

# ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΕΣ - ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

## Μαθηματικά (Άλγεβρα - Γεωμετρία)

**Α΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ και  
Α΄, Β΄ ΤΑΞΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Α΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ και  
Α΄ ΤΑΞΗ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑΛ**

**ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ  
ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ  
ΔΙΑΒΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ  
ΓΙΑ ΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ  
(ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ - ΕΠΑΛ)**

**1<sup>η</sup> ΕΚΔΟΣΗ - ΑΘΗΝΑ 2014**



**Ευρωπαϊκή Ένωση**  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ**

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



**ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ**

## ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΕΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών (ΠΣ), η διδασκαλία των μαθηματικών στην Α' Λυκείου επιδιώκει:

- Την ένταξη σ' ένα θεωρητικό πλαίσιο των μαθηματικών γνώσεων που έχουν αποκτήσει οι μαθητές στο Γυμνάσιο, την επέκταση και την εμβάθυνση τους.
- Την ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διερεύνηση προβλημάτων, στη δημιουργία και τον έλεγχο εικασιών, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και πολλαπλών αποδεικτικών προσεγγίσεων, στην ανάπτυξη διάφορων τρόπων σκέψης (επαγωγική, παραγωγική).
- Την κατανόηση και χρήση της μαθηματικής γλώσσας, των συμβόλων και των αναπαραστάσεων των μαθηματικών αντικειμένων, την ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα και αντίστροφα καθώς και την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επικοινωνούν μαθηματικά.
- Την ανάπτυξη ικανότητας εννοιολογικών συνδέσεων εντός των Μαθηματικών αλλά και μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών.
- Την ανάπτυξη ικανοτήτων χρήσης των Μαθηματικών ως εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου.

Με βάση τα παραπάνω, τα γενικά χαρακτηριστικά των τεσσάρων θεμάτων που θα περιλαμβάνει ένα διαγώνισμα αναλύονται ως εξής:

## ΘΕΜΑ 1

Το πρώτο θέμα ελέγχει την ικανότητα των μαθητών **να ανακαλούν και να αναπαράγουν** έννοιες και διαδικασίες που έχουν διδαχθεί. Ενδεικτικά, τα θέματα αυτού του τύπου στοχεύουν στο να ελέγξουν αν οι μαθητές είναι ικανοί:

1. **Να ανακαλούν** από τη μνήμη τους ορισμούς, έννοιες, διαδικασίες, ιδιότητες και συμβολισμούς.
2. **Να ανασύρουν** πληροφορίες από ένα γράφημα ή ένα πίνακα.
3. **Να αναγνωρίζουν** μαθηματικά αντικείμενα κάτω από διάφορες μορφές (διαφορετικές εκφράσεις της ίδιας οντότητας).
4. **Να αναγνωρίζουν** παραδείγματα μιας έννοιας.
5. **Να εκτελούν** νοερούς υπολογισμούς προκειμένου να προβούν σε μια εκτίμηση.
6. **Να χρησιμοποιούν** σωστά μαθηματικούς συμβολισμούς, ορολογία, συστήματα/μονάδες μέτρησης κλπ.
7. **Να ταξινομούν/ομαδοποιούν** μαθηματικά αντικείμενα στη βάση κοινών ιδιοτήτων τους.
8. **Να αντιστοιχίζουν** με βάση συγκεκριμένα κριτήρια.
9. **Να επιλέγουν** μεταξύ εναλλακτικών στηριζόμενοι σε ορισμούς και θεωρίες.
10. **Να ελέγχουν** την ορθότητα ενός απλού ισχυρισμού ή μιας συμβολικής έκφρασης.
11. **Να αποδεικνύουν** προτάσεις που περιλαμβάνονται στην εξεταστέα ύλη.

## ΘΕΜΑ 2

Το δεύτερο θέμα ελέγχει την ικανότητα των μαθητών **να εφαρμόζουν θεωρίες, ιδιότητες και αλγόριθμους σε οικείες** –σε σχέση με τη διδασκαλία– καταστάσεις (άμεση εφαρμογή). Ενδεικτικά, τα θέματα αυτού του τύπου στοχεύουν στο να ελέγξουν αν οι μαθητές είναι ικανοί:

1. **Να εφαρμόζουν κατάλληλα** ορισμούς, θεωρίες, αλγόριθμους σε προβλήματα παρόμοια με αυτά που έχουν διδαχθεί στην τάξη.
2. **Να ερμηνεύουν έναν απλό ισχυρισμό** που διατυπώνεται στην εκφώνηση του προβλήματος μεταφράζοντάς τον σε μαθηματικό μοντέλο.
3. **Να επιλέγουν μια μέθοδο** ή στρατηγική επίλυσης ενός απλού προβλήματος μεταξύ αυτών που έχουν ήδη διδαχθεί στην τάξη, και να την εφαρμόζουν με τρόπο σαφή και οργανωμένο.
4. **Να επιχειρηματολογούν** με σαφή αναφορά σε έννοιες και στους ορισμούς τους.
5. **Να συλλέγουν και να ερμηνεύουν** δεδομένα.
6. **Να μοντελοποιούν** με χρήση μαθηματικών εργαλείων (συμβόλων, τύπων, διαγραμμάτων, σχημάτων) που έχουν διδαχθεί, απλές καταστάσεις που περιγράφονται στη φυσική γλώσσα.

7. **Να ερμηνεύουν** δεδομένα που δίνονται με σύμβολα, πίνακες, διαγράμματα και γραφήματα.
8. **Να μεταφράζουν** μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη χρήσιμη για την επίλυση του προβλήματος.
9. **Να σχεδιάζουν** με ακρίβεια ακολουθώντας τις οδηγίες που τους δίνονται.
10. **Να συγκρίνουν** καταστάσεις εντοπίζοντας ομοιότητες και διαφορές.
11. **Να εκφράζονται χρησιμοποιώντας σωστά τη μαθηματική γλώσσα** και το συμβολισμό.
12. **Να αιτιολογούν τα βήματα** που ακολούθησαν για την επίλυση ενός προβλήματος.

### ΘΕΜΑ 3

Το τρίτο θέμα ελέγχει την ικανότητα των μαθητών **να επιλύουν απλά προβλήματα για τα οποία δεν υπάρχει άμεσος γνωστός αλγόριθμος επίλυσης τους** και για τα οποία απαιτείται ανάλυση της κατάστασης και στρατηγική σκέψη (δημιουργική εφαρμογή). Ενδεικτικά, τα θέματα αυτού του τύπου στοχεύουν στο να ελέγξουν αν οι μαθητές είναι ικανοί:

1. **Να αναλύουν** τα δεδομένα του προβλήματος και να θέτουν περιορισμούς.
2. **Να αναπτύσσουν λογικά επιχειρήματα** λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα και τους περιορισμούς του προβλήματος.
3. **Να χρησιμοποιούν αντιπαραδείγματα** για την απόρριψη λανθασμένων ισχυρισμών.
4. **Να επιχειρηματολογούν με ακρίβεια για τις επιλογές** τους **χρησιμοποιώντας σωστά τη μαθηματική γλώσσα** και τη μαθηματική λογική.
5. **Να διακρίνουν περιπτώσεις** κατά τη διαδικασία επίλυσης μη οικείων προβλημάτων.
6. **Να βρίσκουν παραδείγματα και μη παραδείγματα** μιας έννοιας.
7. **Να αναλύουν ομοιότητες και διαφορές** σε έννοιες ή στρατηγικές επίλυσης.
8. **Να συνοψίζουν/συνθέτουν τα αποτελέσματα της διερεύνησης τους** και να καταλήγουν σε τεκμηριωμένα συμπεράσματα.
9. **Να επιλύουν** προβλήματα γραφικά και συμβολικά **και να διατυπώνουν συσχετίσεις.**
10. **Να επιλέγουν τις κατάλληλες αναπαραστάσεις σε σχέση** με την **ιδιαιτερότητα** του προβλήματος, για να το επιλύσουν.
11. **Να ερμηνεύουν** τα μαθηματικά αντικείμενα (πχ αριθμούς, σύμβολα) **σε σχέση με τα δεδομένα του προβλήματος** (πχ τι αντιπροσωπεύει ο αριθμός που εκφράζει την κλίση μιας ευθείας στο πλαίσιο του πραγματικού προβλήματος που καλούνται να επιλύσουν)

#### ΘΕΜΑ 4

Το τέταρτο θέμα ελέγχει την ικανότητα των μαθητών να επιλύουν προβλήματα περισσότερο σύνθετα από αυτά του τρίτου θέματος **αναπτύσσοντας κατάλληλες στρατηγικές και δημιουργώντας συνδέσεις και συσχετισμούς μέσα στην ίδια μαθηματική περιοχή καθώς και μεταξύ διαφορετικών περιοχών**. Ελέγχει επίσης την ικανότητα τους να ανασύρουν τις απαιτούμενες πληροφορίες από την εκφώνηση του προβλήματος και να επιλέγουν το κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο για την επίλυσή του.

Ενδεικτικά, τα θέματα αυτού του τύπου στοχεύουν στο να ελέγξουν αν οι μαθητές είναι ικανοί:

1. **Να προσαρμόζουν τα διαθέσιμα μαθηματικά εργαλεία** στις ιδιαιτερότητες της κατάστασης που διερευνούν.
2. **Να συνθέτουν** τις γνώσεις που διαθέτουν για την επίλυση ενός μη οικείου προβλήματος.
3. **Να διερευνούν ενδεχόμενα** για τα οποία η εκφώνηση δεν δίνει πληροφορίες.
4. **Να διαμορφώνουν ένα μαθηματικό μοντέλο** για μια σύνθετη (πραγματική ή μαθηματική) κατάσταση.
5. **Να διερευνούν και να διατυπώνουν εικασίες** τις οποίες να αποδεικνύουν επιλέγοντας την κατάλληλη στρατηγική.
6. **Να αξιολογούν** την αξιοπιστία μιας πληροφορίας, την αποτελεσματικότητα μιας στρατηγικής ή την ορθότητα μιας απόδειξης.
7. **Να γενικεύουν** συμπεράσματα και να επεκτείνουν το πεδίο εφαρμογής τους.
8. **Να προσαρμόζουν τη λύση** ενός προβλήματος όταν τα δεδομένα της εκφώνησης μεταβάλλονται.
9. **Να συγκρίνουν, να σχολιάζουν και να αντιπαραθέτουν** τρόπους σκέψης και στρατηγικές επίλυσης.
10. **Να εκφράζουν το νόημα μιας μαθηματικής έννοιας, διαδικασίας, αναπαράστασης με περισσότερους από έναν τρόπους.**
11. **Να επιχειρηματολογούν για τις επιλογές τους χρησιμοποιώντας σωστά τη μαθηματική γλώσσα και τη μαθηματική λογική, σε περισσότερα από ένα πλαίσια (π.χ. αλγεβρικό, γεωμετρικό).**

Σημείωση: Ένα θέμα που ανήκει στην κατηγορία 2, 3 ή 4 μπορεί να ελέγχει και κάποιες ικανότητες/δεξιότητες προηγούμενων κατηγοριών

Κάθε Θέμα που προτείνεται πρέπει να συνοδεύεται από την παρακάτω περιγραφή:

<b>ΜΑΘΗΜΑ</b>	Μαθηματικά: Άλγεβρα Μαθηματικά: Γεωμετρία
<b>ΤΥΠΟΣ ΛΥΚΕΙΟΥ</b>	Αναφέρατε τον τύπο ή τους τύπους Λυκείου που απευθύνεται το θέμα. Π.χ. ΓΕΛ, ΕΠΑΛ , ΓΕΛ και ΕΠΑΛ
<b>ΣΤΟΧΟΙ του Π.Σ.</b> των οποίων η υλοποίηση ελέγχεται μέσω της δραστηριότητας	Αναφέρατε τον κωδικό και την περιγραφή του στόχου ή των στόχων που επιδιώκετε μέσω της δραστηριότητας, με βάση τους μαθησιακούς στόχους κάθε κεφαλαίου όπως αυτοί αναφέρονται στο Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) Μαθηματικών (ΦΕΚ Τεύχος 2, Αρ. Φύλλου 1168, 8 Ιουνίου 2011) π.χ. Σ1. Αποφασίζουν αν ένα στοιχείο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και εκφράζουν αυτή τη σχέση συμβολικά.
<b>Εκφώνηση Δραστηριότητας</b>	
<b>Ενδεικτική Απάντηση</b>	
<b>ΘΕΜΑ 1 2 3 4</b>	
<b>ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΑΠΑΙΤΗΣΗ</b> της δραστηριότητας <b>π.χ. (2, 5)</b>  <b>(4, 1) και (4,2)</b>  (Ο πρώτος αριθμός δηλώνει το θέμα, και ο δεύτερος την ιδιαίτερη ικανότητα που ελέγχεται μέσω του Θέματος με βάση την παραπάνω περιγραφή των θεμάτων. Σε περίπτωση που η γνωστική απαίτηση του θέματος δεν καλύπτεται από την παραπάνω περιγραφή, περιγράψτε την)	5. <b>Να συλλέγουν και να ερμηνεύουν</b> δεδομένα  1. <b>Να προσαρμόζουν τα διαθέσιμα μαθηματικά εργαλεία</b> στις ιδιαιτερότητες της κατάστασης που διερευνούν 2. <b>Να συνθέτουν</b> τις γνώσεις που διαθέτουν για την επίλυση ενός μη οικείου προβλήματος

## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

<b>ΜΑΘΗΜΑ</b>	Μαθηματικά: Άλγεβρα
<b>ΤΥΠΟΣ ΛΥΚΕΙΟΥ</b>	ΓΕΛ
<b>ΣΤΟΧΟΙ του Π.Σ.</b> των οποίων η υλοποίηση ελέγχεται μέσω της δραστηριότητας	<p>Πθ2: Προσδιορίζουν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και ενδεχόμενα αυτού με διάφορους τρόπους.</p> <p>Πθ3: Μεταφράζουν διάφορες σχέσεις ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες σε φυσική γλώσσα, στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα</p> <p>Πθ4: Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τον κλασσικό ορισμό</p>
<b>Εκφώνηση Δραστηριότητας</b>	<p>Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.</p> <p><b>α)</b> Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.</p> <p><b>β)</b> Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων  A : Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης.  B : Να διαγωνίστηκε η Ζωή.  Γ : Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης</p>
<b>Ενδεικτική Απάντηση</b>	<p><b>α)</b> <math>\Omega = \{\Delta E, \Delta Z, K E, K Z, M E, M Z\}</math></p> <p><b>β)</b> <math>A = \{K E, K Z, M E, M Z\}</math>,  οπότε <math>P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}</math></p> <p><math>B = \{\Delta Z, K Z, M Z\}</math>,  οπότε <math>P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}</math></p> <p><math>\Gamma = \{M E, M Z\}</math>,  οπότε <math>P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}</math></p>
<b>ΘΕΜΑ</b>	2
<b>ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΑΠΑΙΤΗΣΗ</b> της δραστηριότητας (2, 1), (2, 8), (2, 11)	<p>1. <b>Να εφαρμόζουν κατάλληλα</b> ορισμούς, θεωρίες, αλγόριθμους σε προβλήματα παρόμοια με αυτά που έχουν διδαχθεί στην τάξη.</p> <p>8. <b>Να μεταφράζουν</b> μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη χρήσιμη για την επίλυση του προβλήματος.</p> <p>11. <b>Να εκφράζονται χρησιμοποιώντας σωστά τη μαθηματική γλώσσα</b> και το συμβολισμό.</p>

## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

<b>ΜΑΘΗΜΑ</b>	Μαθηματικά: Άλγεβρα
<b>ΤΥΠΟΣ ΛΥΚΕΙΟΥ</b>	ΓΕΛ
<b>ΣΤΟΧΟΙ του Π.Σ.</b> των οποίων η υλοποίηση ελέγχεται μέσω της δραστηριότητας	<p>Πρ8: Ορίζουν αλγεβρικά την απόλυτη τιμή συνδέοντάς την με τη γεωμετρική ερμηνεία της.</p> <p>Ε4: Επιλύουν εξισώσεις 1<sup>ου</sup> βαθμού (π.χ. ρητές, με απόλυτες τιμές) εφαρμόζοντας ιδιότητες των πράξεων και της ισότητας των πραγματικών αριθμών.</p>
<b>Εκφώνηση Δραστηριότητας</b>	<p>Σε έναν άξονα τα σημεία <b>A</b>, <b>B</b> και <b>M</b> αντιστοιχούν στους αριθμούς <b>5</b>, <b>9</b> και <b>x</b> αντίστοιχα.</p> <p><b>A)</b> Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων <math> x - 5 </math> και <math> x - 9 </math>.</p> <p><b>B)</b> Αν ισχύει <math> x - 5  =  x - 9 </math>:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου <b>M</b> αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.</li> <li>Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό <b>x</b> που παριστάνει το σημείο <b>M</b>. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.</li> </ol>
<b>Ενδεικτική Απάντηση</b>	<p><b>A)</b> Η παράσταση <math> x - 5 </math> παριστάνει την απόσταση των αριθμών <math>x</math> και <math>5</math> πάνω στον άξονα, δηλαδή το μήκος του τμήματος <math>AM</math>. <i>Όμοια</i>, η παράσταση <math> x - 9 </math> παριστάνει την απόσταση των αριθμών <math>x</math> και <math>9</math> πάνω στον άξονα, δηλαδή το μήκος του τμήματος <math>BM</math>.</p> <p><b>B)</b> i) <math> x - 5  =  x - 9  \Leftrightarrow d(x, 5) = d(x, 9) \Leftrightarrow MA = MB</math>. το σημείο <math>M</math> είναι το μέσο του τμήματος <math>AB</math>.</p> <p>ii) Με βάση τον άξονα, το σημείο <math>M</math> αντιστοιχεί στον αριθμό <math>x = 7</math>.</p> $ x - 5  =  x - 9  \Leftrightarrow (x - 5 = x - 9) \text{ ή } (x - 5 = -x + 9) \Leftrightarrow 0x = -4 \text{ ή } 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$
<b>ΘΕΜΑ</b>	4
<b>ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΑΠΑΙΤΗΣΗ</b> της δραστηριότητας (4, 1), (4, 10), (4, 11)	<ol style="list-style-type: none"> <li>Να <b>προσαρμόζουν</b> τα διαθέσιμα μαθηματικά εργαλεία στις ιδιαιτερότητες της κατάστασης που διερευνούν.</li> <li>Να <b>εκφράζουν</b> το νόημα μιας μαθηματικής έννοιας, διαδικασίας, αναπαράστασης με περισσότερους από έναν τρόπους.</li> <li>Να <b>επιχειρηματολογούν</b> για τις επιλογές τους χρησιμοποιώντας σωστά τη μαθηματική γλώσσα και τη μαθηματική λογική, σε περισσότερα από ένα πλαίσια (π.χ. αλγεβρικό, γεωμετρικό)</li> </ol>