αν A είναι το ενδεχόμενο το επιλεγμένο εξάρτημα να είναι ελαττωματικό, τότε

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup (A \cap A_3)$$

και

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3).$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε $P(A|A_1) = 0,05$,

$P(A|A_2) = 0,04$ και $P(A|A_3) = 0,02$.

Επομένως:

i) Από την (1) και τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων

έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) \cdot P(A|A_1) + P(A_2) \cdot \\ &\quad \cdot P(A|A_2) + P(A_3) \cdot P(A|A_3) = \\ &= 0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,04 + \\ &\quad + 0,5 \cdot 0,02 = 0,032. \end{aligned}$$

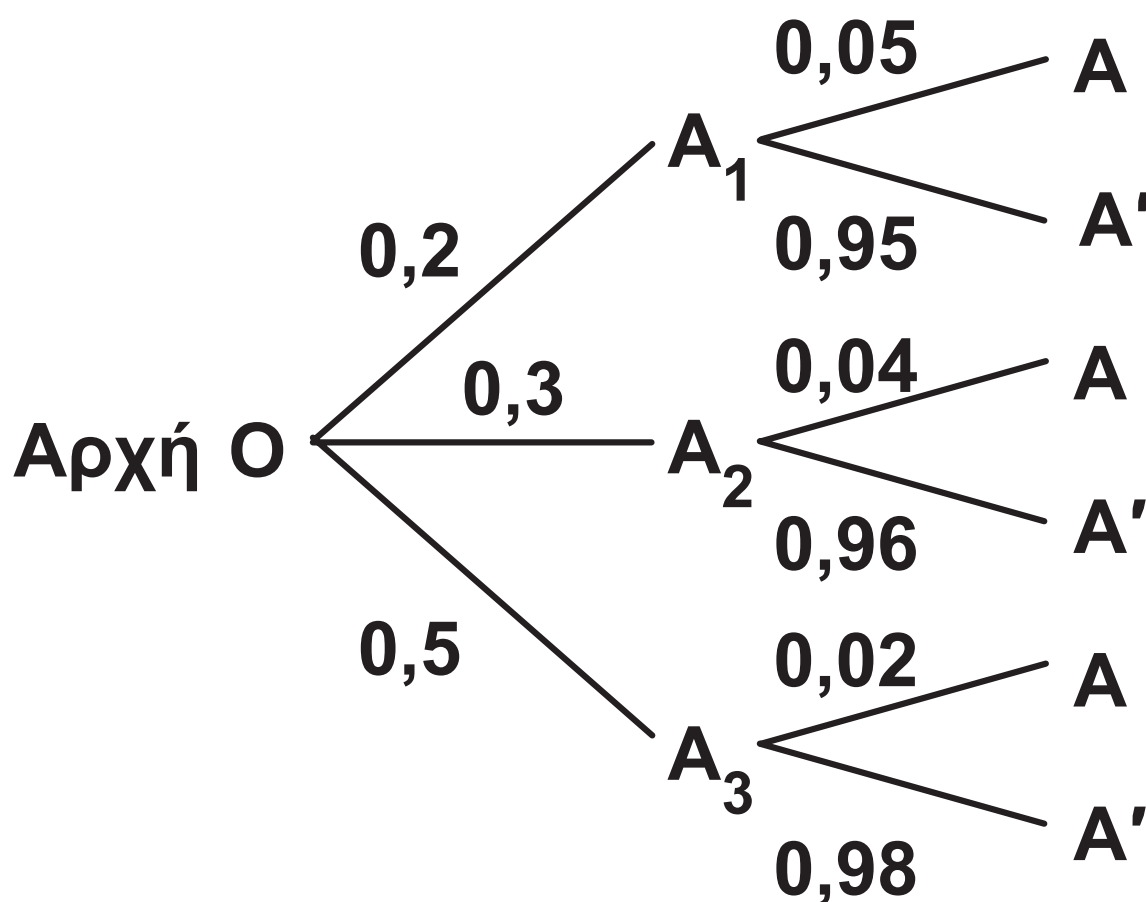
**ii) Ζητάμε την πιθανότητα $P(A_1|A)$.
Έχουμε**

$$\begin{aligned} P(A_1 | A) &= \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(A | A_1) \cdot P(A_1)}{P(A)} = \\ &= \frac{0,2 \cdot 0,05}{0,032} = \\ &= \frac{0,01}{0,032} = 0,3125, \end{aligned}$$

δηλαδή, 31,25%.

Η λύση προβλημάτων όπως το προηγούμενο, διευκολύνεται με τη βοήθεια ενός δεντροδιαγράμματος, όπως φαίνεται στο σχήμα:

Προέλευση Ποιότητα
εξαρτήματος εξαρτήματος



Αποτέλεσμα	Πιθανότητα αποτελέσματος
-------------------	-------------------------------------

• $A_1 \cap A$	$0,2 \cdot 0,05$
----------------	------------------

$A_1 \cap A'$	$0,2 \cdot 0,95$
---------------	------------------

• $A_2 \cap A$	$0,3 \cdot 0,04$
----------------	------------------

$A_2 \cap A'$	$0,3 \cdot 0,96$
---------------	------------------

• $A_3 \cap A$	$0,5 \cdot 0,02$
----------------	------------------

$A_3 \cap A'$	$0,5 \cdot 0,98$
---------------	------------------

Οι κλάδοι OA_1 , OA_2 και OA_3 αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα προέλευσης του εξαρτήματος από τις μηχανές I, II και III αντιστοίχως, και οι αντίστοιχες πιθανότητες των ενδεχομένων αυτών είναι γραμμένες πάνω στους κλάδους. Από το τέλος κάθε τέτοιου κλάδου ξεκινούν δύο άλλοι κλάδοι, που αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα το εξάρτημα να είναι ελαττωματικό ή μη ελαττωματικό με γραμμένες πάλι επάνω τους τις αντίστοιχες πιθανότητες.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα (i) επισημαίνουμε πρώτα τις διαδρομές που οδηγούν σε ελαττωματικό εξάρτημα.

Οι διαδρομές αυτές είναι οι OA_1A , OA_2A και OA_3A και αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα $A_1 \cap A$, $A_2 \cap A$ και $A_3 \cap A$.

Στη συνέχεια με εφαρμογή του πολλαπλασιαστικού νόμου των πιθανοτήτων υπολογίζουμε τις πιθανότητες των ενδεχομένων αυτών. Έχουμε

$$P(A_1 \cap A) = 0,2 \cdot 0,05,$$

$$P(A_2 \cap A) = 0,3 \cdot 0,04$$

$$\text{και } P(A_3 \cap A) = 0,5 \cdot 0,02.$$

Τέλος, επειδή τα ενδεχόμενα που παριστάνουν οι διαδρομές είναι ασυμβίβαστα, προσθέτουμε τις παραπάνω πιθανότητες και βρίσκουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου A.

Επομένως

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,04 + \\ + 0,5 \cdot 0,02 = 0,032.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Στο δεύτερο ερώτημα της παραπάνω εφαρμογής γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του πειράματος και ζητάμε την πιθανότητα να προέρχεται το εξάρτημα από τη μηχανή I. Η πιθανότητα αυτή $P(A_1|A)$ λέγεται “εκ των υστέρων (a posteriori) πιθανότητα”, ενώ η $P(A_1)$ λέγεται “εκ των προτέρων (a priori) πιθανότητα”.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ρίχνει κάποιος ένα ζάρι και αναγγέλλει ότι έφερε ζυγό αριθμό. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει φέρει 6;
2. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνει κάποιος τυχαία ένα φύλλο και λέει ότι είναι “σπαθί”. Ποια είναι η πιθανότητα το φύλλο να είναι φιγούρα;
3. Για δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύουν $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και

$P(A|B) = \frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(B | A)$ και $P(A' \cup B)$.

4. Αν $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$ και $P(A) = \frac{2}{3}$, να βρείτε την $P(B)$.

5. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε 6 στην πρώτη ρίψη και περιττό αριθμό στη δεύτερη ρίψη.

6. Ένα κουτί περιέχει 6 κόκκινες και 8 μαύρες μπάλες. Παίρνουμε από το κουτί τυχαίως μια

μπάλα, σημειώνουμε το χρώμα της και την επανατοποθετούμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου η πρώτη μπάλα να είναι μαύρη και η δεύτερη κόκκινη.

7. Τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα και ισχύουν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. Να βρείτε τις $P(B)$ και $P(A \cup B)$.

8. Για δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύουν $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A | B) = \frac{2}{3}$

και $P(B | A) = \frac{1}{2}$.

i) Είναι τα A και B ανεξάρτητα;

ii) Είναι τα A και B ξένα μεταξύ τους;

iii) Να υπολογίσετε την $P(B)$.

9. Για δύο ενδεχόμενα A και B του δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι

$$P(A|B) + P(A'|B) = 1.$$

10. Σε ένα Γυμνάσιο στις εξετάσεις του Ιουνίου το 25% έγραψε στα Μαθηματικά κάτω από τη βάση, το 15% έγραψε στη Φυσική κάτω από τη

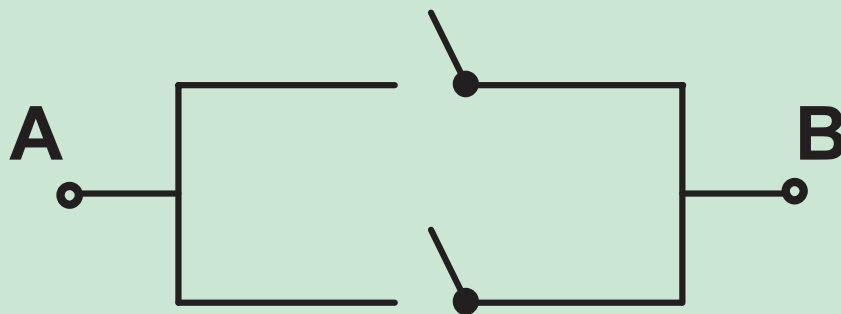
βάση και το 10% των μαθητών έγραψε και στα δύο μαθήματα κάτω από τη βάση. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή του Γυμνασίου αυτού.

- i) Αν έχει αποτύχει στη Φυσική, ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Μαθηματικά;
- ii) Αν έχει αποτύχει στα Μαθηματικά ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στη Φυσική;

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο παρακάτω κύκλωμα “εν παραλλήλω” η πιθανότητα

κάθε διακόπτης να είναι κλειστός (δηλαδή να επιτρέπει τη διέλευση ρεύματος) είναι 0,8. Οι διακόπτες λειτουργούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να διέρχεται ρεύμα από το A στο B.



2. Η πιθανότητα να πάθει βλάβη μέσα στον πρώτο χρόνο λειτουργίας της μια μηχανή ορισμένου τύπου είναι 10%. Αν μια βιομηχανία έχει δύο τέτοιες μηχανές, οι οποίες

άρχισαν να λειτουργούν συγχρόνως και ανεξάρτητα η μια από την άλλη, να βρείτε την πιθανότητα η μία μόνο να πάθει βλάβη μέσα στον πρώτο χρόνο λειτουργία τους.

3. Σε ένα νησί φτάνουν καθημερινά πλοία, που αναχωρούν από Πειραιά και Ραφήνα και σε ποσοστά 60% και 40% αντιστοίχως. Το 10% των πλοίων από Πειραιά και το 5% των πλοίων από Ραφήνα φθάνουν με καθυστέρηση στο νησί. Αν μια μέρα επιλέξουμε τυχαία ένα πλοίο που φτάνει στο νησί, να βρεθούν οι πιθανότητες:

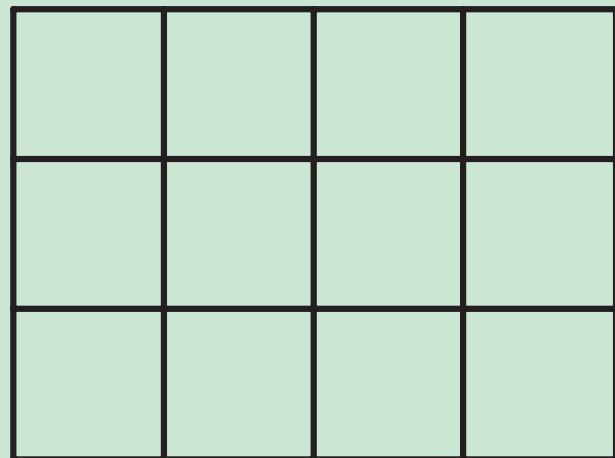
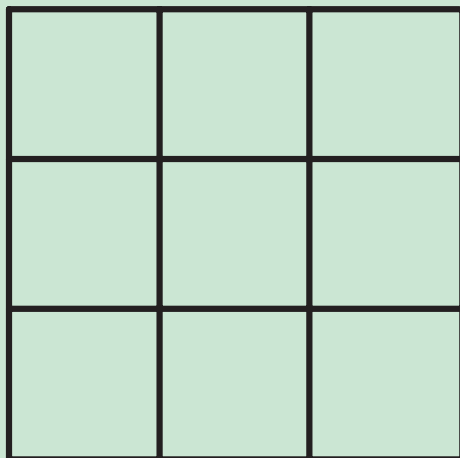
- i) Να φτάσει με καθυστέρηση
- ii) Αν φτάσει με καθυστέρηση, να έρχεται από Πειραιά.

4. Σε ένα εργοστάσιο το 60% των εργαζομένων είναι άνδρες και το 40% είναι γυναίκες. Από τους άνδρες καπνίζει το 50% και από τις γυναίκες το 30%. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο που καπνίζει, ποια η πιθανότητα να είναι γυναίκα;

5. Μια κληρωτίδα περιέχει n λαχνούς από τους οποίους κερδίζει μόνο ένας. Δύο άτομα παίρνουν το ένα μετά το άλλο

από την κληρωτίδα ένα ακριβώς λαχνό χωρίς επανατοποθέτηση. Κάποιος υποστηρίζει ότι το πρώτο άτομο έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει από το δεύτερο. Να εξετάσετε αν έχει δίκιο.

6. Δύο κτήματα έχουν χωριστεί σε 9 και 12 οικόπεδα, όπως φαίνεται παρακάτω:



Επιλέγουμε τυχαίως και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο ένα οικόπεδο από κάθε κτήμα.

- i) Ποια είναι η πιθανότητα και τα δύο οικόπεδα να είναι γωνιακά;**
- ii) Ποια είναι η πιθανότητα ένα τουλάχιστον από τα οικόπεδα να είναι γωνιακό;**
- iii) Ποια είναι η πιθανότητα κανένα από τα οικόπεδα να μην είναι γωνιακό;**

7. Το 1‰ ενός πληθυσμού πάσχει από μια σοβαρή ασθένεια. Ένα καινούργιο τεστ διάγνωσης της ασθένειας έχει πιθανότητα θετικού σφάλματος (θετικό τεστ, ενώ το άτομο είναι υγιές) 1% και πιθανότητα αρνητικού σφάλματος (αρνητικό τεστ, ενώ το άτομο πάσχει

από την ασθένεια) 5%. Για ένα τυχαίο άτομο από τον πληθυσμό αυτό το τεστ είναι θετικό. Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο να πάσχει πράγματι από την ασθένεια αυτή.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$. Δίνονται και οι πιθανότητες

$$P(k) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots, 100. \text{ Να}$$

υπολογίσετε την πιθανότητα $P(0)$.

2. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και A, B υποσύνολα του Ω . Υποθέτουμε ότι

$P(A') \leq 0,28$ και $P(B') \leq 0,71$. Να αποδείξετε ότι

i) $P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$
και ii) $A \cap B \neq \emptyset$.

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{pmatrix} \nu \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu - 1 \\ \kappa \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu - 1 \\ \kappa - 1 \end{pmatrix}$$

4. Ένα κουτί περιέχει μπάλες όμοιες σε σχήμα και σε μέγεθος, αλλά οι κ από αυτές είναι άσπρες και οι υπόλοιπες λ είναι μαύρες. Παίρνουμε δύο μπάλες τη μια κατόπιν της άλλης και χωρίς επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου η 2η μπάλα να είναι μαύρη. Αν επανατοποθετήσουμε την 1η μπάλα, ποια είναι τότε η πιθανότητα η 2η μπάλα να είναι μαύρη; Τι παρατηρείτε;

5. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, να αποδείξετε ότι είναι ανεξάρτητα και τα ενδεχόμενα: i) A' και B ii) A και B' , iii) A' και B' .

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Αν ρίξουμε δύο νομίσματα τα αποτελέσματα μπορεί να είναι δύο “κεφαλές”, μια “κεφαλή” και μια “γράμματα”, η δύο “γράμματα”, και επομένως, καθένα από αυτά τα ενδεχόμενα έχει πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Τι είναι λάθος στο επιχειρήρημα αυτό; Ποιο είναι το σωστό;

2. Ένα νόμισμα ρίχνεται 5 φορές και έρχεται κάθε φορά “κεφαλή”. Επομένως, η πιθανότητα να φέρουμε “κεφαλή” σε μια ρίψη του νομίσματος είναι

$\frac{5}{5} = 1$. Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα αυτό.

3. Τρία συνηθισμένα ζάρια, ένα άσπρο, ένα μαύρο και ένα κόκκινο, τοποθετούνται σε ένα κουτί. Ένα πείραμα συνίσταται στην τυχαία επιλογή ενός ζαριού από το κουτί, στη ρίψη του ζαριού αυτού και στην παρατήρηση του χρώματος και της ένδειξης της άνω έδρας του.

- α) Τι σημαίνει εδώ η λέξη “τυχαία”;
- β) Το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου του πειράματος είναι

i) $3 \cdot 6$ ii) 3^6 iii) $6!$ iv) 6^3
v) $3 \cdot 6^3$.

(Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση)

(Σε καθεμιά από τις ερωτήσεις 4-7 μία μόνο από τις συνοδευτικές απαντήσεις είναι σωστή. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση).

4. Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι 0,4, ποια είναι η πιθανότητα της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου αυτού;

- α) 0,2 β) 0,8 γ) 0,6
δ) 1,4.

5. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι

τέτοια ώστε $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$,

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, ποια είναι η

$P(A \cup B)$;

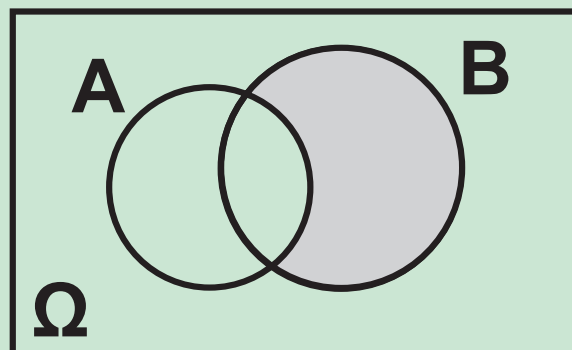
α) 1 β) $\frac{3}{4}$ γ) $\frac{1}{4}$ δ) $\frac{1}{16}$

ε) τίποτα από τα προηγούμενα.

6. Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο παρακάτω διάγραμμα Venn το σκιασμένο εμβαδόν;

α) B β) A' γ) A - B

δ) B - A.



7. Ποιος είναι ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 2 αγόρια και 3 κορίτσια από 10 αγόρια και 8 κορίτσια;

(α) $\Delta_2^{10} \cdot \Delta_3^8$ (β) $\Delta_2^{10} + \Delta_3^8$

(γ) $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

(δ) $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

(Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις 8-13 είναι σωστή ή λάθος. Αν είναι σωστή, κυκλώστε το Σ, αν είναι λάθος, κυκλώστε το Λ).

8. Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

9. Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι αντίθετα. Σ Λ

10. Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ξένα μεταξύ τους, τότε και τα συμπληρωματικά τους A' και B' είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

11. Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι και ανεξάρτητα. Σ Λ

12. Δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

13. Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, τότε και τα αντίθετά τους είναι ανεξάρτητα. $\Sigma \quad \Lambda$

14. Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα, με $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,2$. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης I στο ίσο του της στήλης II.

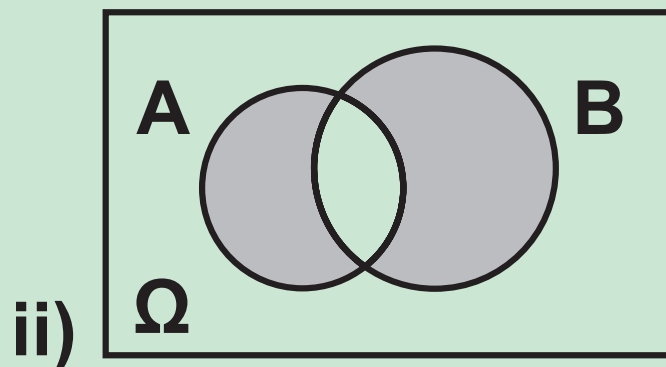
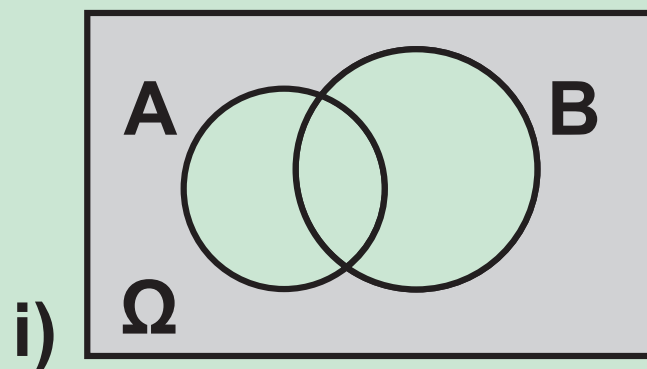
<u>Στήλη I</u>	<u>Στήλη II</u>
$P(A \cap B)$	0,8
$P(A \cup B)$	0,6
$P(A B)$	0
$P(B A)$	0,2
	0,12

15. Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, με $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,2$. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης I στο ίσο του της στήλης II.

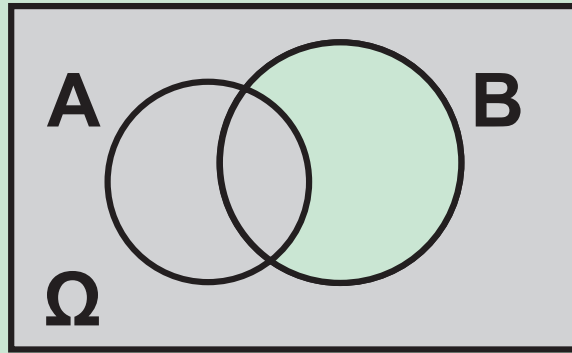
<u>Στήλη I</u>	<u>Στήλη II</u>
$P(A \cap B)$	0,6
$P(A \cup B)$	0,68
$P(A B)$	0,2
$P(B A)$	0,12

16. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ξένα μεταξύ τους, μπορεί να ισχύει $P(A) + P(B) = 1,3$;
-Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

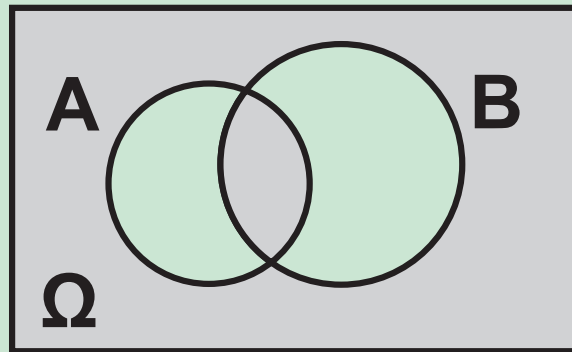
17. Να γράψετε με τη βοήθεια των πράξεων των συνόλων το ενδεχόμενο που παριστάνει το σκιασμένο εμβαδόν σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα Venn:



iii)



iv)



ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

§ 3.2 Α' Ομάδας

1. i) $\frac{1}{13}$ ii) $\frac{12}{13}$.

2. $\frac{1}{4}$.

3. i) $\frac{15}{40}$ ii) $\frac{25}{40}$ iii) $\frac{25}{40}$.

4. $\frac{9}{30}$.

5. i) $\frac{3}{11}$ ii) $\frac{8}{11}$.

6. i) 50% ii) 30%.

121 / 184

7. $\frac{11}{30}$.

8. $\frac{2}{3}$.

9. 0,4.

10. $\frac{3}{4}$.

11. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq$
 $\leq P(A) + P(B)$ κτλ.

12. 65%.

13. α) 14% β) 12%.

14. 10%.

§ 3.2 Β' Ομάδας

1. i) $\kappa + \lambda - \mu$ ii) $1 - \kappa - \lambda + \mu$
iii) $\kappa + \lambda - 2\mu$.
2. 55%.
3. $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}$.
4. Αν $P(A) = x$, τότε $P(A') = 1 - x$
κτλ.
5. Να λάβετε υπόψη ότι $A \cap B \subseteq A$
και $P(A \cup B) \leq 1$.
6. Να λάβετε υπόψη ότι
 $P(A') = 1 - P(A)$ και $P(A \cup B) \leq 1$.

§ 3.3 Α' Ομάδας

1. $1200, \frac{1}{3}$.

2. $124416000, \frac{7}{48}$.

3. $360, \frac{1}{3}$.

4. $7!, \frac{2}{35}$.

5. $\binom{v}{k} = \frac{v!}{k!(v-k)!} = \frac{v!}{(v-k)!k!}$ κτλ.

6. $\binom{8}{2}, \frac{3}{4}$.

§ 3.3 Β' Ομάδας

1. $\frac{5!}{5^4} = \frac{24}{125}$.

2. $1 - \frac{1}{v}$.

3. $\frac{1}{5}$.

4. $\frac{3}{32}$.

5. i) $\frac{3}{143}$ ii) $\frac{140}{143}$ iii) $\frac{42}{143}$.

6. Περίπου 75%.

7. 2800, $\frac{9}{28}$.

8. $\frac{1}{2^{v-1}}$.

$$9. \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}.$$

$$10. \frac{17}{77}.$$

$$11. 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0,518, \quad 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0,491.$$

§ 3.4 Α' Ομάδας

$$1. \frac{1}{3}.$$

$$2. \frac{3}{13}.$$

$$3. \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{10}.$$

4. $\frac{1}{3}$.

5. $\frac{1}{12}$.

6. $\frac{12}{49}$.

7. $\frac{4}{5}, \frac{17}{20}$.

8. i) Όχι ii) Όχι iii) $\frac{1}{4}$.

9. Να λάβετε υπόψη ότι
 $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

10. i) $\frac{2}{3}$ ii) $\frac{2}{5}$.

§ 3.4 Β' Ομάδας

1. 0,96.

2. 18%.

3. i) 8% ii) 75%.

4. $\frac{2}{7}$.

5. Όχι, έχουν ίδια πιθανότητα.

6. i) $\frac{4}{27}$ ii) $\frac{17}{27}$ iii) $\frac{10}{27}$.

7. $\frac{95}{1094} \approx 0,087$, δηλαδή 8,7%.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λάβετε υπόψη ότι
 $P(0) + P(1) + \dots + P(100) = 1.$
2. i) $P(A') = 1 - P(A)$ κτλ.
ii) Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.
3. Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο των συνδυασμών.
4. • Χωρίς επανατοποθέτηση: $\frac{\lambda}{\kappa + \lambda}$
• Με επανατοποθέτηση: $\frac{\lambda}{\kappa + \lambda}.$
5. i) Να λάβετε υπόψη ότι
 $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
ii) Να λάβετε υπόψη ότι
 $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

iii) $B' = (B' \cap A) \cup (B' \cap A')$
κτλ.

Ευρετήριο Όρων

Στο Ευρετήριο όρων τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ και Ε δηλώνουν τον 1ο, 2ο, 3ο, 4ο και 5ο τόμο αντίστοιχα, ενώ οι αριθμοί αναφέρονται στην πρώτη από τις δύο ενδείξεις που αναγράφονται σε κάθε σελίδα.

αδύνατο ενδεχόμενο	Δ' 103
αθροιστικές συχνότητες	Β' 58
αθροιστικές σχετικές συχνότητες	Β' 59
ανεξάρτητα ενδεχόμενα	Ε' 84
ανεξάρτητη μεταβλητή	Α' 14, Γ' 95

αξιοματικός ορισμός πιθανότητας	E' 15
απλός προσθετικός νόμος	E' 20
απογραφή	B' 23
ασυμβίβαστα ενδεχόμενα	Δ' 111, E' 19
βασική αρχή απαρίθμησης	E' 46
βέβαιο ενδεχόμενο	Δ' 103
γραμμική συσχέτιση	Δ' 5, Δ' 18
γραφική παράσταση συνάρτησης	A' 18
δείγμα	B' 25
δειγματικός χώρος	Δ' 100
δειγματοληψία	B' 29

δειγματοληψία με επανατοποθέτηση	Δ' 120
δεντροδιάγραμμα	Ε' 44
δεσμευμένη πιθανότητα	Ε' 78
δεύτερη παράγωγος	Α' 79
δημοσκοπήση	Β' 14
διάγραμμα διασποράς	Γ' 100
διάγραμμα συχνοτήτων	Β' 76
διακριτή μεταβλητή	Β' 22
διακύμανση	Γ' 44
διαλογή	Β' 53, Β' 91
διάμεσος	Γ' 23

διάμεσος ομαδοποιημένης κατανομής	Γ' 26
διασπορά	Γ' 44
διατάξεις	Ε' 49
εκατοστημόριο	Γ' 28
εκθετική συνάρτηση	Α' 23
εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων	Γ' 112
ενδεχόμενο	Δ' 101
ενδοτεταρτημοριακό εύρος	Γ' 42
εξαρτημένα ενδεχόμενα	Ε' 85
εξαρτημένη μεταβλητή	Α' 14, Γ' 103
εξίσωση γραφικής παράστασης	Α' 19

επαγωγή	B' 12
επικρατούσα τιμή	Γ' 32
ευθεία παλινδρόμησης	Γ' 103
ευνοϊκές περιπτώσεις	Δ' 102, Ε' 14
εύρος	B' 90, Γ' 40
εφαπτομένη καμπύλης	A' 48
ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα	Ε' 13
ιστόγραμμα	B' 98
ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων	B' 104
καμπύλη συχνοτήτων	B' 112
κανόνες παραγωγίσης	A' 89
κανονική κατανομή	B' 114

καμπύλη συνάρτησης	A' 18
κατανομή συχνοτήτων	B' 58
κατηγορική μεταβλητή	B' 21
κεντρική τιμή κλάσης	B' 88
κλάσεις	B' 87
κλάσεις ανίσου πλάτους	B' 106
κλάσεις ίσου πλάτους	B' 98
κλασικός ορισμός πιθανότητας	E' 18
κορυφή	Γ' 32
κριτήριο δεύτερης παραγώγου	A' 129
κριτήριο πρώτης παραγώγου	A' 117

κυκλικό διάγραμμα	B' 80
κύμανση	Γ' 40
λογαριθμική συνάρτηση	A' 24
μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων	Γ' 106
μέση τιμή	Γ' 12
μεταβλητή	B' 18
μεταθέσεις	E' 50
μέτρα ασυμμετρίας	Γ' 9
μέτρα διασποράς	Γ' 38
μέτρα θέσης	Γ' 11
μονοτονία	A' 26
ολικό ελάχιστο	A' 29

ολικό μέγιστο	A' 29
ομαδοποίηση παρατηρήσεων	B' 87
ομοιογένεια	Γ' 60
ομοιόμορφη κατανομή	B' 114
όρια κλάσης	B' 87
όριο συνάρτησης	A' 32
παλινδρόμηση	Γ' 94
παραβολή	A' 21
παραγοντικό	E' 51
παράγωγος συνάρτησης	A' 78
παράγωγος σύνθετης συνάρτησης	A' 94

παράγωγος της f στο x_0	A' 61
πείραμα τύχης	Δ' 96
περιγραφική στατιστική	B' 11
πίνακας συχνοτήτων	B' 58
πλάτος κλάσης	B' 89
πληθυσμός	B' 19
ποιοτική μεταβλητή	B' 21
πολλαπλασιαστικός νόμος	E' 82
πολύγωνο συχνοτήτων	B' 76, B' 100
ποσοτική μεταβλητή	B' 22
πράξεις με ενδεχόμενα	Δ' 104
πράξεις με συναρτήσεις	A' 16

προσθετικός νόμος	Ε' 23
ραβδόγραμμα	Β' 65
ρυθμός μεταβολής	Α' 64
σημειόγραμμα	Β' 83
σταθμικός μέσος	Γ' 20
στατιστική ομαλότητα	Ε' 11
στατιστικοί πίνακες	Β' 35
στιγμιαία ταχύτητα	Α' 52
συμπληρωματικά ενδεχόμενα	Ε' 21
συνάρτηση αύξουσα	Α' 28
συνάρτηση γνησίως μονότονη	Α' 28

συνάρτηση ημίτονο	A' 25
συνάρτηση πραγματική	A' 13
συνάρτηση συνεχής	A' 39
συνάρτηση συνημίτονο	A' 25
συνάρτηση φθίνουσα	A' 28
συνδυασμοί	E' 55
συνεχής μεταβλητή	B' 22
συντελεστής γραμμικής συσχέτισης	Δ' 10
συντελεστής μεταβολής	Γ' 57
συχνότητα	B' 52
συχνότητα κλάσης	B' 91
σχεδιασμός πειραμάτων	B' 11

σχετική συχνότητα	B' 56
τεταρτημόριο	Γ' 29
τοπικό ελάχιστο	A' 31
τοπικό μέγιστο	A' 31
τυπική απόκλιση	Γ' 51
υπερβολή	A' 22
χρονόγραμμα	B' 84

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 5ου ΤΟΜΟΥ

Σελίδα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Πιθανότητες

3.2	Έννοια της Πιθανότητας	5
3.3	Συνδυαστική	42
3.4	Δεσμευμένη Πιθανότητα - Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα	75

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

121

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.